ペレス 量子論の概念と手法

先端研究へのアプローチ

大場一郎・山中由也・中里弘道　共訳

Quantum Theory: Concepts and Methods

by Asher Peres

丸善株式会社

Quantum Theory:

Concepts and Methods

by

Asher Peres

原　著　序　文

量子論には優れた教科書が多数あり，それらによってエネルギー準位，遷移確率や散乱断面積などの計算法を学ぶことができる．これらの教科書には物理学者が観測量の計算のために通常用いている理論的な規則が載っている．そして，それらを用いて求められる様々な値は実験データと比較できる．このような実用的な目的で量子論をどう**用いるか**に関しては物理学者の間に基本的な意見の相違はない．しかしながら，量子論の存在論的意味合いにおいては深刻な意見の相違が存在している．

本書の目的は，この量子論の**概念的意味**を明確にし，また量子論で用いられているいくつかの数学的方法を説明することにある．この教科書では，原子構造，強い相互作用，弱い相互作用など，特定の話題は取り上げず，量子論の本当の基礎そのものを取り扱うが，科学哲学の本ではない．その方法は実用的で，かつ厳密に道具を用いる側に立ったアプローチがとられている．読者のうちには，このような姿勢にきっと反感をもたれる方がいるだろうが，これにはそれなりの論理性がある．つまり，量子現象はヒルベルト空間で起こるのではなく，実験室で起こっているのである．

本書の読者対象レベルは大学院相当であるが，ほとんどの大学では正規の講義科目として量子論の基礎を設けていないため，独習できるようにも編集し，多くの演習問題や参考書を掲載した．演習問題は，その多くが本文と "密接な" 関係にあり，本文の一部と見なされるべきである．その結果，読者はその後の応用に必要とされる結果を導出する作業に積極的に関わることになる．普通の演習問題を解くには数分間の時間しか要らないだろう．さらに難しい演習問題には ⋆ が付けられている．⋆⋆ が付けれているものはより意欲的な学生のためのちょっとした研究プロジェクトの問題であり，数は少ない．

本書の読者は (力学，光学，熱力学などの) 古典物理学，そしてもちろん初歩的な量子論はあらかじめわかっていることを前提としている．これらの科目の中で学んでいないものがありそうな場合には，それを補うため，そのときどき必要に応じて各章の最後の**参考文献**の項に，一般的な推薦図書とともに教科書をあげておいた．統計の初歩やコンピュータープログラムなどの必要な数学的概念はそれらが必要な章の**付録**に与えておいた．

本書の数学的なレベルは一様でない．**物理的意味**を抽象的な数学的対象に付与するさいに，線形代数の初歩的概念を詳細にわたって説明した．いったんこのようにしておけば，群論，角運動量の代数や球面調和関数など，もっと上級の課題にも抵抗感な

く取り組めると思われるからである.(必要な基礎知識をもっていない読者のために参考文献をあげてある.)

本書の大まかな構成は次の通りである.オーソドックスに,はじめの数章で量子論の研究に必要な形式的な道具立てを導入している.しかし,ここでの基本概念はベクトルや演算子ではなく,**準備と検証**である.その目的は,これらの物理的概念を抽象的な形式より軽視しているのではなく,むしろそれらの操作的な意味合いをはっきりと定義することである.この段階では,“測定”とは,自己共役演算子によって表される観測量にある数値を与える理想的過程と考えられている.観測過程に対し,何ら動力学的に詳細な記述法が提案されているわけではない.“量子不確定性”などというあいまいな概念は決して使わない.連続スペクトルをもつ力学変数について簡単にふれている章もあるが,そこでの数学は合理的で納得できるレベルであり,(初歩的な教科書にありがちな)ずさんだったり,また極度に抽象的かつ厳密すぎることもない.

本書の中心部分は隠れた決定論,つまり“隠れた変数”を使って量子論を拡張する理論に当てられている.(ベルの定理に関連した)非局所的効果や(コッヘン–シュペッカー定理にもとづく)周辺状況関係上の効果が詳細にしらべられる.量子現象が古典物理学から最も本質的に逸脱するのがこの部分である.執筆中に,これらの問題に関してかなりの進歩があり,これらの進展が永続する価値をもつとして,本書中に取り入れた.

本書の第III部は時空間の対称性に関する章から始まり,非相対論的および相対論的運動学と動力学を論じる.その後,現在の研究に関わるトピックスへと進み,これまでは特別な専門誌にしか発表されなかった問題を提示する.すなわち,量子論と熱力学や情報理論との関係,および古典論への対応,そして不可逆性と量子カオスの出現である.量子カオスは,よりなじみのある決定論的な古典カオスと多くの点で異なっている.これらの2種類のカオス間に存在する類似性と相異性を分析している.

最後の章では観測過程を論じる.ここでは測定装置を不完全性をもたざるをえない**物理系**と考える.もはや力学変数の測定値が対応する演算子の固有値であると仮定する必要はない.この性質は測定装置の力学的ふるまいに由来する.(典型的にいえば,測定装置が目盛に沿って動く指針をもっている場合には,指針の最終位置が固有値の一つの**近く**に来る.)ここでの難点は,測定装置が両立不能な2種類の記述を受け入れざるをえないことである.つまり,観測される対象と相互作用するときは量子系であり,最終的に明確な値を読み取るときには古典系でなければならない.これら2種類の対立する記述が**近似的に**整合性がとれることは,測定過程の不可逆性によって保証されている.

本書はフォン・ノイマンの古典的著作とは多くの点で異なっている.フォン・ノイマンの関心は“オブザーバブル”であった.これは新古典主義的な姿勢である.つまり,私たちが観測する“物理量”がおそらく存在し,これらの観測によってお互いに擾乱を受ける.本書では**検証**とよばれるマクロな操作が行われることを仮定しているが,それによって確率的な結果がもたらされる.そして,私たちはこれらのマクロな処方が

ミクロな対象(たとえば，原子)に結びついているような**モデル**を構成し，これらのモデルを用いてマクロな検証で得られる確率的な結果を統計的に予測する．この方法はフォン・ノイマンの方法と概念的に異なるものではなく，その一般化でもある．この観測過程は直交射影演算子ではなく，非直交な**正値演算子測度**(POVM)によって表現されている．このように改良された方法を用いることで，フォン・ノイマンの制限された観測よりも物理系からより多くの情報を引き出すことができる．

このような話題は"量子観測理論"とよばれることが多いが，この呼び方は不適切である．量子観測理論などありえず，ただ，量子力学があるだけである．実験事実を記述するのに量子力学を用いるか，さもなくば別の理論を使うだけのことである．観測は超自然現象ではない．物理過程であり，普通の物質が関与し，普通の物理法則に従っている．この明白な事実を無視し，観測を素朴な概念で取り扱うことは事実を歪曲することであり，物理を曲解することになる．観測過程を記述するさいの概念的困難さを見て取って，量子論を新たに"解釈する"方法を提案している人たちがいる．これらの提案は新たな解釈ではなく，根本的に別の理論であり，実験的な支持がない．本書は標準的な量子論(実験結果を予言し，解析するために物理学者が実際に用いている理論)だけを考えている．標準を逸脱した新奇な理論に興味をもつ読者が本書にそれを期待しても無理だろう．

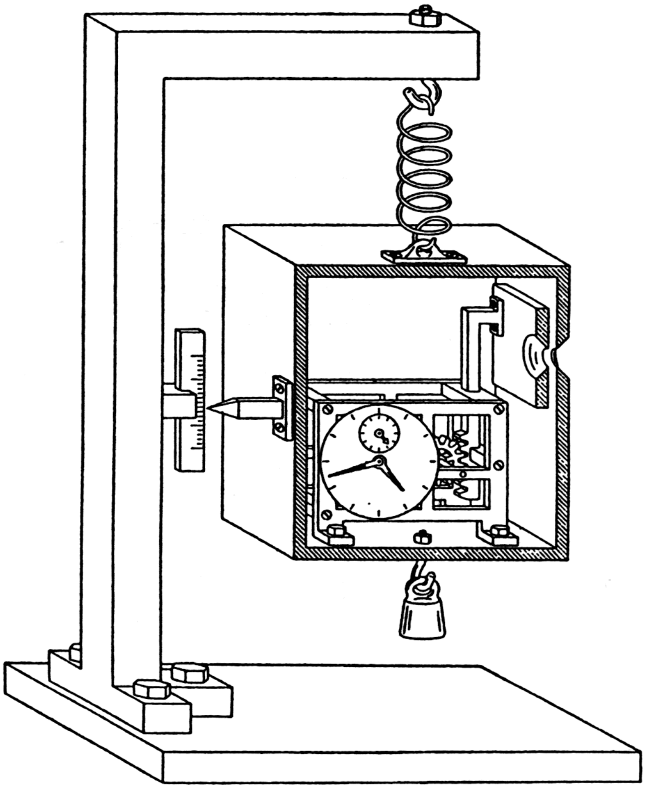
本書を執筆中に，本文の部分部分で私よりもその分野に通暁している研究者にしばしば任意のレフェリーをお願いした．そのさい興味深い有益なコメントを頂いたことに対し，エイヴロン(J. Avron)，ベネット(C. H. Bennett)，ブラサード(G. Brassard)，バーゴス(M. E. Burgos)，フェインゴールド(S. J. Feingold)，フィッシュマン(S. Fishman)，フォード(J. Ford)，ゴールドバーグ(J. Goldberg)，フッター(B. Hutter)，ジョルダン(T. F. Jordan)，マリノフ(M. Marinov)，マーミン(N. D. Mermin)，ローゼン(N. Rosen)，サファー(D. Saphar)，シュールマン(L. S. Schulman)，ウッタース(W. K. Wootters)，そしてザック(J. Zak)の諸氏に感謝致します．すべての原稿を章ごとに目を通し，些細なタイプミスから基本的な概念上の誤りに至るまで，数多くの誤りを指摘していただいたサム・ブラウンシュタイン(Sam Braunstein)とアディ・マン(Ady Mann)には，特に感謝致します．本書を完成するために要した6年間，支援していただいた私の所属機関，テクニオンにもまた感謝致します．これらすべてにまして私の受けた最も貴重な援助は妻エイヴィヴァ(Aviva)からの尽きない励ましであり，本書を彼女に捧げる．

アッシャー・ペレス

1993年6月

目　　次

第I部
量子力学の道具立て



図版 I　ボーアが考案した架空の装置．これは，1 個の光子が箱から飛び出す瞬間を記録するものである．光子が通過できるようシャッターが開放される前と後両方のときの箱の重量をばね秤で測る．ばね秤の力学を解析することによって，光子の通過時間は少なくとも $\Delta E/\hbar$ (ΔE は光子のエネルギーを測定するさいの不確定性) 程度不確定であることが示せる．[ニールス・ボーア記録保管所 (コペンハーゲン) の好意による複製]

1
量子物理への序

1.1 古典物理概念の崩壊

古典物理学では，粒子はきちんと定義される位置と運動量を同時にもつことが前提であった．粒子の位置と運動量は客観的な性質であり，物理学者がそれを明確に知っているかどうかとは無関係にその値は存在すると考えられていたのである．もし，これらの値が未知なのに計算を進める必要に迫られれば，それらについて合理的な (統計的な) 仮定をするだろう．たとえば，調和振動子の位相に対して一様分布が，または気体の分子速度に対してマクスウェル分布が仮定されてきたのである．古典統計力学は多くの現象を説明できたが，それは単に物理学の真の法則の実用上の近似と見なされていた．概念上は，各粒子の位置 $\mathbf{q}$ と運動量 $\mathbf{p}$ は明確に定義された，客観的な数値をもっていたのである．

古典統計力学には明らかな矛盾する欠点がいくつかあった．とりわけ，空洞中に閉じ込められている電磁放射が空洞の壁といかにして熱平衡に達するかを，古典統計力学は説明できなかった．この問題は次のようなものである．空洞の壁は電磁放射を吸収・放出できる原子でできているが，壁をつくっている原子の数は，たとえば 10^{25} 個のように**有限**である．いずれにしても，壁は有限自由度である．一方，放射場は，直交モードにフーリエ分解できて，放射場全体のエネルギーはこれらのモードに分配される．各モードでは，場は調和振動子のように一定の周波数で振動する．つまり，放射は力学的には**無限個**の調和振動子の集りと等価である．こうした状況では，エネルギーの等分配則 (各調和振動子ごとに平均して $E=\frac{1}{2}kT$ のエネルギーが分配される) は決して満足されない．すなわち，空洞内の真空は無限の熱容量をもつことになって，壁の熱エネルギーすべてを吸収してしまうことになる．この矛盾を解決するため**特別**に物理法則を修正してはじめて，実験データとの一致が得られた．プランク[*1]は，原子と周波数 ν の放射モード間のエネルギーのやりとりは $h\nu$ の整数倍でのみ起こりうると仮定した．ここで h は新たな普遍定数である．その後間もなく，アインシュタイン[*2]は光電効果 (光に照射された物質から電子が飛び出す現象) を説明するのに，プランクの仮説をいっそう推し進めた．アインシュタインは，光が粒子からできているとはっきりとは書かなかったが，彼の研究はそのことを強く示唆していた．

[*1] M. Planck, *Verh. Deut. Phys. Gesell.* 2 (1900) 237; *Ann. Physik* 4 (1901)553.
[*2] A. Einstein, *Ann. Physik (4)* 17 (1905) 132; 20(1906) 199.

1927年頃には，波長 λ の電磁放射が，あたかもエネルギー $E = h\nu$ と運動量 $p = h/\lambda$ をもつ局在的**粒子**(光子[*3]とよばれる) からできているかのような十分な証拠が得られるときもあった．特に，光子と電子が衝突すると，あたかも通常の粒子の弾性衝突と同じように，全体のエネルギーと運動量が，保存されることはすでにコンプトン[*4]によって示されていた (コンプトン効果)．一方，マクスウェル方程式には嫌疑がかからなかったので，光子は電磁放射のパルス (波束) ではないかという可能性が検討された．しかしながら，フーリエ解析の初等的定理によれば，大きさ Δx の波束をつくるには，最低限 $1/\Delta x$ オーダーのバンド幅 $\Delta(1/\lambda)$ が必要である．この定理を関係式 $1/\lambda = p/h$ が成り立つ光子に適用すると，位相空間における光子の位置は，点としてではなく，むしろ $\prod \Delta q^i \Delta p_i \gtrsim h^3$ (もっと厳密な制限は，4章で導かれる) の関係を満たす小さい体積要素で表すべきとなる．この事実だけだったら古典物理学者を脅かすことはなかったであろう．なぜなら，“光子” という名前は本物の粒子という意味ではなく，放射の束に都合良いように付けた名前にすぎないとされていたからである．しかしながら，ハイゼンベルク[*5]は次のことを指摘した．もし私たちがある粒子を (文字通り) **見よう**とするなら，すなわち，粒子に光子を実際にぶつけて粒子の位置 $\mathbf{q}$ と運動量 $\mathbf{p}$ を確かめようとすれば，粒子の位置と運動量は，プローブとして使われる光子の $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ 以上の精度で決定することはできない．したがって，どんな粒子であろうと光学的手段によって観測されるならば $\prod \Delta q^i \Delta p_i \gtrsim h^3$ の制約を受けることになる．電子の波動性が実験で発見されたこと[*6]と，またこの制約から，正確な $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ を同時にもつ粒子という古典概念がまったくの幻想であるという結論に至った．

そのさい，それまでの素朴な古典的記述は，状態ベクトル ψ [関数 $\psi(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n; t)$ で通常は表されている] を含む新たな記述にとってかわわられた．巨視的世界での日常の経験に根づく私たちの直観からでは，$3n$ 次元の配位空間座標と時間に依存するこの複素関数を視覚化することはまったくできない．にもかかわらず，$\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ が失った客観的な地位を波動関数 ψ に帰そうとする物理学者もいる．確かに，各粒子 (あるいは粒子系) が波動関数を**有して**いて，その波動関数が粒子の客観的な特性であると考えたくなる誘惑にかられる．この波動関数は必ずしも物理学者に**既知**でなくてもよい．その場合は，その値がわかっていないが，計算を進めるのに必要なら，ちょうど古典統計物理学で行ったと同様に，それについて合理的な仮定をしなければならない．そうであっても，概念上は，どの物理系の状態ベクトルも明確に定義された，客観的な数値をもつと考える．

残念ながら，こうした素朴な考え方を支持する実験的な証拠はいかなる形でも存在していない．それどころか，もしこの見方をまともに受け取ると，それは “量子パラドックス” とよばれる多くの奇怪な結論に達してしまう．(たとえば，図 6.1 とそれに

---

*3 G. N. Lewis, *Nature* 118 (1926) 874.
*4 A. H. Compton, *Phys. Rev.* 21 (1923) 207, 483, 715.
*5 W. Heisenberg, *Z. Phys.* 43 (1927) 172; *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Univ. of Chicago Press (1930) [Dover よりリプリント版刊行] p. 21.
*6 C. Davisson and L. H. Germer, *Phys. Rev.* 30 (1927) 705.

関連した論議を参照せよ.) これらのいわゆるパラドックスは，もっぱら量子論を不正に解釈することから生じる．量子論は，完全に実践的であって，正確に使われれば，正しく提起された問に対して，互いに矛盾した二つの答をもたらすようなことは決してない．パラドックスをもつ結果に至ってしまうのは，擬実在論的哲学による量子概念の**誤用**にすぎない．

1.2 乱雑性の出現

ハイゼンベルクの不確定性原理は，古典的諸量を少しだけあいまいにするだけと思うかもしれない．量子論が古典論から根本的に逸脱しているのは，実験結果が本質的に**再現不可能である**という点である．古典物理法則の基礎となっている暗黙の仮定は，ある実験に対して条件をすべて正確に同一に設定すれば，実験結果は正確に同一でなければならないということだった．これが**決定論**とよばれているものである．しかしながら，それは，初歩的実験での光子の既知のふるまいとは一致していない．たとえば図 1.1 に示されている実験である．平行光線を出す光源，方解石のような複屈折結晶およびポラロイド膜のような偏光フィルターを準備しよう．スクリーン上には，通常異なった明るさの二つの輝点が現れる．偏光板を結晶に対して角度 α 回転させると，その二つの輝点の強度は，$\cos^2\alpha$ および $\sin^2\alpha$ のように変化する．

この結果は**古典**電磁気理論で容易に説明できる．私たちは光が電磁波からできていることを知っている．偏光板はその繊維に平行な電場ベクトルを吸収するため，結果

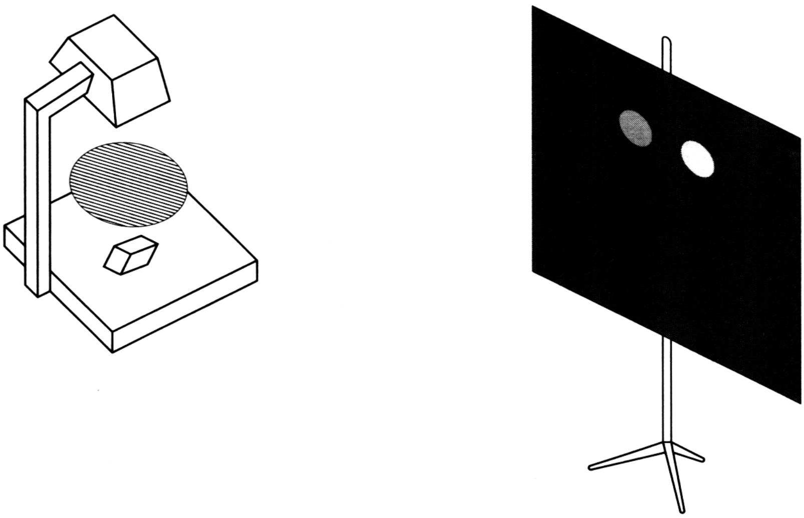


図 1.1 偏極光子に関する教室での提示実験．オーバーヘッドプロジェクターから出で来る光が方解石とポラロイド膜を通り抜ける．スクリーン上には二つの輝点が現れる．偏光板を角度 α 回転させると，その二つの輝点の明るさは，$\cos^2\alpha$ と $\sin^2\alpha$ のように変化する．

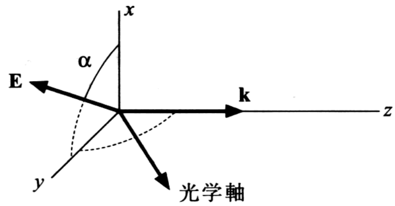


図 1.2　複屈折を記述するための座標系:入射波ベクトル $\mathbf{k}$ は z 軸に沿い，電場ベクトル $\mathbf{E}$ は xy 平面上，結晶の光学軸は yz 平面上にある．

として透過光は偏光している．いまこの偏光が，異方性屈折率をもつ方解石結晶を通過することになる．その結晶内の光路を計算するために，図 1.2 に示された座標系を選ぶのが都合がよい．つまり，入射波ベクトル $\mathbf{k}$ に沿って z 軸を，$\mathbf{k}$ と結晶の光学軸の両方と垂直に x 軸を，そして最後に残っている方角として y 軸を選ぶ．このとき，電場ベクトル $\mathbf{E}$ の x および y 成分は，異方性結晶中で**独立に** (異なった速度で) 伝播する．この二つの光線は，それぞれ正常光と異常光に対応している．これらの成分は，$\mathbf{E}$ と x 軸の角度が α であるとき，おのおの $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ に比例する．それゆえ，屈折光の**強度** (ポインティング・ベクトル) は，$\cos^2\alpha$ と $\sin^2\alpha$ に比例することになる．これが古典論が予言するものであり，私たちが実際に観測するものである．

しかしながら，この単純な説明は，私たちが「光が粒子 (光子) からできている」という現代的な言葉でそれを言い直そうとするとたん，役に立たなくなる．なぜなら，一個一個の光子は**分割不可能**なものであるからである．1 個の光子が，分かれて進むことはない．各光線では，$h\nu\cos^2\alpha$ あるいは $h\nu\sin^2\alpha$ といったようなエネルギーの減少した (これは振動数の減少になるが) 光子が得られるのでなく，むしろ，**完全に**もとと同じエネルギー $h\nu$ の光子で，光子の数が**減少する**ことになる．どのようにこうしたことが起こるのかをさらに詳しくしらべよう．そのために，図 1.3 のように実験の設定を改善する．ここで，光の強度はとても弱く，かつ検出器の動作が十分速く，個別の光子を記録できるとする．個別の光子の到着は，上または下の検出器が反応するかに応じて，テープ上にそれぞれ + あるいは − と印刷されて記録されるようになっている．実験すると，一連の + と − は**ランダム**に出現しているように見える．印の個数 N_+ と N_- が多くなるにつれて，それぞれに対応した**確率**，すなわち，比率 $N_+/(N_+ + N_-)$ および $N_-/(N_+ + N_-)$ が，ある極限に近づくことがわかるであろう．その極限値が，$\cos^2\alpha$ と $\sin^2\alpha$ である．経験的に，この現象が量子論によっても説明でき，そしてさらにこれが古典論の結果とも一致していることがわかった．こうしたことすべては，非常に満足すべき事柄である．他方，私たちが**個別の事象**を考えるとき，次の印字が + であるか − であるか，予測することができない．特定の光子が，なぜ一方の道を通って他方の道筋を通らなかったのかの説明は一切ない．私たちは，ただ**確率**について述べることができるだけである．

偏光が光子からできており，そして光子は分割できない実体であるという考えを一

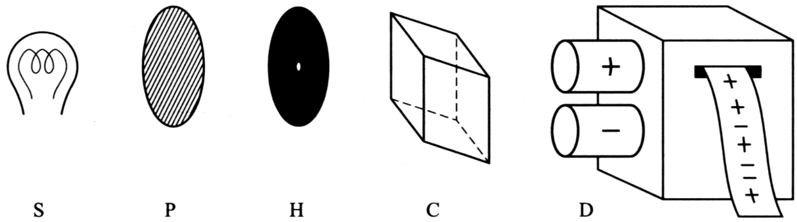


図 1.3 熱源 S からの光が，偏光板 P，小さな穴 H，方解石結晶 C，と通過すると，検出器 D の一つを鳴らす．検出器は結果を印刷する装置に出力を記録する．

度受け入れるなら，物理学はいままでと同じではありえない．乱雑性が基本的な要素になる．偶然が，物理的ふるまいの本質的特徴の地位に高められなくてはならなくなったのである[*7]．

演習問題 1.1 z 軸方向を向く波数ベクトル $\mathbf{k}$ をもち，初期には x 軸方向に沿って直線偏光している光子線を考えよう．これらの光子は，N 個の連続した，同一の方解石の結晶を通過する．ただし，方解石は，順に傾きを増している．つまり，m 番目 $(m = 1, \cdots, N)$ の結晶の光学軸の方向 $\mathbf{O}$ が，上述の固定した座標系に対して，$O_x = \sin(\pi m/2N)$ および $O_y = \cos(\pi m/2N)$ で与えられている．このとき，2^N 本の光線が結晶から出て来ることを示せ．それらの偏光はどうなっているか．さらに，$N \to \infty$ の極限で，出てくる光は，すべて y 軸方向に沿って直線偏光している光線になっていることを示せ． ⋆

演習問題 1.2 前出の演習問題の結果を，初期に任意の方向に直線偏光している光子の場合に一般化せよ．

1.3 偏 極 光 子

図 1.3 の実験では，方解石結晶の厚みが十分あって，外に出て来るそれぞれの光線が光線自身の幅以上離れて，お互いを分離できるとした．もし結晶をどんどん薄くして，出てくる光線どうしが部分的に重なり合うようになったら，どうなるであろうか? 古典電磁気の理論では答は簡単である．光線の別々に進んでいる (部分的に重なり合っていない) 部分で，電場は，正常光に対して，

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x \cos(kz - \omega t + \delta_x) \tag{1.1}$$

そして異常光に対して，

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y \cos(kz - \omega t + \delta_y) \tag{1.2}$$

[*7] ところで，この主張は，現段階ではまだ証明されていない．実際，後の 6 章でわかるように，偏極光子のような単純な系に対しては，“隠れた” 変数を追加導入することによって決定論を回復できる．ただし，その “隠れた” 変数は統計学的に扱われる．しかしながら，こうしたやり方は，もっと複雑な系に対して，深刻な困難を生み出してしまう．

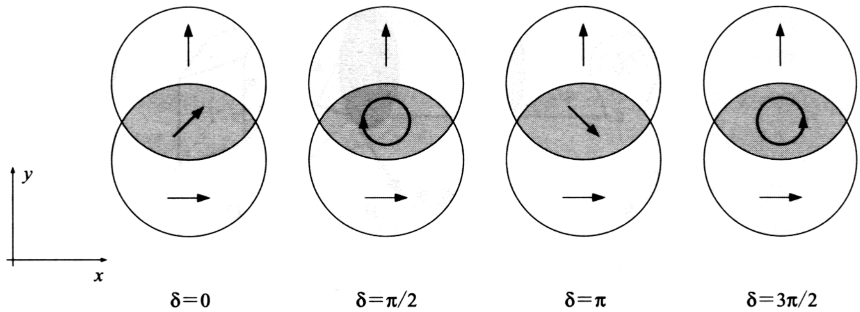


図 1.4　直交する方向に偏光した 2 本の光線が重なり合っている状況．簡単のため，光線はくっきりした境界線で描かれ，2 光線は等しい強度，境界線内部では一様強度分布をもつとしよう．位相差 δ に応じて，重なり合っている部分で，直線偏光，円偏光，または一般的に楕円偏光の光子となる．

となっている．ここで，座標軸は図 1.2 のように選んである．$\mathbf{E}_x$ と $\mathbf{E}_y$ は，x および y 方向を向くベクトルで，そして δ_x と δ_y は，複屈折結晶を通過するにさいの，正常光および異常光それぞれの位相のずれである．いまの場合，光線の重なりのない部分では，光子はそれぞれ x および y 方向に**直線偏光**しているという．

光線どうしが重なり合っている部分については，古典電磁気の理論から，次式が得られる．

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x \cos(kz - \omega t + \delta_x) + \mathbf{E}_y \cos(kz - \omega t + \delta_y) \tag{1.3}$$

任意の $\delta = \delta_x - \delta_y$ に対して，この結果は**楕円偏光**とよばれる．[座標 z を決めたところで，ベクトル $\mathbf{E}(t)$ によって描かれる軌跡が楕円となっている.] これが最も一般的種類の偏光である．$\delta = \pm\pi/2$ かつ $|\mathbf{E}_x| = |\mathbf{E}_y|$ という特別な場合，**円偏光**になる．また，$\delta = 2\pi n$ (n は整数) では，光線どうしが重なり合った部分でも，$\mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$ 方向の直線偏光となり，入射光線と同じである．このことは，特に結晶の厚みが 0 に近づいて，δ_x と δ_y の両方が 0 になるときに当てはまる (図 1.4 参照).

光線どうしが重なり合っている部分を，光子という言葉でどのように記述したらよいのだろうか? 結晶の厚さをゼロにする極限では，当然入射光と同じ性質をもった直線偏光になっているはずである．この状況はまた，$\delta = 2\pi n$ ならばいつでも成り立っていなければならない．このとき，光子はもとの $\mathbf{E}$ の方向に直線偏光している．決して，x と y 方向別々に直線偏光した光子の混合が得られるのではない．もし，このことがあやしいと思うなら[*8]，二つ目の (厚い) 結晶を偏光分析装置として準備すれば，これを試すことができる．二つ目の (厚い) 結晶から出てくる光線の強度は，$\cos^2\alpha$ と $\sin^2\alpha$ のようにふるまうであろう．そしてこれは，ちょうどもとの入射光線が直接二つ目の (厚い) 結晶を通過したときの結果と同じである．

[*8] 読者は，実験事実によって支持されていない，そうしたたぐいのいかなる主張にも疑いをもつべきである．6 章で，直観的に明白で，間違いないと見える仮定でも実験的に間違っていることがあるという例に出くわすであろう．

式 (1.3) で表せる一般的な場合にも，同様に，重なり合う光線で**楕円偏極光子**が得られる．くどいようだがこの場合も直線偏極光子の混合ではないことを注意しておく．$|\mathbf{E}_x| = |\mathbf{E}_y|$ かつ $\delta = \pm\pi/2$ の特別な場合には，**円偏極光子**となる．円偏極光子をつくりたければ，光学軸が $\mathbf{k}$ と垂直になり，かつ $\mathbf{E}$ との角度が 45° になるように (その結果，図 1.2 で $E_x = E_y$ となるわけであるが) 1/4 波長板 (a quarter wave plate)(略して qwp) を置けばよい．逆に，もし円偏光が qwp に入射すれば，qwp の光学軸に対して $\pm 45°$ の角度の方向の直線偏光になる．ここで $\pm$ の符号は，円偏光のヘリシティ，すなわち，ベクトル $\mathbf{E}(t)$ が時計回りに回るか，あるいは反時計回りに回るかによる．

演習問題 1.3　与えられた直線偏極光子を，与えられた楕円偏極光子 (つまり，δ と $|E_x/E_y|$ が特定の値をとなるよう) に変換する光学装置を設計せよ．　⋆

演習問題 1.4　順に，一つの qwp，次にその光学軸と 45° に光学軸がなるように置かれた厚い方解石の結晶，そしてさらにその後に一つ目の qwp に垂直に置かれた二つ目の qwp からなる装置は，円偏光**選択装置**となっていることを示せ．円偏光入射光子は，もとの円偏光でそこを通過して出てくるが，ヘリシティに応じて，2 本の別々の光線となる．もしも，二つの qwp の光学軸を直交させるのではなく，平行にしたらどうなるか?　⋆

演習問題 1.5　前出の演習問題の装置と似た楕円偏光選択装置を考案せよ．つまり，入ってきたすべての光子は，出でくる 2 本の光線のどちらか一つに属し，もし入射光子が特定の楕円偏光 (特定の δ と $|E_x/E_y|$) であれば，常に上の光線に属し，初期の偏光を保っている．(その光子が再びもう一つ別の同様な選択装置を続いて通過させられたら，やはり上の光線に属して出てくることを意味する.) 同じように，最初の選択装置を下の光線に属して出てくる光子が，引き続き同じ選択装置を通過するさい，やはり下の光線に属し出てくる．下の光線の光子の偏光はどうなっているか?　⋆

解答：それらは，$|E_x/E_y|$ が逆数になり，$e^{i\delta}$ が逆符号をもっている．(こうした二つの楕円偏光は，互いに**直交**しているといわれる.)

演習問題 1.6　演習問題 1.3 で出された系のデザインを変更して，もし二つの互いに直交する直線偏光をもつ光子が入射したら，二つの互いに直交する (演習問題 1.5 の定義を参照) 楕円偏極光子が現れるようにせよ．こうした要求は，そのシステムの光学的性質を完全に規定してしまうか?　⋆

解答：そうでなく，位相因子はまだ任意で残っている．

演習問題 1.7　未知の光源から出てくる，1 個 1 個の楕円偏極光子ごとの偏光パラメータ δ と $|E_x/E_y|$ を測定する装置を考案せよ．　**ヒント**：最初に，単純な場合 $\delta = 0$，すなわち直線偏光とわかっている場合を試してみよ．その場合は，偏光の方向だけが未知である．1 個の光子に対して，どのようにその方向を決定するであろうか?

1.4 量子言語の導入

読者諸君は演習問題 1.7 を解いたであろうか? この演習問題はぜひ解いてほしい．1 個 1 個の光子の偏光パラメータを測定する装置は**存在しえない**ことを完全に納得するまで，諦めないでほしい.「その光子の偏光状態はどうなっているか?」という質問に答えることはできないし，また意味がない．上述したような装置で，実験的に答えられる意味のある質問は，ある光子が**特定の**偏光をしているかいないかである．これらの二つの質問の間の相違は本質的である．幾何学の類似の助けを借りると，このことを良く理解することができよう.「この点はどの単位立方体の中にあるか?」のような質問は，明らかに無意味である．意味ある質問は，ある点が**特定の**単位立方体の中にあるかどうかである．1 点は，ある立方体の内部にありえるし，さらにまた別のある立方体の内部にもありえる．こうしたことは，これらの二つの立方体が部分的に重なり合っていれば，起こりうる．

光子の偏光に対する似たような "重なり合い" の性質は次の通りである．1 光子が，x 軸に対して角度 α をなす直線偏光の状態で準備されており，そして次に，それが x 軸自身に沿って偏光しているかどうか実験してみよう．実験結果は，それを肯定するかもしれない．このことは，実際 $\cos^2\alpha$ の確率で起こるだろう．そこで，もし**特定の**偏光をした光子の集団が準備され，それらの偏光が何であるか明らかにされないまま，次々に送られてきても，あらかじめつくられている記録と合致するように，0° から 10°，10° から 20° のようにこれらの光子を分類する手段を与えてくれるいかなる装置も存在しない．要約すると，莫大な数の光子を含んでいる**古典**電磁波の偏光パラメーター δ および $|E_x/E_y|$ を十分良い精度で測定することは**可能**であるのに対して，未知の光源からの一つの光子のそれらを測ることは**基本的に不可能**である．(同じ条件で準備された有限個の光子の場合は，2 章末で論じられる.)

"物理的な実在" という**概念**は，量子現象に関して新たな意味を獲得し，それは古典物理学での意味と異なっている．したがって，私たちには**新しい言語**が必要だ．私たちは依然として日常の生活で使用している言葉，たとえば "測定する" のように，と同じ言葉を使うが，言葉の意味は異なるのである．これは，特殊相対性理論でニュートン力学から借用された時間，質量，エネルギーなどのような言葉を使用している状況に似ている．相対性理論では，これらの言葉は，ニュートン力学で使われたものと異なる意味をもっているし，文法的には正しい言葉の並び，たとえば「これらの事象が異なった場所で同時に起きた」が**無意味**になることもある．

ここで量子世界を記述する新しい言語と，その言語を使うための文法を開発しよう．本書の最初の数章で述べる物理世界は，きわめて単純化された (後の章ではもっと洗練される) モデルである．その対象は二つの明確な分類から成り立っている．一つは古典的用語で記述される巨視的対象 (たとえば，実験室の機器カタログにのっているようなもの) で，もう一つは微視的対象 (たとえば，光子，電子など) である．後で明らかになるように，後者は状態ベクトルとそれに関連した手続きによって表される．こ

のように対象を二分することは，ボーア[*9]によって繰り返し力説された．

> しかし，[量子] 現象が古典物理解釈の範囲からいかに隔たっていようとも，すべての証拠の記述は古典物理の用語で表現されなくてはなりません．そのさいは単に，私たちが行ったことや学んだことを他の人たちに“実験”という言葉で伝えるのです．それゆえに，実験の設定の説明や観察の諸結果は，古典の物理学の用語をきちんと適用した形で，曖昧さのない言語で表現されなければなりません．

この点を力説するのに，ボーアは架空の測定器のイラストをよく描いた．それは堅い支持台に固くねじで締められた，丈夫な歯車をもつ頑丈な時計のようなものであった(2ページの図版 I を参照)．このイラストの伝えるメッセージは明白である．このような巨視的測定器は普通の機械部品で構成され，その動作は通常の力学で完璧に説明され，そして，特に，時計は，その針の位置を単に**観察する**ことだけでは影響を受けることがないという事実をはっきりと描き出していたのだ．

ボーアは決して微視的系と巨視的系に異なった物理法則を適用すべきだ主張したのではない．この点は誤解してはいけない．彼はただ2組の対象に対して，異なった**記述の様式**を使うことの必要性を強く説いただけである．ただし，こうしたアプローチが，完全に満足すべきものではないということは認識しておかなければならない．ある組の物理現象を記述するのに特定の言語を使用するということは，その言語の基礎となっている理論が，良い近似で有効であるということを暗黙のうちに承認しているのである．これは難しい問題を提起する．私たちは (正確と推定される) 微視的理論を，DNA 分子のような中間的大きさの対象に拡張しようとする可能性もある．究極的には，多次元空間のとてつもなく複雑なベクトルによって記述される莫大な数の微視的実体がどのように結合し，古典的性質を有する巨視的実体を形成するかを説明しなくてならない．こうした問題は 12 章で論じる．

幾何学との類似

その起源が古く，現在では確立された科学である初等ユークリッド幾何学では，最初に公理によって関連づけられる抽象的概念 (たとえば，点，直線，$\cdots$) が導入される．たとえば，直線は2点によって定義される．直観的には，これらの抽象概念は，私たちにお馴染みの対象と結び付いていて，“直線”とよばれているインクの長い狭い筋を，このような抽象概念と同一視することが，ユークリッドの幾何学を物理理論の地位に高めるのであり，その物理理論を実験で検証することができる．たとえば，適当な道具を用いて，三角形の角の和が 180° であるかどうかしらべることができる．ガウスは実際に 1821 から 1823 年にかけて，ハノーバー王国の測量を委任されていたかたわら，この実験を行った[*10]．自分の測量機器で，彼は，観測の精度の範囲で，空間が

[*9] N. Bohr, in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, ed. by P. A. Schilpp, Library of Living Philosophers, Evanston (1949), p. 209.
[*10] C. F. Gauss, *Werke*, Teubner, Leipzig (1903) vol. 9, pp. 299–319.

ユークリッド的であることを見いだした．(少なくとも，それはハノーバー王国程度の距離内においてはユークリッド的であった.) しかしながら，これはユークリッドの公理に対する検証にはなっていなかった．ガウスの実験は，**光線の物理特性**を検証したのであり，ただ光線が直線という抽象概念を満足すべき程度に実現していることを確認できただけである．百年後に，重力のアインシュタイン理論の精密な天文学的検証によって，光線は質量の大きな物体によって曲げられる，言い換えれば，光線がユークリッド幾何学の直線を忠実に実現していないことが示された．実際には，いかなる物質も正確にこうした理想的直線を再現はできない．にもかかわらず，ユークリッド幾何学は現実世界での**近似**計算に役立っている．同様に，現実の実験室の装置は，量子論の架空の装置を**近似的に再現**できるだけであることがわかるだろう．

準 備 と 検 証

実験室にいる物理学者*11を観察してみよう．彼は異なった2種類の作業を行っているようだ．その2種類の作業は，**準備**と**検証**とよばれる．こうした準備と検証は，原始的で，明確に定義されていない量子理論の概念であり，ユークリッド幾何学の公理における点と直線のようなものである．それらの直観的な意味を次に説明しよう．

準備とは，良い料理の本に載っている調理法のように，完全に規定されている実験手順である．たとえば，図1.3の左半分に描かれている機器が，準備を表している．準備の規則はなるべく曖昧さがないようにすべきだが，熱的ゆらぎのような確率過程は含んでも**よい**．ただし，その過程の統計上の特性が既知であるか，少なくとも再現可能であるという条件下である．

検証は準備とはじめは同じだが，**観測者**に (すなわち，実験を行っている物理学者に) それ以前に未知であった**情報**が与えられるという最終段階をも含む．たとえば，図1.3の右半分は一連の検証を表しており，結果として得られる情報はテープの上に印刷されたものである．この情報は自明でない，なぜなら，その図からわかるように，同一の準備の後の検証で同一の結果を与えるわけではないからである．

準備は，通常特定の結果の**選択**を伴う検証を含んでいることに注意しよう．たとえば，質量分析器は，入ってくる様々な粒子の質量を測定して，望ましい性質をもつものを選択することによって，ある特定のタイプの粒子を準備することができる．

前述の文章では言葉を何となく使ってきたが，準備とか検証ということをきちんと定義していない．そうするには**情報**という概念や**未知/既知**などの用語をあらかじめ定義しておく必要があろう．準備と検証の間の差異が，時間の流れの向きに関係していることは自明である．過去と未来の間の非対称性は，量子論の公理論的構造において

*11 本書では，しばしば，量子系を準備し，観測するような様々な実験場の仕事を実行する人々を“物理学者”とよぶ．彼らは，特殊相対性理論のいたるところに登場し，光の信号を送受信する“観察者”の役割を演じる．もちろん，この用語は人間の実在を意味するわけではない．こうした架空の物理学者は，適切にプログラムされていれば，要求される作業を全部行うことができる生命のない自動装置でもかまわない．また，簡単のため，今後いろいろな場所で，“彼”という言葉を使うが，これは特に男性または人間を意味するわけではない．

本質的である．それは，特殊相対性理論における過去光円錐と未来光円錐の間の基本的非対称に類似している．基礎の力学法則が時間反転の下で不変である[*12]ので，これらの非対称性が何かパラドックスを生み出す可能性がある．しかしながら，ここに真の矛盾はない．なぜなら，現段階の論議では，私たちは準備と検証に対する，あるいは信号の放出と検出に対する**力学的記述**をまだ準備していないからである．これらの作業を行う巨視的装置は，現段階では未解決と考えられる．それゆえに，時間反転不変性は，ちょうど時間に依存する外力が存在する初等的問題でそうであるように，失われていることになる．本書の最後の章で，こうしたアプローチを洗練し，巨視的装置を力学的実体として捉えられるようにしよう．そのとき，時間の流れにおける非対称 (準備と検証の不可逆性) は，古典統計力学の不可逆性に類似した論拠によって説明される．

私たちが準備と検証を自由に**選択**できることを注意しておく．ボーアが述べているように[*13]，「測定器具を自由に扱えるということが，まさしく実験という考えの特性である.」私たちは相互に**相いれない**検証 のありうる結果を考えてもかまわないのだ．(次節で例をあげる.) しかしながら，私たちの自由意志はここで止まる．私たちは，(ただ一つの結果だけを出す自明な検証でない限り) 検証の未来の結果を自由に選択することはできない．

さて，量子論の範疇を明確にしておこう．

> 厳格な意味で，量子論は，規定された準備に続く検証結果に対する**確率**を計算できるようにする規則の体系である．

ここで，確率とは通常のように定義されている．まったく同じ準備が多数回繰り返されるなら，特定の結果の起こる**確率**とは，その**相対頻度**である，つまり，全試行回数に対するその結果が起こる回数の比の極限 (それらの回数が無限回になるとして) である．この比は，もし私たちが**同一の準備** を繰り返すなら，ある極限に近づか**なければならない**．(これが "同一" の意味である.)

量子論の上記の厳密な定義 (巨視的事象の確率を計算するための規則体系) は，量子論を実際に用いている多くの物理学者が理解している方法とは異なっている．むしろ彼らは，量子論を微視的対象の性質，たとえば原子や原子核のエネルギー準位や衝突断面積の計算のために用いるというであろう．また，量子論は固体の比熱や金属の電気伝導度など，物質のいくつかの性質を (巨視的特性が微視的構成粒子の性質から導かれる限り)，説明できる．こうした確固とした成功にもかかわらず，量子論の認識論上の意味は，論争に満ちている．たぶんそれは，量子論がお馴染みの言葉に違う意味が与えられて定式化されているためであろう．これらの微視的対象 (電子，光子など) は本当に存在するのか，あるいは普通の直観が無力となる状況で，直観的なモデルをつくることによって，私たちの推論を助けるために導入される便利な架空のものなの

---

*12 K^0 粒子崩壊のようなまれな現象は巨視的時間の非対称の原因とはなりえない．また，宇宙の膨張が，孤立している実験室の局所的現象における時間の非対称を説明することもできない．

*13 N. Bohr, *Phys. Rev.* 48 (1935) 696.

か? 私は本書中で，後にそれらの微視的対象はある意味で“存在する”が，状況によって，それらの存在は非常にわかりにくいということを示すことになる[*14].

1.5　測定とは何か?

科学は自然の観察にもとづいている．科学者の多くは，完全にはわからなくても客観的な実在が存在すると信じる傾向がある．私たちは**測定**という手段によって，この実在についての知識を獲得している．この測定はいろいろな過程を含み，そこでは装置が研究対象の物理系と，その系のある性質が装置の性質に影響を与えるように相互作用する．装置と系の間の相互作用は**不可欠**なので，系の一つの性質を測定することは必然的に系のその他の性質のいくつかを乱す．このことは，12.2 節でわかるように，古典物理学においても当てはまる．しかしながら，古典物理学では，測定装置が観測されている系と相互作用する前に，測定される性質は客観的に**存在している**ことを前提としている．

他方，量子物理学は，あらかじめ存在する未知量が測定によって明らかになるという前提とは両立できない．たとえば，歴史的なシュテルン–ゲルラッハの実験[*15]を考えてみよう．その模式図を図 1.5 に示す．この実験の目的は，不均一磁場で中性原子の運動方向が曲げられることを測定することによって，原子の磁気モーメントを決定することであった．シュテルンとゲルラッハが 1922 年に行ったように，**古典**力学にもとづいて，そうした原子の軌道を計算してみよう．(この計算の細部に興味のない読者は，次を飛ばしてかまわない.) 原子のハミルトニアンは

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \tag{1.4}$$

であり，ここで，m は原子の質量，$\mathbf{p}$ はその運動量，$\boldsymbol{\mu}$ はその固有磁気モーメントである．もし磁気モーメントがある対称軸のまわりの何らかの内部回転運動に由来するなら，$\boldsymbol{\mu} = g\mathbf{S}$ となる．$\mathbf{S}$ は原子の重心のまわりの角運動量であり，g は定数 (磁気回転比) で，回転軸のまわりの質量と電荷分布に依存する．磁場 $\mathbf{B}$ は 原子の重心の位置 $\mathbf{r}$ の関数である．(原子の大きさにわたる $\mathbf{B}$ の変動は，完全に無視できるとした.)

古典運動方程式はポアソン括弧式から次のように得られる．

$$\dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{r}, H]_{\mathrm{PB}} = \mathbf{p}/m \tag{1.5}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, H]_{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) \tag{1.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = [\boldsymbol{\mu}, H]_{\mathrm{PB}} = g(\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}) \tag{1.7}$$

最後の式は，$[S_x, S_y]_{\mathrm{PB}} = S_z$ およびその循環から導かれる．内部の変数 $\mathbf{S}$ と，重心変数 $\mathbf{r}$ および $\mathbf{p}$ とのポアソン括弧式はゼロとなることに注意しよう．

[*14] この本の初期の草稿では，フロイト的誤植があった．つまり“わかりにくい”(elusive) というかわりに“架空の”(illusive) となっていた．

[*15] W. Gerlach and O. Stern, *Z. Phys.* 8 (1922) 110; 9 (1922) 349.

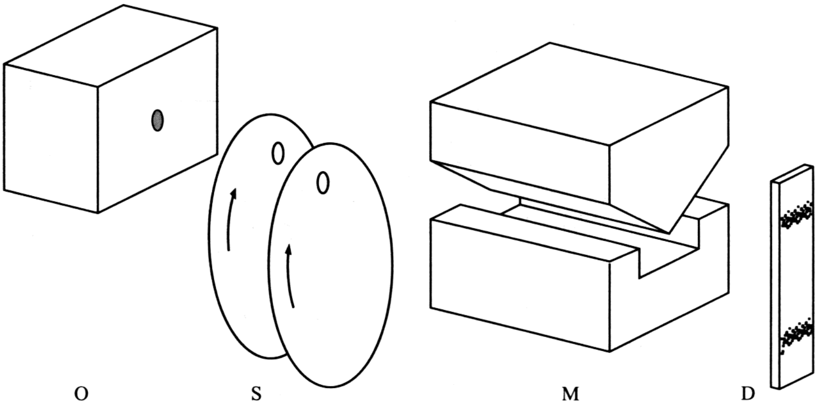


図 1.5　理想化されたシュテルン–ゲルラッハ実験．銀原子がオーブン O で蒸発し，速度選別装置 S，非一様磁場をつくる磁石 M を通り抜け，検出器 D に当たる．衝突する場所は二つの狭い帯状の場所に限られる．

式 (1.7) は，$\boldsymbol{\mu}$ が $\mathbf{B}$ 方向のまわりに歳差運動をしていることを意味している．この方向は，空間で一定ではありえない，なぜならマクスウェルの方程式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$ を破ってしまうからである．しかし，磁石間の隙間での $\mathbf{B}$ の**平均値** $\overline{\mathbf{B}}$ がその隙間での $\mathbf{B}$ の**変動**よりずっと大きく，しかも原子が磁石を通過する時間が歳差時間 $2\pi/gB$ よりずっと長いという条件が満たされれば，式 (1.7) を近似的に解くことができる．もしこれらの条件が成り立てば，原子は $\overline{\mathbf{B}}$ のまわりを何度も歳差運動する結果，**時間平均**して，$\overline{\mathbf{B}}$ に直交する $\boldsymbol{\mu}$ の成分を無視できる．単位ベクトル $\mathbf{e}_1$ と定数 B を用いて，$\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{e}_1B$ と書こう．すると式 (1.7) から $\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{e}_1$ が一定であることが導かれ，**時間平均**して，$\boldsymbol{\mu}$ は $\mu_1\mathbf{e}_1$ で置き換えられる．ここで

$$\mu_1 := \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{e}_1 \tag{1.8}$$

である．(記号 := は，“右辺で定義される” という意味である.) 式 (1.6) から，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{p}) = \mu_1 B' \tag{1.9}$$

が導かれ，$B' := (\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{B})$ は磁石の構造にのみ依存する．

力 (1.6) は，時間 L/v の間作用している (v は原子の縦方向速度，L は磁石の長さ)．この力が原子に与えた横方向運動量は $\mu_1B'L/v$ で，原子の偏向角度は，$E=\frac{1}{2}mv^2$ を使用して，$\mu_1B'L/2E$ となる．μ_1 以外のここに現れるすべての量は，巨視的実験設定 (熱したイオン源，速度選別装置，磁石など) で決定されていて，特定の実験では固定されている．ゲルラッハとシュテルン*15が発見した驚くべき結果は，μ_1 が $\pm\mu$ という**二つの値のみ**をとることができるということだった．

古典物理学の見地からすると，この結果はとてもびっくりするものだった．なぜならゲルラッハとシュテルンは，違った方向に磁石の向きをとることもできたのである．たとえば図 1.6 に示されているように，$\mathbf{e}_1$ と $\pm120°$ の角度をなす $\mathbf{e}_2$ と $\mathbf{e}_3$ 方向にで

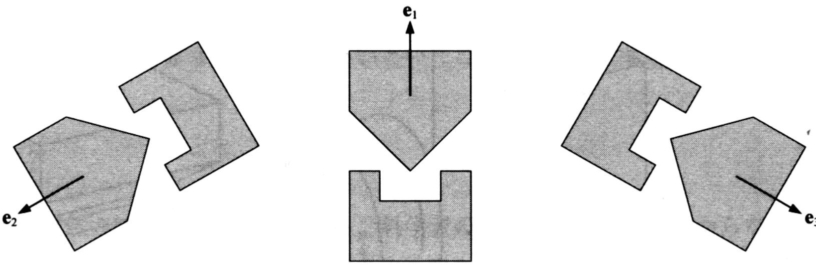


図 1.6　シュテルン–ゲルラッハ磁石の，お互いどうし 120° の角度をなす，可能な 3 方向．三つの単位ベクトル $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ と $\mathbf{e}_3$ は足すとゼロになる．

ある．そうすれば，彼らはそれぞれ

$$\mu_2 = \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{e}_2 \qquad \text{または} \qquad \mu_3 = \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{e}_3 \tag{1.10}$$

という測定結果を得ただろう．単に磁石を回転させることで物理法則が影響をうけるわけはないので，彼らは，同様にして，$\mu_2 = \pm\mu$ あるいは $\mu_3 = \pm\mu$ となることを見いだすだろう．しかし，式 (1.8) と (1.10) の和をとると，これは明らかに矛盾する．すなわち，

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \boldsymbol{\mu}\cdot(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) \equiv 0 \tag{1.11}$$

明らかに，μ_1，μ_2 および μ_3 すべてが $\pm\mu$ に等しくならないし，全部を足してゼロにもなりえない．

もちろん，このようにして**同じ**原子の μ_1，μ_2 および μ_3 の値を測ることはできない．磁石は三つの配置のどれか一つだけをとることができる．ここでは“量子不確定性”を持ち出すには及ばない．これは，図 1.6 で描かれている実験に固有なものであり，純粋に古典的意味ではまったく不可能なことなのだ．(量子論によってわかることは，磁気モーメントを測定するこの特殊な実験方法の欠陥ではなく，どんな実験も μ_1，μ_2 および μ_3 を同時に決定はできないということである.) しかしながら，たとえ図 1.6 の 3 通りの実験設定が**相いれない**としても，μ_1 のかわりに μ_2 あるいは μ_3 を測定することは可能である[*16]．このように，私たちは“測定”という単語を普通の意味，すなわち客観的なあらかじめ存在する実在についての知識の獲得という意味に解釈すると，矛盾に陥る．

> 矛盾は本質的なものである．私たちが**飛び飛びの**値を，**連続的に**回転可能なベクトルの成分と結び付けた途端に，これらの飛び飛びの値は，測定過程に依存しない“客観的な”ベクトル成分の意味をもつことはできない．

[*16] この**反実証論的**推論に不安を感じる読者がいるかもしれない．実行していない実験でも可能性のある結果を私たちが自由に想像できる一方で，式 (1.11) はそれ以上のことをいっている．それは，同時に**相いれない**三つの実験の結果を一緒にしている．紙に書かれた数学記号のせいぜい一つが実際に意味をもつ．そのとき，他の二つの記号は想像においてだけ存在している．その式はそもそも正しいのか? 私たちはそれから信頼に足る結論を引き出すことができるか? その上，式 (1.11) は，これらの三つの可能ではあるが，相いれない実験では，銀原子の磁気モーメントが同じ方向をもっていると仮定している．すなわち，磁石の方向を自由に選択しても，オーブンから蒸発する銀原子に影響はないはずだ．もしこれが明白であると思う読者は，6 章を読み終えるまで待とう．

測定とは，受け身で知識を獲得することではない．それは，通常不可逆な増幅機構を含む非常に複雑な装置を利用する能動的な過程である．(もし客観的で消失しない**記録**を望むなら，不可逆性は，偶然ではなく不可欠なものである．記録は，たとえその記録が示している“物理量”がそうでなくとも，客観的でなければならない．この点は，12 章で論じよう.) さらに，私たちは自分たちの装置が与えた実験結果を**解釈**しなければならない．私たちは，**理論的なモデル**をつくることによって，これを行う．そこでは，巨視的装置のふるまいが少数の自由度で記述され，観察されている微視的系と相互作用する．そのとき，これを微視的系の“測定”とよぶ．こうした手順からの論理的な帰結を，ケンブルはずっと前に導いている[*17]．

> 測定によって得られた物理量の数値とは別に，客観的に存在する物理量があるという考えの根拠は何一つありません．粒子は各瞬間ごとに未知であるが，適切に行えば測定できる定まった位置および運動量をもっていると考える理由は何もないのです．逆に，昔からある言語や哲学から移された概念を量子力学に持ち込むやいなや，私たちは矛盾の迷路に入り込むことになります．．．．あれやこれやの“物理量を測定”するというより，あれやこれやの“種類の測定を行う”といった方がより正確でしょう．

具体例として，再び図 1.5 のシュテルン–ゲルラッハの実験をとりあげよう．この実験に対応する理論的モデルは，式 (1.4) で与えられている．しらべられている微視的対象は，原子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ である．もっと正確にいえば，その μ_1 成分である．このモデルで，それが結合している巨視的自由度は，重心の位置 $\mathbf{r}$ である．($\mathbf{B}$ が $\mathbf{r}$ の関数であることによって，項 $\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$ からその結合が生じている.) いまこの自由度を**巨視的**とよぶのは，図 1.5 に描かれている検出器 (演習問題 1.8 を参照) のような巨視的手段で，異なった $\mathbf{r}$ の最終値を直接区別できるからである．ここから状況は単純になり，かつ曖昧さがなくなる．なぜなら私たちは巨視的世界を取り扱っているからである．検出器の種類とそれらの機能の細部は**重要でない**と見なされるからである．特定の検出器が励起されるときに起こる，はっきりと巨視的である事象を解釈する場合には，いかなる理論上のモデルも追加する必要はない．これらの検出器を使用するのは，実験者の便宜上，ただすでに実在する信号を増幅する都合だけにすぎない．

それでも，もしこうした解釈に疑問をもつなら，微視的世界と巨視的世界の間の任意の境界線を移動させてもよい．検出器内の多数の原子を観測されている系に追加して考え，それらのすべての自由度をハミルトニアンに含めて (これらの原子と原子線内の原子間の相互作用一切とともに)，そして全体を観察するより大きい装置を考えてもよい．もう一つ別の装置で検出器を観測する結果が，検出器自身を究極の装置と見なす場合と同じであれば，首尾一貫性していることになる．これが，実験の**客観的**記録があるという主張の意味である．物理学の役割は，これらの客観的記録の間の関係

[*17] E. C. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1937) [Dover よりリプリント版刊行] pp. 243–244.

をしらべることである．“間主観的であること”(intersubjectivity) という単語を好んで使う人もいる．その意味は，すべての観測者がどの特定な実験結果についても意見が一致することである．間主観的実在を超えて客観的 “実在” が存在するか否かは，興味深い哲学上の問題[*18]であるが，これは量子論の関わる事柄ではない．1.4 節の終りで説明したように，量子論は，厳密な意味で物理学者が巨視的検証した結果の確率を計算するための規則体系以外の何ものでもない．

演習問題 1.8　シュテルン–ゲルラッハの実験で，自由銀原子の波束の量子力学的広がりが無視できることを示せ．そのため，原子の磁気モーメントが外場と相互作用しない場合，重心の運動は，古典力学で扱って問題がないことになる．　**ヒント**：シュテルン–ゲルラッハの実験で，$\lambda = h/p$ およびコリメーターによって決定される絞り幅をもつ原子線の回折角はどうなっているか?

演習問題 1.9　シュテルン–ゲルラッハの計算を量子論の記号で書き直せ．すなわち，ポアソン括弧を交換関係に置き換え，$\mathbf{S}$ を 2×2 行列で表せ．式 (1.11) は，書き直してもなお成立するか? 古典論の議論は矛盾する．どこが悪いのか?

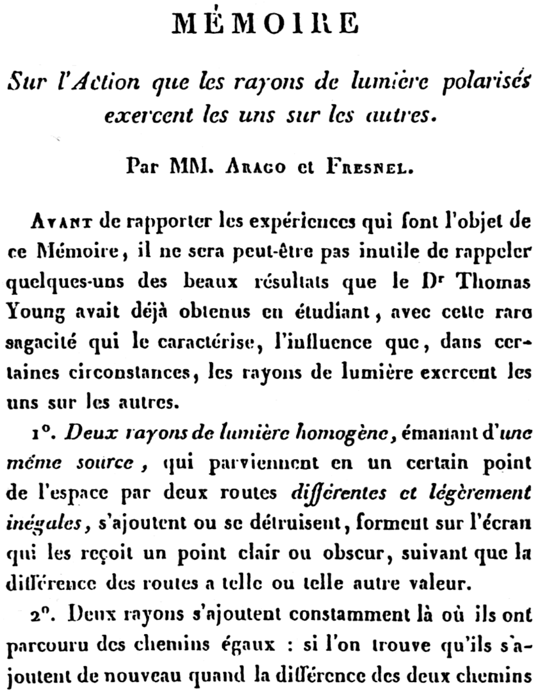
演習問題 1.10　スピン $S = \frac{3}{2}$ の粒子に対して，S_x，S_y および S_z はどんな値をとることができるか? これらの値を組み合わせて，${S_x}^2 + {S_y}^2 + {S_z}^2 = S(S+1)$ とすることができるか?

1.6　歴史的背景に関する注

偏光の干渉性は，19 世紀の早い時期に，アラゴとフレネル[*19]によって発見された (図 1.7)．マクスウェルの何十年も前に，図 1.4 の現象は知られていた．それゆえ，光が不連続の，分割できない実体であることがプランク[*1]とアインシュタイン[*2]の研究から明らかになった 1905 年にはもう古典決定論の危機が勃発しても不思議ではなかった．しかし当時，誰もこれらの困難を心配していなかった．なぜなら他にあまりに多くの事実が説明されていなかったからである．スペクトル線の周波数やその強度を計算する方法は誰も知らなかった．実際，なぜ原子が安定なのか，そしてそもそも存在しうるのか誰も理解できなかった．

進歩はゆっくりしたものだった．最初に，“前期” 量子論が登場した．1913 年に，ボーア[*20]が，安定した電子の軌道は，角運動量が $h/2\pi$ の整数倍に限られることを提案した．もともと熱放射の性質を説明するのに導入されたプランク定数 h が，原子の力学的性質にも関連していることを見いだしたのである．ボーアの**アド・ホック**な(特別な)仮説は，最も単純な原子である水素原子のエネルギー準位を正確に与えたが，残念ながら，次に単純な原子，ヘリウム原子では失敗してしまった．

[*18] B. d'Espagnat, *Une incertaine réalité*, Bordas, Paris (1985); 英訳：*Reality and the Physicist* , Cambridge Univ. Press (1989).
[*19] F. Arago and A. Fresnel, *Ann. de Chimie et Physique* 10 (1819) 288. ff
[*20] N. Bohr, *Phil. Mag.* 26 (1913) 1, 476, 857.



MÉMOIRE

Sur l'Action que les rayons de lumière polarisés exercent les uns sur les autres.

Par MM. Arago et Fresnel.

Avant de rapporter les expériences qui ſont l'objet de ce Mémoire, il ne sera peut-être pas inutile de rappeler quelques-uns des beaux résultats que le Dr Thomas Young avait déjà obtenus en étudiant, avec cette rare sagacité qui le caractérise, l'influence que, dans certaines circonstances, les rayons de lumière exercent les uns sur les autres.

1°. *Deux rayons de lumière homogène*, émanant d'*une même source*, qui parviennent en un certain point de l'espace par deux routes *différentes et légèrement inégales*, s'ajoutent ou se détruisent, forment sur l'écran qui les reçoit un point clair ou obscur, suivant que la différence des routes a telle ou telle autre valeur.

2°. Deux rayons s'ajoutent constamment là où ils ont parcouru des chemins égaux : si l'on trouve qu'ils s'ajoutent de nouveau quand la différence des deux chemins

図 1.7 偏光の干渉性に関するアラゴとフレネルの歴史的論文は,「すでにトーマス・ヤング博士によって得られた光線の干渉性に関する美しい諸結果」を想起する文章で始まっている.

演習問題 1.11 ヘリウム原子に対するボーアのモデルは，静止した点状の原子核のまわりの一つの円軌道上を，二つの電子が直径で結ばれた完全に反対の点に位置しながら，回転運動するというものである．それぞれの電子の角運動量が $\hbar$ であるという条件から，最低エネルギー準位を求めよ．その結果をヘリウム原子のイオン化エネルギーの実験値と比較してみよ．

ボーア仮説は，ウィルソン*21とゾンマーフェルト*22によっていくつかの自由度に変数分離可能な力学系に一般化され，さらにアインシュタイン*23によって，変数分離可能ではないが，可積分な系へと一般化された．しかしながら，原子の散乱あるいは分子を形成するさいの原子間の相互作用といった，もっと一般的な非周期的現象は，手を付けられないままであった．

さらなる進展は，ド・ブロイ*24に負っていた．1924 年に提出された彼の博士論文は，実質的にはアインシュタインが光電効果を説明するために 1905 年に提言していた仮説と対をなすものであった．ただ，そこでは単に電磁波に粒子性が与えられたば

*21 W. Wilson, *Phil. Mag.* 29 (1915) 795.
*22 A. Sommerfeld, *Ann. Physik* 51 (1916) 1.
*23 A. Einstein, *Verh. Deut. Phys. Gesell.* 19 (1917) 82.
*24 L. de Broglie, *Ann. Physique (10)* 3 (1925) 22.

かりでなく，電子のような物質粒子も波動的ふるまいを示す．関係式 $p = h/\lambda$ は普遍的に成り立ち，ボーアの角運動量条件は，単に電子軌道の長さが電子波長の整数倍となることを意味していた．この自然に対する統一見解は，審美的には魅力的だったが，まだ一貫した理論と見なすことはできなかった．

翌年，ハイゼンベルク[*25]が "行列力学" を発明した．その方法で，エネルギー準位は無限行列の固有値として得られる．ランチョス[*26]は，ハイゼンベルクの無限行列が特異積分として表せることを示して，その固有値がエネルギー準位の逆数となるような積分方程式を導くことができた．しかし，ランチョスの仕事はほとんど関心をひく間もなく，エネルギー準位が微分演算子 (積分演算子よりはるかに使いやすい) の固有値であるというシュレーディンガーの "波動力学" にとってかわられた．ド・ブロイの仕事を研究して自分の理論に到達したシュレーディンガーは，また彼の方法とハイゼンベルクの方法が数学的に等価であることを証明した[*27]．

"新しい" 量子論は量子力学として知られ，非常に急速に発展した．その中の重要な貢献では，ボルンとヨルダン[*28]によるものもあるが，特にディラック[*29]が電子に対する相対論的波動方程式の導出に成功したことは大きい．量子力学は曖昧ではなく，数学的に首尾一貫していた．それが，水素原子の性質だけでなく，ヘリウム原子の性質を (原理的には，どんな原子・分子でもポテンシャルがわかっていればどんなものでも) 計算できるようにしたのである．それは，光子が方解石結晶中のどちらの道を通るかの**確率**を正確に予言するが，1 個の光子を**特定**したとき，その光子の通る経路は予言できなかった．それゆえに，その理論は**本質的に統計的**であった．

この奇妙な性質に皆が満足したわけではない．特に，アインシュタインは不満足だった．彼は，量子力学の意味が統計的でしかありえないとはっきりと理解していた．彼は晩年に次のように記している[*30]．

> 統計解釈的な量子論が個々の物理系を完全に原理的に記述できるという主張は，とても信じがたい理論的概念です ⋯．あえてそうした考えを意識して貫き通そうとすれば，最終的には量子論の記述のこのような解釈 (ψ 関数は一つの系ではなく，系のアンサンブルを記述しているものとして理解すべきである) にきっと追い込まれるでしょう ⋯．しかしながら，このほとんど明白な解釈が敬遠されていることには，単純な心理上の理由があります．というのは，もし統計解釈の量子論が個別の系 (そしてその時間発展) を完全に記述してないとすると，別の完全な物理的記述を探さなくてはならないだろうから ⋯．完全な物理的記述を達成しようという努力が報われるとすれば，統計解釈的な量子論は，将来の物理学の枠組の中で，古典力学の枠組の中で統計力学がもっていたのとほぼ同じ地位をもつことになるで

[*25] W. Heisenberg, *Z. Phys.* 33 (1925) 879.
[*26] K. Lanczos, *Z. Phys.* 35 (1926) 812.
[*27] E. Schrödinger, *Ann. Physik* 79 (1926) 361, 489, 734.
[*28] M. Born and P. Jordan, *Z. Phys.* 34 (1925) 858. ff
[*29] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* 117(1928) 610.
[*30] A. Einstein, in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist,* ed. by P. A. Schilpp, Library of Living Philosophers, Evanston(1949), pp. 671–672.

しょう．私はどちらかというと，理論物理学の発展とはそういうものだと固く信じています．でも，その道のりは長く，困難なものと思います．

量子力学の誕生以来，多数の理論家が，新たな古典的決定論を取り戻すべく，量子波動関数が追加データによって補われるという形の，“隠れた変数” をもつ理論の存在の可能性を，証明あるいは否定しようと努力を重ねてきた．これらの研究の意外な結果はベル*31による証明，そしてコッヘンとシュペッカー*32による証明であった．その証明とは，隠れた変数は，その値に対する統計平均が量子力学の結果を再現するように，実際に導入できるという内容であった．しかしながら，決定論のこの復権に対しては重い代価を支払わなければならなかった．それは，遠く離れた，お互い相互作用しない二つの系の隠れた変数は，ときには分離できないで絡み合っているということである．それゆえ，分割可能性の公理 (非常に遠く隔たった系は相互に独立しているという，その時点までは自明と見なされていたこと) を断念するという犠牲の下でのみ，決定論を回復することができた．この**量子不可分性**は 6 章で論じられる．その哲学的な意味は深遠である．これはいままで活発な議論の主題であったし，たぶんこれからも何年も続くであろう．

1.7 参 考 文 献

本書の読者は，相応に古典物理学に精通しているものと想定しているが，不足を補うには次の教科書を薦める．

熱 輻 射

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, 2nd ed., Pergamon, Oxford (1969) Chapt. 5.

F. K. Richtmyer, E. H. Kennard, and J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6th ed., McGraw-Hill, New York (1969) Chapt. 5.

結 晶 光 学

M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed., Pergamon, Oxford (1980) Chapt. 14.

S. G. Lipson and H. Lipson, *Optical Physics*, 2nd ed., Cambridge U. Press (1981) Chapt. 5.

ポアソン括弧

H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading (1980) [瀬川富士ほか訳，新版 古典力学 (上/下) (吉岡書店，1983，1984)] Chapt. 9.

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon, Oxford (1976) [広重　徹，水戸　巌 訳，力学 (増訂第 3 版)(東京図書，1974)] Chapt. 7.

---

*31 J. S. Bell, *Physics* 1 (1964) 195; *Rev. Mod. Phys.* 38 (1966) 447.
*32 S. Kochen and E. P. Specker, *J. Math. Mech.* 17 (1967) 59.

“旧” と “新” 量子論

M. Born, *The mechanics of the atom*, Bell, London (1927) [Ungar, New York よりリプリント版が刊行 (1960)].

この著名な本は最初に “Atommechanik” という題名で出版された．1927 年 1 月に完成された英訳の序文で，著者は次のように書いている．

> 本書のドイツ語版の刊行以来，原子力学は，ほとんど前例を見ないほどの猛烈な勢いで発展してきた．著者が計画していた第 2 巻の主題として探していた新しいタイプの理論は，すでに新しい量子力学に現れた．そしてそれは二つの非常に異なった見地から発展させられた．一方では，量子力学はハイゼンベルクによって始められて，ドイツではヨルダンと私がハイゼンベルクに協力して，イギリスではディラックによって発展された．他方，波動力学は，ド・ブロイによって提案され，シュレーディンガーによって見事に完成された．これらは，二つの異なった理論ではなく，単に二つの異なった表現様式である．この本で論じられた理論的困難の多くは，この新理論によって解かれている．

ボルンの本は，正準変換，作用変数とハミルトン–ヤコビ理論に関して最良の情報源の一つである．これらは，古い量子論に携わる理論家の不可欠な道具であった．奇妙なことに，この本はポアソン括弧に言及していない．ポアソン括弧は，後の段階で “新しい” 量子論のハイゼンベルクやディラックの定式化の到来とともに，やっと注目されるようになった．

“古い” 量子論のもう一冊の古典的文献は，次のものである．

A. Sommerfeld, *Atomic Structure and Spectral Lines*, Methuen, London (1923).

これは，*Atombau und Spektrallinien*, Vieweg, Braunschweig (1922)，第 3 版の翻訳である．ドイツ語第 4 版 (1924) は翻訳されなかった．

B. L. van der Waerden, editor, *Sources of Quantum Mechanics*, North-Holland, Amsterdam (1967) [Dover よりリプリント版が刊行].

この本は，量子論に関する 17 編の歴史的論文 (アインシュタインの “Quantum Theory of Radiation” (1917) に始まり，ハイゼンベルク，ボルン，ヨルダン，ディラック，パウリの仕事で終わる) の英文テキスト (原文あるいは翻訳) を収めている．シュレーディンガーの仕事がまったく無視されているのが目立つ．もともとの行列形式での量子力学の発明者たちは，シュレーディンガーの “波動力学” の成功にうろたえたのである．波動力学はただちにほとんどすべての応用領域で行列力学にとってかわった．

推 薦 図 書

J. B. Hartle, “Quantum mechanics of individual systems,” *Am. J. Phys.* 36 (1968) 704.

これは，量子「状態が個別の系の客観的性質ではなく，系がどのように準備されたかという知見から得られる類の情報であり，この情報が未来の測定に対する予言に使われる ⋯．“波束の収縮” は観測者の意識において起こる．それは，そこで起きているいかなる特有の物理過程のためではなく，ただ状態が観測者の構成物であって，物理系の客観的性質ではないという理由からである」ということを明快に説明している．

D. Finkelstein, “The physics of logic,” in *Paradigms and Paradoxes*, edited by R. C. Colodry, Univ. Pittsburgh Press (1971), Vol. V; reprinted in *Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, edited by C. A. Hooker, Reidel, Dordrecht (1975), Vol. II, pp. 141–160.

J. M. Jauch, *Are Quanta Real? A Galilean Dialogue*, Indiana Univ. Press, Bloomington (1973).

L. E. Ballentine, “The statistical interpretation of quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.* 42 (1970) 358.

H. P. Stapp, “The Copenhagen interpretation,” *Am. J. Phys.* 40 (1972) 1098.

専門家の間では，“コペンハーゲン解釈” という言葉が何を意味するのかは，意見は一致していない．バレンタインは「純粋状態が，一つの系を完全に，あますところなく記述している」という主張にこの名称を与えている．シュタップは，こうした主張を “絶対 ψ 解釈” とよんでおり,「批判家はしばしば，基本的には実践的であるコペンハーゲン解釈を，それとまったく対極にある絶対 ψ 解釈と混同してしまう．··· コペンハーゲン解釈では，世界そのものを表す絶対波動関数という概念がきっぱりと拒絶されている」と述べている．したがって，バレンタインとシュタップ間に真の対立はないのである．ただ，一人がコペンハーゲン解釈とよぶものを，もう一方がコペンハーゲン解釈と正反対のものと見なしているだけである．

2
量　子　検　証

2.1　量子系とは何か?

しばしば文献に現れる**量子系**は有用な概念だが，自然界には実在しない抽象概念である．一般に，量子系は**準備の同値類**によって定義される．(“準備” と “検証” とは量子論の基本的概念であることを思い起こそう．それらの意味は実験者が行う一連の指示のことである.) たとえば，光子，あるいは自由水素原子などとよばれるものをつくり出す同等な巨視的手順が多く存在する．様々な準備手順の**同等性**は適当な検証によって確かめられなければならない．

具体例を考えようとすると，ただちにこうした概念の曖昧さに突き当たる．$2p$ 状態にある水素原子は，$1s$ 状態のものと同じ系だろうか? あるいは 1 光子を伴う $1s$ 状態の水素原子と同じ系なのか? 答は私たちが興味をもつ問題に依存する．たとえば，エネルギー準位とか，あるいは遷移確率という指定する問題によるのである．シュテルン–ゲルラッハの実験では，“量子系” とは銀原子全体ではないということを見てきた (17 ページ)．“量子系” は銀原子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ だけである．なぜならシュテルン–ゲルラッハの検証の目的は $\boldsymbol{\mu}$ の成分を決定することだからである．そこでは原子の重心は古典的に扱ってよかった．これらの例は，次のようなあいまいな “定義” で満足しなければならないことを示している．つまり，量子系とは，量子論の中で閉じた力学的記述を可能とするあらゆるものである．

量子系がわかりにくい反面，量子**状態**には，**検証**という概念にもとづいて明確な**操作上の**定義を与えることができる．図 1.6 のように，ある与えられた準備といくつかの検証の組を考えよう．検証間にはお互いどうし相いれないこともありうる．もし同一の準備の後に，これらの検証が何度も行われるなら，一回一回の検証の結果の統計分布がある極限に近づくことがわかろう．各結果は明確な確率をもつ．そのとき，次のように状態を定義する．すなわち，**状態は，すべての考えられる限りの検証に対する様々な結果の確率で特徴づけられる．**

この定義はだいぶ余分な要素を含んでいる．じかに，これらの確率が独立でないことを示そう．次のようないくつかの検証の 1 組に限定して考える．もちろん，いろいろな方法で 1 組を指定することができる．そのさい，これらの検証の結果に関する確率が知られているなら，あらゆる他の検証の結果に関する確率を予言することは可能

とする．(幾何学的アナロジーは，各軸への射影によって一つのベクトルを定義することである．これらの射影は独立ではない．線形独立で，完全系をなす軸への，**有限**個の射影を指定すれば十分である.)

具体例をしらべる前に，**確率**という概念を明確にした方がよいだろう．その意味するところは次のことである．検証が，すべてまったく同じに準備された無限個の量子系の複製に対して，無限回行われると**想定**しよう．この無限回の実験の集りは**統計アンサンブル**とよばれる．統計アンサンブルとは概念上のものだということは，きちんと理解しておかなければいけない．それは想像上にのみ存在するものだが，それを用いることによって推論がしやすくなる*1．この統計アンサンブルにおいて，A という事象の出現は $\mathbf{P}\{A\}$ という相対頻度をもつ．**確率**とよばれるのは，この相対頻度のことである．実際に確率を**測定**するためにできる最善のことは，多数回 (有限回ではあるが) 同じ実験を繰り返すことである*1．多く繰り返せば繰り返すほど，測定される相対頻度と真の確率との差は小さくなるだろう．

状態を定義する簡単な例として，1 光子がいわゆる右向き偏光をしている場合を考えよう．操作上，これはもしその光子を特定の検証 (すなわち，1/4 波長板とその背後に適当な方向に向けた方解石結晶を置いた装置) にかければ，光子が特定のチャンネルに出て来ると**間違いなく**予測できることを意味する．勝手な向きに向けて置かれた方解石結晶と他の光学反応する媒質とから成る他のいかなる検証に対しても，私たちは様々な光子の出力チャンネルに対する**確率**を予言することができる．(これらの確率は，古典論のビーム強度と同じように計算される.) "状態" という単語が，光子それ自身を指しているのではなく，巨視的装置を含む実験設定全体に関連していることには注意を要する．ボーアはこの点を力説した*2．

> 量子力学の記号を曖昧さなしで解釈しようとすると，すべて古典的な方法で記述される実験によって得られる予測可能な結果を既知の規則に組み込む以外には考えられません．

より一般的にいえば，量子状態を 1 組の等価な実験手順に関連づけてもよい．もちろん，そうした手順が原則的に真に等価であると確認できることが前提である．たとえば，違う業者が製造する 1/4 波長板を使用してもかまわないし，あるいは円偏光を分析するまったく異なる方法を考案してもよい．本物の実験が**原理的に**可能ならば，場合によっては全然実験器具を使わずに，純粋に思考実験をするのもよいだろう．たとえば，太陽の中心にある電子の状態を考えることは文句なしに合理的である．その電子のスピンの成分を測定することは，明らかに非常に難しく，実行することは予算上の制約から無理である．しかし，それは今日知られている物理法則によって排除されているわけではない．したがって，量子力学を星内部のプラズマの物理特性の計算に

*1 一つの実験を百万回繰り返しても，統計アンサンブルをつくり出すことにはならない．それはただ百万のおよそ似通った要素を含む**一つの**非常に複雑な実験を構成するだけである．(本書では，**集合**という用語を，ほとんど同一の系の組を言い表すのに使うことにする.)

*2 N. Bohr, *Phys. Rev.* 48 (1935) 696.

使うことは，実験室で観察される金属中の電気伝導，あるいはヘリウム超流動の議論にそれを使うのと同様，理に適っている．

量子論の本質は，状態の (すなわち，**準備手順**の) 数学的表現とどんな検証に対しても種々の結果の確率を計算する規則とを与えていることである．そこで，まずは量子検証の現象論に精通することである．いくつかの基本的な**経験的**な事実を羅列することから始めよう．これらの事実の概念的な意味づけは後に分析され，そのとき “仮定” の地位に引き上げられる．しかしながら，これらの経験的につくられた仮定から量子論の完全に正式な構造は得られないであろう．唯一の指針である数学的直観にもとづき，新たな仮定を追加導入しなければならないだろう．そしてこれらの新しい仮定から導かれる結論は，実験で検証されなければならない．

こうした細部に入る前に，量子検証の性質をしっかりと理解していなくてはならない．検証とは，写真乾板での粒子の黒化や粒子検出器での放電といった単に予想できない事象が起こることではない．物理学者にとって大事なのは，これらの巨視的事象には理論的解釈が伴わなくてはならないことである．上に説明したように，理論的解釈が半ば**古典的**でなければならない．

たとえば，図 1.3 の光子検出器の一つが反応することは，偏極した光子が到達したと解釈される．なぜなら暗黙のうちに，方解石結晶によって光のビームが反対の偏光をもつ 2 本のビームに分割されるという古典電磁気理論の法則を用いているのである．同じく，シュテルン–ゲルラッハの実験は磁気モーメントの測定と解釈されている．なぜならそれは，銀原子のかわりに，小さい羅針盤の針をシュテルン–ゲルラッハ磁石を通して送っても，磁気モーメントの測定が実際にできたからである．原子核物理学者が衝突断面積を測る場合，核の破片の軌道は標的と種々の検出器の間で古典的な直線であると仮定している．この仮定なしには，検出器の巨視的位置を核の微分断面積の角度に読み替えることはできないであろう．そして，分光学者が回折格子を用いて波長を測るとき，彼らのデータを波長に変換するために古典回折理論を使う．量子論は，磁気モーメント，衝突断面積，波長などの可能な値を，説明，あるいは予言するという，**次の**段階においてやっと登場するのである．

ここで，読者は次のように尋ねるかもしれない.「なぜ，測定装置も含めて量子論によって記述できないのか?」 それは可能だし，さらに，理論の内部一貫性を証明するために，私たちは後に実際そうする．しかしながら，これはただ，抽象的な概念である量子世界と日常の触知可能な世界の間の想像上の境界線を動かすだけである．もしもともとの古典的装置を量子化するなら，今度はその装置自身を測定し，その後の研究に利用できる永久データを記録するためにもう一つ別の古典的装置が必要となる．

この思考上の過程は際限なく繰り返すことができる．ある著者たちは，“精神–物理の平行論” のため，この測定の鎖の最後の段階に “意識”，あるいは観察者の “知的な

内部生命" が関与すると述べている[3,4]．また，別の著者たちは，宇宙全体に対する波動関数を導入する[5]．本書では，私が理解していない概念は使わないつもりである．理論の内部の一貫性はただ，もしある装置が量子化され，古典的に記述されるもう一つ別の装置によって観測されるなら，2 番目の装置によって得られる結果が，最初の装置が古典的に記述されるときに記録される結果と一致しなければならないということである．もっと正確にいえば，矛盾する結果を得る確率が，任意に小さくなければならないことである．この要求は，きちんと測定器とよべるものに対して条件を課している．装置は，熱力学的意味で，**不可逆的に**ふるまうのに十分な多自由度をもっていなくてはならないことが，後に示される．こうして私たちのアプローチの一貫性が確立される．

2.2 繰り返し可能な検証

きわめて短い時間間隔をおいて行われる二つの連続した同一検証を考えよう．もしこれらの検証でいつも同一の結果が出るならば，それらは**繰り返し可能である**とよばれる．("繰り返し可能である" という用語は，検証に先行する大部分の準備に対して，その結果が統計的以外には本質的に**予言できない**ような検証に使われる．"再現可能である" という用語は，完全に**予言可能な**ふるまいをする現象に用いられる.)

たとえば，図 2.1 のように，入射光子の直線偏光を検証するために配置された二つの同一の方解石結晶を考えよう．そこには，三つの検出器が置かれている．上と下の検出器が作動することはあるが，真ん中の検出器は決して作動しないことが経験的に知られている．これは正に，古典電磁気の理論が光線について予言することである．点線で示されている以外はどんな軌跡も実現不可能なのである．この実験の結果を解釈する唯一の方法として，点線で示されているような，準古典的軌跡の存在を，暗黙の

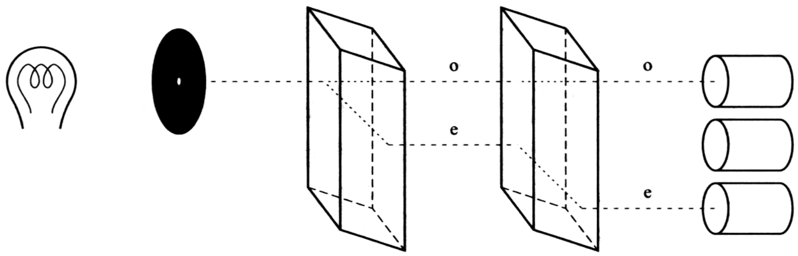


図 2.1 繰り返し可能な検証．2 番目の方解石結晶が 1 番目の方解石結晶の与える結果を確認している．

---

[3] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) p. 223; 英訳：E. T. Beyer: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1955) p. 418.
[4] E. P. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Indiana Univ. Press, Bloomington (1967) p. 177.
[5] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* 28 (1983) 2960.

うちに想定しなければならないことに注意しよう．解釈抜きの実験は意味がない．

しかしながら，ここに微妙な問題がある．私たちはまた暗黙のうちに，1 個の光子がたどる道筋は，それが 1 番目の方解石結晶によって検証されるとき，1 番目の方解石結晶と検出器の間に置いた 2 番目の方解石結晶の存在に依存しないとしている．たとえ 2 番目の結晶が存在していなかったとしても，この光子が同じ道筋をたどると私たちは信じている．最初の検証結果が記録されてなく，ただ推論されているだけとしても，このような仮定は，ここに二つの連続した検証があると断定し，その結果を比較できるようにするためには必要なのである．

私たちの根深い古典論的な偏見 (すなわち，各光子が明確な軌跡を描くと考える) からすると，この仮定は自然である．しかし，この仮定は明らかに事実に反している．しかもそれを確認することは不可能である．反実証論的実験のことはさらに 6 章で論じよう．そこでは直観が，量子領域ではまったく信頼できる指針ではないことが明らかになろう．

すべての検証が繰り返し可能であるとは限らない．たとえば，もし同一の 1/4 波長板が，図 2.1 のそれぞれの方解石結晶の**右側**に取り付けられていれば，2 番目の結晶からは，2 本でなく，3 本の光線が出てくるだろう．(その場合，中央の検出器は，他の二つの検出器を合わせたとほぼ同じ頻度で作動するであろう.) このような場合，1 番目の検証を終えた光子は円偏光しているのである．円偏光は，これらの方解石結晶によって検証される種類の偏光ではない．それゆえ，この改造された検証は繰り返し可能ではない．

これらの検証はまた，もし光学的に活性な液体が二つの結晶の間に注がれ，偏光面の回転を引き起こすなら，繰り返し可能ではなくなるだろう．同じく，磁場が平行となっている，連続して行われる同一の二つのシュテルン–ゲルラッハの実験は，もしその二つが，垂直磁場による原子の磁気モーメント歳差運動が起こる領域で分断されているなら，矛盾する結果をもたらすかもしれない．量子系の力学的時間発展は 8 章で論じよう．この章では，連続した検証は，どんな力学的時間発展をも無視できるほど，お互いの間の時間間隔が短いと仮定されているものとする．

もう一つの繰り返し可能でない検証の例は，写真感光乳剤中あるいは泡箱中の陽子の反跳を観測することで中性子の運動量を測定する標準的方法である．測定後の中性子の運動量がその前の運動量と同じでありえないことは明白である．この例は，次のような不注意な文章[*6]に反して，良い測定が必ずしも繰り返し可能ではないことを明らかに示している．

> もし最初の測定の直後に同じ力学変数の 2 回目の測定をするなら，物理的連続性の原理から 2 回目の測定の結果は，1 回目の結果と同じでなければならない．

この文章は，正確になされるすべての検証が必ず繰り返し可能であるという印象を与えてしまう．実際には，繰り返し可能な検証は，当り前ではなく，例外である．それ

[*6] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Univ. Press (1947), p. 36.

らはたいていの場合理論家の頭の中に存在する．ちょうど，剛体あるいはカルノー・エンジンのように，理想化されたものである．ただ，そうしたものと同じく，理論的に議論するさいには有用である．理由はすぐ後で，お互いに**異なる**連続した検証を考えるとき (2.4 節参照)，明らかになろう．

したがって，本書の大部分で，検証は繰り返し可能であるように設計されているとする．そして，“検証” という単語は，特に指定がない限り，**繰り返し可能な検証**を意味するとする．しかしながら，繰り返し可能でない検証のほうが，普通であることは注意しなくてならない．さらに，それらは理想的な繰り返し可能な検証より**もっと多くの情報**を与えることもある．このことは，9 章で明らかになろう．

2.3 最大量子検証

ある与えられた量子系の検証で得られる異なった結果の最大の数を N とする．簡単のため，N は有限とする (無限の N の場合は，4 章で論じる)．そのとき，正確に N 個の結果をもたらすどんな検証も，**最大**あるいは**完全**であるということにする．たとえば，図 1.5 のシュテルン–ゲルラッハの実験は，磁気モーメントの成分の値に対する完全な検証である．それは常に，磁石の方向にかかわらず，スピン s の原子に対して，$(2s+1)$ 個の異なった結果を示す．**不完全検証**とは，たとえば実験装置の解像度不足のために，いくつかの結果がひとまとめになってしまう検証である．これは必ずしも欠陥ということではない．いくつかの応用では，低解像度が有利であったり，“曖昧な測定” から興味深い情報が引き出されることがある (12 章)．**不完全検証**を，結果が様々な検出器の非効率さ (誤作動を含めて) を原因とする**不十分な検証**と混同してはならない．

最大あるいは**完全**という言葉を誤解してはいけない．図 1.3 に描かれているような，直線偏光の検証は，光子の偏極に関してのみ完全である．それは，光子がもっているかもしれない，その位置とか運動量といった，他の性質についての情報をもたらさない．同じく，シュテルン–ゲルラッハの実験 (図 1.5) はスピンに対して完全な検証であり，他の自由度は無視されている．実際は，これらの検証の一つ一つの結果は，検証されている内部自由度 (偏極あるいはスピン) の値を，巨視的手段によって検出される粒子の**位置**に**関連**させて観測されている．

量子検証の完全性の概念は，古典物理学とは根本的に異なっている．たとえば，古典力学では，回転体の角運動量 $\mathbf{J}$ のすべての成分を指定できる．したがって，回転体の完全な記述は，これらの全成分を含んでいなければならない．しかしながら，原子のような非常に小さい系の $\mathbf{J}$ の成分を測定しようとすると，$\mathbf{J}$ の一つの成分の測定が他の成分の測定を妨げるばかりでなく，これらの他の成分の期待値を制御できないやり方で変えてしまうことに私たちは**経験的に**気がついている．その例は，シュテルン–ゲルラッハの実験を論じた 1.5 節に述べた．原子が $\overline{\mathbf{B}}$ (磁場の平均値) の方向のまわりを何回も歳差運動する結果，$\overline{\mathbf{B}}$ に垂直な $\mathbf{J}$ 成分はでたらめになっていることが示され

た．この結果は，一見するとゲルラッハとシュテルンによって選択された実験設定の制約から生ずる見当違いの実用的困難に映るかもしれない．しかし，この困難は量子論における原理的問題なのである．正確にいえば，もし量子論を実験結果を解釈する道具として**選択**する限り，角運動量の二つ以上の成分を**正確に**決定することはできないのである[*7]．決定したいという成分を私たちは**選べる**だけである．

この制限は，たとえばジャイロスコープの運動を計算するのに (望むならば) 量子力学を利用できなくなるわけではない．半古典極限 $J \gg \hbar$ で，$\mathbf{J}$ の各成分の不確定さを $\sqrt{J\hbar}$ のオーダーまでに減らすことは，原理的に可能である．この程度の不確定さは，ジャイロスコープのような巨視的系に対しては完全に無視できる．上記の量子限界は，ただ $\mathbf{J}$ の一成分の不確定さを $\sqrt{J\hbar}$ より小さくしたいと望む場合にだけ現れる．

生の実験データの解釈には常に**何らかの**理論の使用を必要とする．“角運動量” のような概念は理論の一部であり，実験の一部ではない．さらに，**対応規則**が理論の抽象概念を私たちの実験器具に関連づけるために必要とされる．何が測定でできるかあるいはできないかを教えるのは (その対応規則とともに) 理論である．理論にないものは，その理論で記述されるどんな実験でも観測されるはずはない．逆に，どんなものでも，(その理論で記述されれば，理論自体が観測を禁止していない限り) 観測可能量と見なされる．無難にいえば，理論は，それが記述する実験の結果について予言できなくてはならない．その結果理論が潰れることはありうる．“良い” 理論とは，適用範囲内で潰れないものである．今日，現在の私たちの知見で，量子論は原子，原子核そして多くの他の現象を記述するのに利用できる最良の理論である．

量子論によれば，異なった，**相互に相いれない**検証の中からどれを**選択**するかという余地はある．たとえば，シュテルン–ゲルラッハの実験の磁石を好きな方向に向けてかまわない．それならなぜシュテルン–ゲルラッハ検証は**完全**であるといえるのか? その理由は次の仮定として述べることができる．

> A.　**統計的決定論**　もし量子系が，特定の最大検証で予言可能な結果を生み出すように準備できれば，他の**いかなる**検証でも，決まった**確率**を有する．特に，これらの確率はその量子系を準備するのに用いられた手順の詳細によらないで，その量子系は与えられた最大検証で特定の結果を出す．このような方法で準備された量子系は，**純粋**状態にあるといわれる．

ある純粋状態にある量子系をつくり出す最も単純な方法は，量子系を完全な検証にかけ，望ましい結果をもたらさないすべての系を捨てることである．たとえば，完璧な吸収体を，望まないビームの経路上に挿入してもよい．こうすれば，**選択された量子系の過去の歴史は無意味になる**．量子系が特定の最大検証にかけられたとき，決まった結果を引き起こすという事実は，完全にその系の状態を識別することになり，そしてこれが，その量子系に関して与えることができる**最も完全な記述**である[*8]．

---

*7　ただ一つの例外は，すべて $\mathbf{J}$ の成分が同時にゼロになる場合である．

*8　“隠れた” 変数を追加して，この記述を補おうとしても重大な困難に至る．6 章での論議を参照．

必要となる次の定義は，**同等**な検証の定義である．

> B. **最大検証の同等性** 二つの最大検証は，もしどちらか一つの検証に対してある**決まった**結果をもたらすすべての準備が，もう一方の検証に対してもある**決まった**結果をもたらすとき，この二つの最大検証は同等である．このような場合，他のいかなる準備 (すなわちこれらの検証に対して予言可能な結果をもたらさない準備) も，両方の検証の対応する結果に対する同じ**確率**を与えよう．

たとえば，(任意のスピンに対して) J_z を測定するシュテルン–ゲルラッハの実験は，$(J_z)^3$ あるいは $1/(J_z - \hbar\sqrt{2})$，あるいは他のいかなる J_z の一価関数を測定する実験に同等である．仮定 B が，N 個の異なる準備が最大検証の一つ一つに対して**決まってはいるが，異なる**結果をもたらすことを要求していることに注意が必要である．同等性は，ある場合にただ同一の**確率**を与える検証で保証されているわけでない．たとえば，直線偏光を検証できる二つの結晶を考えよう．これらの結晶のそれぞれが，どの方向を向いていようと，1 本の円偏光の光線を等しい強度の 2 本の光線に分割する．そのため両方の検証が，円偏光という特別な場合に対して (しかも**両方向**の円偏光に対して)，常に統計的には一致している．この自明な結果はもちろん，直線偏光の光線が二つの結晶の一つに当てられたとき何が起こるか，そして特にその光線が両方の結晶によって同じ割合で分割されるかどうかに関して何の情報も与えていないのである．

現実では，ほとんどの準備が純粋状態ではなく，**混合**状態をもたらす．不完全な準備の後に，どんな最大検証も予言可能な結果をもたない．たとえば，白熱電球から出て来る光子は，偏光に関する混合状態にある．この特殊な場合，光子の偏光は完全に**ランダム**である．偏光 (直線偏光，円偏光，さらに一般的に楕円偏光であろうと) に対するいかなる検証も，もし装置が常に同じ検出効率で作動する (そうした装置は**偏向していない**とよばれる) なら，ある偏光の光子と逆の偏光の光子を同数ずつもたらすはずである．私たちはこれからはもっぱら偏向していない検証だけを考えることにしよう．いま述べた例は次の一般化を示唆する．

> C. **ランダム混合** N 個の状態をもつ量子系に関して，**あらゆる**偏向していない最大検証がその結果の一つ一つに対して同じ確率 N^{-1} であるように準備することが可能である．

ランダム混合とは，量子系の過去の歴史に関する知識が**完全に**欠如しているということに対応する状態である．誤解を避けるために，"量子系" は**しらべられている量子検証の組**によって定義されていることを再度注意しておく．たとえば，磁気モーメントの成分を検証するシュテルン–ゲルラッハ型の実験を考えるとき，オーブンから現れる銀原子の量子状態はただその原子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ だけである．その重心 $\mathbf{r}$ は古典的に扱える (17 ページ参照)．明らかに，その量子状態はランダム混合である．

仮定 C は何でもないものと思われるかもしれないが，実は広範囲な帰結をもたらす．最初に，各量子系に対して，ランダム混合である状態が**一意的**である (複数の異なる

タイプのランダム混合はありえない) ことを指摘しておく．このことは，考えられるあらゆる検証の様々な結果に対する確率の組であるという，状態の定義そのものから当然出てくることである．これらの確率はすべて N^{-1} に等しい．さらに，この一意的なランダム混合は，**力学的に不変**である．これは次のように示せる．偏向していない最大検証には，有限時間の間，待つこと以外は何もしないということも含む．この場合，初期にランダム混合として準備され，そして自己の力学特性に従って時間発展することを許されている量子系は，ランダム混合の状態に止まっていなければならない．もしそうではなかったら，“無駄な検証” が，ランダム混合の定義に反して，N^{-1} ではない確率をもたらしてしまう．したがって，仮定 C を**無知の保存則**とよんでもよい．9 章で，これが孤立系のエントロピー保存の法則の特別な場合であると判明するであろう．

真の乱雑さは単なる “無秩序” よりずっと強い性質であること，そして完全な無知は不完全な知識とは根本的に異なっていることに注意を促しておく．この違いは，以下の演習問題が示すように，根本的である．(それらの問を解くには，**ベイズの規則**とよばれる統計学の仮定を必要とする．このことに精通していない読者は本章末の付録を参照せよ．付録には演習問題もある.)

演習問題 2.1 百万個の x 軸方向の直線偏光光子と同数の y 軸方向の直線偏光光子が，完全反射箱*9に撃ち込まれる．この箱の中で，光子は，その偏光状態を変化させることなく，(z 軸方向に) 動き回れるとする．これらの光子が箱に撃ち込まれる順序の記録はとらない．(ただ合計の数だけを記録する.) 2 番目の同様な箱には，百万個の時計回りの円偏光光子と同数の反時計回りの円偏光光子が入っている．どちらに入っているかは知らされずに，これらの箱の一つが与えられたとしよう．各光子を検証することによって，与えられた箱がどちらの方法で準備されたものか判定できるか? 間違った答を出す確率は，いくらか? ⋆

解答：完全な光子検出器 (下を参照) があれば，約 $(4\pi \times 10^6)^{-1/2}$ である．

演習問題 2.2 ここで，光子検出器が 99% の効率しかもたないと仮定して，前の演習問題と同じ質問に答えよ．

演習問題 2.3 演習問題 2.1 を解く実験に成功したとする．すなわち，あるタイプの偏光をしらべる検証をすべての光子について行い，そしてこれらの検証の二つの可能な結果の数が等しくないことを見いだした．いま，もう 1 人の物理学者に，あなたが得た結果を話さないで，これらすべての光子を渡す．彼は，あなたが検証した偏光のタイプがどちらかわかるだろうか? (すべての光子検出器は完全で，そして繰り返し可能な検証が可能とせよ.)

---

*9 箱の大きさは光子のコヒーレント長よりずっと長く，光子が従うボース統計性を考えなくてよい．

2.4 一連の検証

理論が受け入れられるには，いくつかの実験の結果を予言しなくてはならない．したがって，連続した一連の検証の結果間にある**相関**を考えるようになる．最も単純な場合，すなわち同一の検証が連続する場合は，2.2 節で論じた．同一の検証の連続よりいっそう教訓的なのは，スピン 1 の粒子に対する二重シュテルン–ゲルラッハの実験を表している図 2.2 にあるように，**異なった**検証の連続した状況である．

最初の磁石から分かれて出てくる 3 本のビームの強度を I_m で表そう．(もし粒子源がスピン偏極していなければ，すべての I_m は，仮定 C により等しい．当面の議論には，ただ I_m どれ一つとして 0 でないことを仮定すれば十分である.) これらの 3 本のビームの進む角度は十分離れていて，2 番目の磁石に入るとき，**それらは重なり合わない**とする．しかしながら，2 番目の磁石が入射する 3 本のビームに対して本質的に同じ検証を行うように，その角度の分離があまりにも大きすぎてはいけない．もしこれらの条件が満たされるなら，図 2.1 に描かれているように，実験に意味を与える準古典的軌道の存在を考えることが可能になる．図 2.2 に示されているように，一つの検証ではなく，九つの可能な結果を与える**二つの**連続した検証の設定を考えたい．したがって，検出板上の各衝突点は，見ることはできないが，半古典的に計算できる軌道の終端点であるとする．衝突点の場所は，最終の検証の結果だけではなく，最初の磁石で行われた検証の結果も明らかにしている．(さらに，**もし** 2 番目の磁石がそこになくても，最初の磁石を通過する軌道は同じままであると仮定している．上に説明したように，こう考えるのは自然であるが，確かめることができず，反実証論的な仮定である.)

これらすべての仮定を当然とすれば，検出板上の九つの点を明確に，最初の検証の結果 a，b，c と 2 番目の検証の結果 α，β，γ に対応していると同定することができる．(ローマ文字とギリシャ文字は，それぞれ，1 番目と 2 番目の検証の結果を示すために使われる.) 検出板上の九つの点で観測される強度を $I_{\mu m}$ で表そう．もし粒子が途中で消失しないなら，$\sum_\mu I_{\mu m} = I_m$ が成り立つ．ここで新しい行列 $P_{\mu m} = I_{\mu m}/I_m$

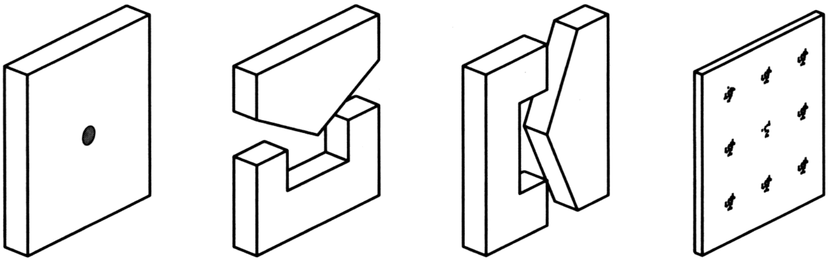


図 2.2 スピン 1 粒子に対する二つの連続したシュテルン–ゲルラッハの実験．図では，進行方向が 10 分の 1 に圧縮されて描かれている．

を定義すると，次式を満たす．

$$\sum_{\mu} P_{\mu m} = 1 \tag{2.1}$$

(上記の方程式を満たす非負要素の行列を，確率論では“推計的である”とよぶ.)

図 2.2 に描かれている実験で，最初の検証は完全であるだけではなく繰り返し可能である．その異なった結果は様々な純粋状態を準備することになる．それゆえに，行列 $P_{\mu m}$ は，純粋状態 m を準備した後の，結果 μ を観測する確率の表である．この確率行列はもっぱら実験設定に含まれている二つの検証の性質に依存している．それは粒子源の性質にはよらない．

さて，$P_{\mu m}$ が式 (2.1) だけでなく，

$$\sum_{m} P_{\mu m} = 1 \tag{2.2}$$

を満たしていることを示そう．式 (2.1) と (2.2) の両方を満足する非負要素の行列は，“2 重に確率的である”といわれる．そうした行列は，これからすぐ使ういろいろな重要な性質をもっている．

式 (2.2) の証明は，どんな連続した検証の組合せも一つの検証と見なせるという明白な事実にもとづいている．一般に，この組み合わされた検証は，たとえ構成している一つ一つの検証が偏向していないとしても，全体としては偏向しているかもしれない．たとえば，図 2.1 で，2 番目の検証をする前に，二つの結晶の間に，ビームの 1 本を遮る吸収体を置くことによって，1 番目の検証の結果の一つを**選択する**こともできた．同じく，図 2.2 で，1 番目の磁石から出てくるビームの中から 1 本を選ぶ，あるいは，もっと穏当に，それらのビームを新たに加えた不均一磁場にかけ，おのおのの原子の磁気モーメントが異なる歳差運動をするようにして，最終結果を偏らせてしまうこともできた．だが，ここでは 1 番目の検証から出てくるビームごとに違った取扱いをして何らかの偏りを与えることのないよう注意しよう．そうしたとき，もし検証されている量子系が**ランダム**混合として準備されているなら (仮定 C 参照)，2 番目の検証の N 個の異なった結果のうちでどの一つを得る確率も $p'_{\mu} = N^{-1}$ である．これはちょうど，この組み合わされた検証の 1 番目の部分で，$p_m = N^{-1}$ が m 番目の結果を得る確率であったのと同様である．他方，

$$p'_{\mu} = \sum_{m} P_{\mu m}\, p_m$$

も成り立っている．なぜなら $P_{\mu m}$ は，準備 m の下で結果 μ の出る確率だからである．これらの結果を組み合わせて，ただちに式 (2.2) が得られる．

演習問題 2.4　量子力学の知識を使って，図 2.2 の実験に対する $P_{\mu m}$ 行列を求めてみよ．

解答：二つの磁石を垂直に配置した特別な場合，$P_{\pm 1,1} = \frac{1}{4}$，$P_{\pm 1,0} = \frac{1}{2}$ および $P_{00} = 0$ となる．したがって，二つの磁石が正確に垂直であれば，図 2.2 の検出板上に中央の点はないはずである．

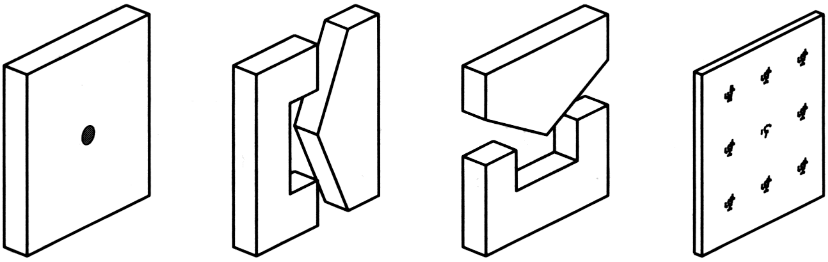


図 2.3　図 2.2 と同じ検証であるが，順番が逆になっている．

最後に，図 2.3 にあるように，同じ二つの完全で，繰り返し可能な検証を今度は逆の順序で実行することを考えよう．前と同様，純粋状態 μ の準備の下で結果 m を観測する確率 $\Pi_{m\mu}$ を定義しよう．**経験的に，**

$$\Pi_{m\mu} = P_{\mu m} \tag{2.3}$$

である．このことは，次の法則として述べることができる．

> D.　**相反則**　ϕ および ψ はある純粋状態を表しているとする．そのとき，状態 ψ を準備した後に行う最大検証で，結果 ϕ を観測する確率は，状態 ϕ を準備した後に行う最大検証で，結果 ψ を観測する確率に等しい．

この相反則に対応するものは古典論にない．青い目の人の中で金髪の人を観測する確率は，金髪の人の中で青い目の人を観測する確率とは同じではない．もちろん，これらの古典的検証のいずれも (髪あるいは目の色に対して) 完全ではないし，また，完全量子検証ではお互いに相いれないかもしれないのに対して，これらがお互いに相いれないことはない．

例によっては，対称性の議論から相反則を導くことができる．たとえば，異なった方向への光子の直線偏光に対する検証の場合である．ある方向に偏光している光子が別の方向への偏光に対する検証をパスする確率は，2 方向間の角度だけに依存しているからである．しかし，一般的には異なった完全検証が対称操作によって関連することはない．たとえば，水素原子のスピン状態を考えよう．ある完全検証が，陽子の s_x と電子の s_y を測ることであるとしよう．もう一つの完全検証が，合成スピン S^2 とその成分 S_z を測るとする．これらの二つの完全検証はまったく異なるもので，いかなる対称性によっても関連していない．

演習問題 2.5　これら二つの完全検証の四つの結果に対する確率行列を求めよ．　⋆

相反則のもつ発見的意味は以下の通りである．ある物理系が常に純粋状態 ϕ についての最大検証をパスするように，準備されているとしよう．そのとき，その系が純粋状態 ψ についての最大検証をパスする確率は，これらの二つの状態が “類似” していることの目安になっている．それゆえに，相反則はただ「状態 ψ が状態 ϕ に類似し

ていると同じ具合に，状態 ϕ は状態 ψ に類似している」ことを意味している．ランデ[*10]は熱力学からこの法則を導こうと試みたが，成功しなかった．ここでは，この法則を経験的事実として受け入れよう．後に，相反則を量子論のもっと抽象的な仮定から導出する．しかしながら，この法則を直接的方法で，何らの理論も援用することもなく，実験で確かめることができる (その実験室での手順を最大検証と同一視できるという限定付きだが) ことを注意しておく．

相反則の面白い帰結は，時間順行と逆行の量子予言 (quantum prediction and retrodiction) が完全に対称的であるということである．条件確率を使えば，純粋状態が

$$\mathbf{P}\{\phi|\psi\} = \mathbf{P}\{\psi|\phi\} \tag{2.4}$$

を満たすことになる．この過去と未来の間の対称性をすべての一連の最大検証の組に拡張できる[*11]．この性質と，個々の量子検証が基本的に不可逆であるという事実の間に何ら矛盾はない[*12]．

2.5 干 渉 の 原 理

もう一歩で私たちは量子物理学の核心に到達する．図 2.4 に描かれている，三つの連続した繰り返し可能な最大検証を考えよう．最初と最後の検証が同一である場合を扱えば十分である．前と同じように，それぞれの磁石から出てくるビームどうし十分離れていて，次の磁石を通過するさい，重なり合わないし，逆にまたそれらがお互いあまり離れすぎていて，次の磁石が入ってくる一つ一つのビームに本質的に異なる検証を行うようになっていないとする．もしこれらの条件が満たされれば，そして簡単のためスピン $\frac{1}{2}$ の粒子を用いるなら，検出板上に八つの点の集りが現れる．(前の図のように，もしスピン 1 の粒子が使われたなら，27 個のそうした点の集まりができるだろう.) 一つの集りごとに，$m\mu n$ のように，三つの添字を付ける．それは，各粒子に連続して行われた三つの検証が，それぞれ m，μ と n という結果を与えたことを示している．(最初と最後の検証は同じなので，同じアルファベットの添字を最初と最後の検証の結果に使うことができる.) もし粒子が (たとえば，オーブンから出て来る場合のように) 初期にスピン偏極していなければ，集り $m\mu n$ の強度は，

$$\Pi_{n\mu}\, P_{\mu m} = P_{\mu n}\, P_{\mu m} \tag{2.5}$$

に比例している．ここで右辺は相反則 (2.3) から出てくる．

演習問題 2.6　2 番目の磁石が 1 番目の磁石に対して垂直に置かれているとき，対称性の議論を使って，$P_{\mu m} = \frac{1}{2}$ であることを示せ．

[*10] A. Landé, *Foundations of Quantum Theory: A Study in Continuity and Symmetry*, Yale Univ. Press, New Haven (1955).

[*11] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, and J. L. Lebowitz, *Phys. Rev.* 134B (1964) 1410.

[*12] 誰でも，平均して，その人の祖母の遺伝子の 4 分の 1 をもっており，またどの祖母も平均して彼女の孫の遺伝子の 4 分の 1 をもっている．このことは，子供をつくることが不可逆過程であるという事実と矛盾していない．

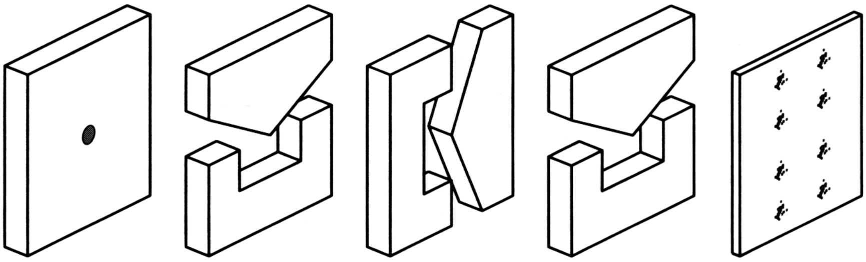


図 2.4 スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対する三つの連続したシュテルン–ゲルラッハの実験．それぞれの検証で二つ結果が可能であることに応じて，八つの点の集りが検出板上に現れている．

さて，図 2.4 の 2 番目の磁石のつくる場を徐々に弱めてゆこう．検出板上にあるスポット間の水平方向の距離は小さくなっていくだろうが，これらのかたまりが識別できる限り，それらの強度は不変であり，その値は式 (2.5) によって与えらる．磁場が小さくなり続けると，集りが四つの対ごとにそれぞれ合体し始める．そこで，2 番目の磁石が完全にはずされれば，素朴には $\sum_{\mu} P_{\mu n} P_{\mu m}$ に比例した強度の四つの集りが得られると予想される．他方，これは同一の 1 番目と 3 番目の検証の**繰り返し可能**である性質を破ってしまうので，そうならないことがわかっている．もし 2 番目の磁石が使われていないなら，検出板上に到達するすべての粒子は，1 番目と 3 番目の検証が同一の結果を与えるはずであるから，**二つ**のスポットに集中するに違いない．これらの二つのスポットは，もし最初の準備がランダム混合であるなら，密度が等しくなる (仮定 C)．

この実験で実際に起こるのは，2 番目の磁石が徐々に弱められ，そこから出て行くビームがお互い十分に離れているという条件が満たされなくなることである．重なり合い始めるとビームの 2 対が同位相で干渉し，強度の和を**2 倍**にしてお互い強め合うのに対し，一方別の 2 対は逆位相で干渉し消し合っている (図 2.5 を参照)．この現象は量子論の基本の一つである．

> E. **干渉原理** 量子系に対して，ある準備からある検証に至る経路がいくつか可能な場合，その検証の一つ一つの結果に対する確率は，一般的には様々な経路に付随して分割した確率の和では**ない**．

上の事例では，準備は m で，経路は μ で，最終結果は n でそれぞれ分類されていた．

干渉原理は，**二つの事象 A と B の生起**に成り立つ確率の加法則[*13]

$$\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} \tag{2.6}$$

が，量子確率に一般的には当てはまらないことを意味している．これはもちろん統計理論が間違っているのではない．量子系が中間経路を通るということは**事象の生起に**

[*13] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York (1968) Vol. I, p. 22.

対応しているのではなく，式 (2.6) が適用できないのである．

古典力学では状況が違う．(たとえば，ブラウン運動で) 確率変数の力が存在するときでさえ，力学系の時間発展を，少しもその発展を乱さず，たどることが原理的に可能である．それゆえ，いろいろとりうる経路の一つを系が通ることは，概念上は監視し続けられる**事象**の連続と考えられるので，式 (2.6) が当てはまる．実際には，その系の力学的性質を乱さずにたどることができる経路を決定することが原理的に可能である状況では，式 (2.6) は量子系に対しても成り立つ．しかしながら，もしそうした経路を擾乱なしに決定できないなら，個々の確率を加算できない．何が正確に“経路”を形成するのか，系の時間発展が乱されているかどうかの基準は何であるかは，量子系の時間発展を論じた後，より明確となろう．

図 1.4 の実験を実行することは難しいが，偏極光子についての類似した実験は実行可能である．光線の強度のような，光子の統計的性質は古典電磁気理論によって正しく扱うことができるので，それは予言可能な結果を示す．三つの磁石のかわりに，三つの方解石結晶を置こう．1 番目と 3 番目の結晶は，垂直方向と水平方向の偏光を検証し，そして中央の結晶は，±45° 方向の偏光を検証する．もし徐々に中央の結晶の厚さを薄くすると，結果として現れる 8 本の光線は，図 2.5 に示されているようにふるまうだろう．二つの光線が重なり合うと，強め合う干渉 (振幅は 2 倍になり，したがって光線の強度は 1 本の光線の強度の 4 倍である)，あるいは弱め合う干渉 (振幅はゼロである) のどちらかとなる．

干渉原理 E は，粗っぽい思考実験を用いた簡単な定性的議論だけで，もっともらしいと示すことができた．(他方，相反則 D は，経験的な事実として受け入れられなければならなかった.) 古典的直観に反するこのような深遠な原理は，どのようにすれば量子現象の基礎となっている力学法則の詳細な知識なしに，求められるのか? 他の可能性がないように干渉原理を導いた量子物理学の奇妙な性質は，次のように簡潔に述

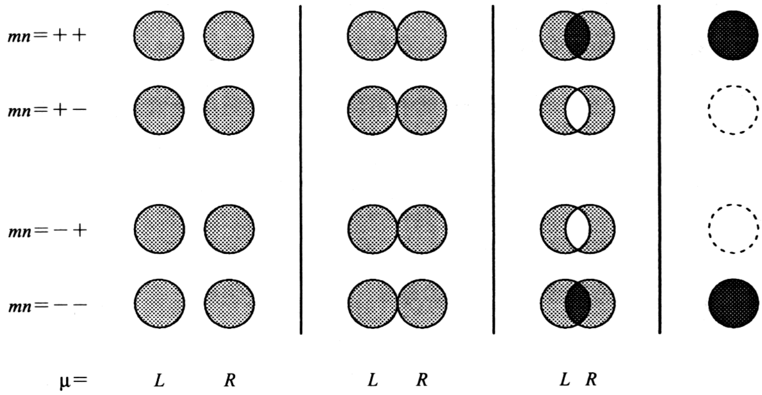


図 2.5　図 2.4 の実験で，真中の磁石の磁場を徐々に小さくしていったときの 8 本のビームのふるまい．干渉効果によって，$m=n$ では振幅が 2 倍になり，$m\neq n$ では振幅が打ち消される．

べることができる．

> 量子検証は**連続的に**変化できる古典パラメーターに依存するかもしれないが，量子検証をすれば，その結果は確定した**不連続な**数値となる．

量子検証を制御する連続的古典パラメーターの例は，光子の直線偏光を検証するために使用される方解石結晶の向く角度，あるいはシュテルン–ゲルラッハ磁石の向く角度である．

2.6 遷 移 振 幅

干渉という効果は，量子物理学特有のものでない．音響学，光学および他のタイプの古典波動でも起こっている．これらの波動の**振幅**はたいてい一組の**線形**微分方程式 (たとえば，電磁波に対するマクスウェル方程式) を満足している．したがって，いくつかの経路を波が伝播可能であるとき，振幅は線形的に足し合わされる．他方，これらの波動現象の観測される**強度**はエネルギー流で与えられ，このエネルギー流は場の振幅の **2 乗**である．それゆえに，振幅と異なり，強度は加算できない．

光学干渉の量子論による記述では，エネルギー流は，単位面積あたりの光子数に，つまりこれらの光子の到達の**確率**に比例している．すべての量子系 (光子，電子，原子，$\cdots$) に適用される干渉原理 E は，$P_{\mu m}$ のような遷移確率が**遷移振幅**の 2 乗であり，遷移振幅は線形的に足し合わされることを示唆する．さらに，位相の関係が欠かせないものであり，そして偏光状態は複素数で記述すると便利であることを私たちは古典光学から知っている[*14]．こうして，準備 m に続く検証結果 μ を得ることに対して，**複素数の**遷移振幅 $C_{\mu m}$ の存在を私たちは自然と仮定することになる．

このように仮定された遷移振幅 $C_{\mu m}$ は，

$$|C_{\mu m}|^2 = P_{\mu m} \tag{2.7}$$

を満たす．同様に，逆の遷移に対して，振幅 $\Gamma_{m\mu}$ を定義しよう．それは

$$|\Gamma_{m\mu}|^2 = \Pi_{m\mu} \tag{2.8}$$

を満たす．相反則 (2.3) から，$|\Gamma_{m\mu}| = |C_{\mu m}|$ はわかるが，いままでのところ位相については何もわからない．位相についてしらべるのが次の課題である．

上述した図に与えられているような，連続した検証を考えよう．差し当たり，最初の準備から最終の結果にはある**一つ**の経路があると仮定する．その経路をとる確率全体は，式 (2.5) のように，それぞれの段階に対する連続した確率の積である．それゆえに，一連の最大検証に対する遷移振幅を**それぞれの段階の連続した遷移振幅の積**と定義することは自然である．たとえば，3 連のシュテルン–ゲルラッハの実験 (図 2.4) で，$m\mu n$ という経路に対する振幅は $\Gamma_{n\mu}C_{\mu m}$ となる．

[*14] H. Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, Carré, Paris (1892) Vol. II, p. 275.

ここまでは，物理的帰結を有するものは何も仮定されていなかった．遷移振幅 $C_{\mu m}$ の位相は依然として無関係であり，確率 $P_{\mu m}$ を取り扱っていればよい．(古典の波動論から借用して) 新しい物理的仮説を導入するのはここである．

> F.　**遷移振幅の合成則**　もし初期状態から最後の結果に至るまでに複数の経路が可能であり，またそのどの経路をたどったかが区別できるような痕跡をその力学過程が残していないならば，最終の結果に対する全振幅が種々の経路に対する振幅の**和**であるように，遷移振幅の位相を選ぶことができる．

たとえば，図 2.4 の 3 連のシュテルン–ゲルラッハの実験で，もし中央の磁石が外されれば，様々な振幅 $\Gamma_{n\mu}C_{\mu m}$ は，決まっていない中間の経路を表す μ に関して足し合わされなければならない．他方，この場合，残った一対の検証は常に結果が一致しなくてはならない**同一の**最大検証なので，(最初のシュテルン–ゲルラッハ磁石によって準備された) 純粋状態 m から (最後の磁石によって得られる) 純粋状態 n までの，全体的な遷移確率は δ_{nm} である．完全な遷移振幅も，余分の位相因子なしで，δ_{nm} と仮定しよう，つまり，

$$\sum_{\mu} \Gamma_{n\mu}\, C_{\mu m} = \delta_{nm} \tag{2.9}$$

となる．行列 C と Γ は，お互いの逆になっている．さらに，相反則 D から，$|\Gamma_{n\mu}| = |C_{\mu n}|$ がわかるので，もし $\Gamma_{n\mu} = \overline{C_{\mu n}}$ となるように位相を選ぶことができるとしたら，きれいな結果になろう*15．

$$\sum_{\mu} \overline{C_{\mu n}}\, C_{\mu m} = \delta_{nm} \tag{2.10}$$

式 (2.10) を満たす行列を**ユニタリー**であるとよぶ．これは，よく知られた実数ユークリッド空間での回転を表す直交行列を，複素領域へ一般化したものである．

演習問題 2.7　$\mathrm{Det}\, C_{\mu m} = 1$ を証明せよ．

演習問題 2.8　式 (2.10) から，

$$\sum_{m} C_{\mu m}\, \overline{C_{\nu m}} = \delta_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

を証明せよ．しかしながら，式 (2.10) と (2.11) は，**有限**次元の行列に対してのみ等価である．無限次元空間での反例は，推進演算子 $C_{\mu m} = \delta_{\mu,m+1}\quad (\mu, m = 1, \cdots, \infty)$ があげられる．

いま私たちが直面しているのは，一つの代数上の問題である．$P_{\mu m}$ が与えられているとして，その “平方根”，すなわち，式 (2.7) を満足するユニタリー行列 $C_{\mu m}$ を見

*15 関数解析での標準的記法に従い，ある数の**複素共役**はバーを使って表し，アステリスク (*) は演算子の**共役** (これは 4 章で定義される) を表すことにする．

いだすことができるか? この問題は，**稠密な**集合 $P_{\mu m}$ に対して解をもつことがわかるだろう．ただし，これらの $P_{\mu m}$ が式 (2.1) と (2.2) の両方を満たす**2 重に確率的**な行列であるという条件付きである．この条件は必要条件だが，十分条件ではない．確率 $P_{\mu m}$ は複雑な不等式を満たさなければならないのである．式 (2.7) を満たす 2 重に確率的な行列は**直交確率的**とよばれている[*16]．この代数問題に関心がない読者は，以下の項は読み飛ばしてよい．

遷移振幅の位相の決定

絶対値 $|C_{\mu m}|$ がすでに与えられているなら，問題は複素数 $C_{\mu m}$ に，式 (2.10) が成り立つように，**位相**を割り当てることである．まず，独立な方程式の数を数えよう．$m > n$ の場合だけを考えれば十分である．なぜなら $m < n$ は複素共役の式に対応するし，$m = n$ ならば式 (2.1) のため式 (2.10) は自動的に満たされるからである．実部と虚部を別々に数えると，満たされなければならない式 (2.10) は $N(N-1)$ 個である．しかしながら，これらの方程式は，式 (2.7) によって与えられる $|C_{\mu m}|$ そのものが独立ではないので，すべてが独立というわけではない．$|C_{\mu m}|$ は，N 個の拘束条件 (2.2) を満足しなければならないが，この N 個のうち $(N-1)$ 個だけが独立である．それは式 (2.1) により，全部の拘束条件の和が自動的に満たされるからである．最終的には，$C_{\mu m}$ に $(N-1)^2$ 個の代数条件が課せられていることになる．

この数は，**任意にとれず**，決定しなければならない未知の**位相**の数でもある．実際，ユニタリー条件 (2.10) を破らずに，行列 $C_{\mu m}$ のある 1 行全体とある 1 列全体の位相を任意に選べる．たとえば，最初の行と最初の列は，変換[*17]

$$C_{\mu m} \to C'_{\mu m} = C_{\mu m} \frac{|C_{\mu 1}|}{C_{\mu 1}} \frac{|C_{1m}|}{C_{1m}} \frac{C_{11}}{|C_{11}|} \tag{2.12}$$

によって実数にできる．これで $(N-1)^2$ 個の独立な非線形代数方程式によって決定される $(N-1)^2$ 個の自明でない位相が残ることになる．これらの条件は代数的である (超越的ではない)．なぜなら常に各未知位相 $e^{i\theta}$ を，代数条件 $x^2 + y^2 = 1$ に従う未知数 $x = \cos\theta$ と $y = \sin\theta$ で置き換えることができるからである．それゆえ，稠密な $P_{\mu m}$ の $(N-1)^2$ 次元領域が存在し，そこに実数の x と y をもつ**有限**個の解があるということはもっともらしい．

演習問題 2.9　もしユニタリー条件 (2.10) が $C_{\mu m}$ に対して成立するならば，(2.12) 式で定義された $C'_{\mu m}$ に対しても成立することを示せ．

演習問題 2.10　比 $C_{\mu m} C_{\nu n} / C_{\nu m} C_{\mu n}$ は変換 (2.12) に対して不変であることを示せ．

演習問題 2.11　$N = 2$ の場合，式 (2.10) を具体的に解け．

[*16] Y. H. Au-Yeung and Y. T. Poon, *Linear Algebra and Appl.* 27 (1979) 69.
[*17] $C_{\mu 1}$ または C_{1m} のどれかが 0 ならば，添字 1 は任意の小さな数で置き換えればよい．

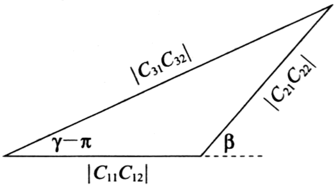
$N=3$ の場合は次のようにして具体的に解くことができる[17]．最初に，$C_{\mu 1}$ と C_{1m} が実数となるように位相を選ぶ．そのとき，$nm=12$ に対する式 (2.10) は，

$$|C_{11}C_{12}|+e^{i\beta}|C_{21}C_{22}|+e^{i\gamma}|C_{31}C_{32}|=0 \tag{2.13}$$

ここで，$e^{i\beta}:=C_{22}/|C_{22}|$ および $e^{i\gamma}:=C_{32}/|C_{32}|$ である．このように二つの未知の位相 β と γ に対する複素方程式が得られる．図に示されているように，$|C_{\mu 1}C_{\mu 2}|$ を辺にもつ三角形を描けば，グラフで解が求められる．これは，

$$|C_{11}C_{12}|\leq|C_{21}C_{22}|+|C_{31}C_{32}| \tag{2.14}$$

のような三角不等式が $|C_{\mu m}|=\sqrt{P_{\mu m}}$ の与えられた値について満たされていれば，またその場合のみ，求められる．明らかに，もし β と γ が式 (2.13) の解であるなら，$-\beta$ と $-\gamma$ はもう一つ別の解である．しかし，次の演習問題で見られるように，この他にも曖昧さがある．



演習問題 2.12 $N-1$ 個の N 次正方行列 $(m,\mu=1,\cdots,N)$

$$C^{(k)}_{\mu m}=e^{2\pi ik\mu m/N}/N^{1/2} \qquad (k=1,\cdots,N-1) \tag{2.15}$$

はユニタリーであることを示せ．これらすべての行列が同じ $P_{\mu m}=1/N$ に対応することに注意せよ．もし N が素数なら，これらの行列はそれらの行と列の順序が異なるだけであるが，素数でない N に対しては，それらのいくつかは正真正銘異なっている． ⋆

演習問題 2.13 $N=3$ の場合，次のようなコンピュータープログラムを書け．すなわち，九つの $P_{\mu m}$ のうち四つにランダムな値を生成し，式 (2.1) と (2.2) を使って他の五つの $P_{\mu m}$ を計算し，式 (2.14) の型のすべての関係式が満たされているかどうか確認し，最後に，もし可能なら $C_{\mu m}$ の位相を計算する． ⋆

演習問題 2.14 純粋状態量子系について，2 組の系が与えられたとする．それらは N 個の結果をもつある最大検証を行ったさいに得られた二つの異なった結果からつくられていると，その供給者は主張している．しかし，どんな検証であるかを供給者は明らかにしていない．式 (2.14) を N 個の結果をもつ最大検証の場合に一般化し，供給者の主張の誤りを立証できる手順を考案せよ．(もし状態が純粋ではないという可能性まで含めるなら，状況はいっそう複雑であり，いくつかの検証が必要とされる．77 ページの演習問題 3.37 を参照せよ.) ⋆

演習問題 2.15 もし，$0\leq\lambda\leq 1$ で，かつ $P_{\mu m}$ が 3×3 の直交確率行列なら，行列 $\lambda P_{\mu m}+(1-\lambda)/3$ も直交確率行列であることを示せ[17]． ⋆⋆

確率ではなく，確率振幅が基本的である

$N \geq 4$ の場合に進むと，状況はいっそう複雑になる[18]．$P_{\mu m}$ の許される値の空間は，$(N-1)^2$ より小さい次元の部分空間を含む．その部分空間では，種々の拘束条件が独立ではないため，$C_{\mu m}$ の位相に対して**連続的**に解のファミリーが存在することになる[19]．この困難はいままでの方法を逆転すべきことを示唆している．すなわち，振幅 $C_{\mu m}$ を**一義的**で基本的な対象と考え，確率 $P_{\mu m}$ は，それ自身は直接観測可能な唯一の量であるにもかかわらず，その振幅から導かれるべきものである．

図 2.4 の 3 連のシュテルン–ゲルラッハの実験を若干修正することによって同じ結論に達する．最後の磁石を最初の磁石と**平行でない**方向に向けよう．そうすれば 3 番目の磁石は**新しい**検証を行うことになる．その結果を $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ などのように，ボールド体の添字で示そう[20]．この修正された実験で，中央に磁石が取り付けられると，すべての経路が識別可能であり，経路 $m\mu\mathbf{r}$ の確率は $\Pi_{\mathbf{r}\mu}P_{\mu m}$ となる．そこで，その経路の遷移振幅を $\Gamma_{\mathbf{r}\mu}C_{\mu m}$ と書くことにする．ここで，通常のように，$|\Gamma_{\mathbf{r}\mu}|^2 = \Pi_{\mathbf{r}\mu}$ である．さて，いろいろな μ が識別できなくなるように，次第に中央の磁石を弱めていこう．経路に関する和 (2.9) の一般化は，

$$\sum_{\mu} \Gamma_{\mathbf{r}\mu} C_{\mu m} = \mathbf{C}_{\mathbf{r}m} \tag{2.16}$$

である．ここで，$\mathbf{C} = \Gamma C$ は再びユニタリーである．その要素 $\mathbf{C}_{\mathbf{r}m}$ は，準備 m から結果 $\mathbf{r}$ に至る遷移振幅である．

式 (2.16) の Γ と C は時間順序に並べられている．つまり最も時間的に早いものが右側に，最も時間的に遅いものが左側にあることになっている．これは中間状態が付け加わる場合にただちに一般化されて，量子系の時間発展がユニタリー行列の積で表されることを示している．8 章で実際にその性質を導く．

式 (2.16) から，実験的に観測可能な確率行列 $\mathbf{P}_{\mathbf{r}m} = |\mathbf{C}_{\mathbf{r}m}|^2$ は $\Pi_{\mathbf{r}\mu}$ と $P_{\mu m}$ から独立ではありえないということが出てくる．これらの三つの確率行列の要素の間には，原理的に実験で検証できる多数の関係が成立しなければならない．これらの検証は基本的で，**普遍的**な特徴をもっている．エネルギー準位，断面積などを予言するのに必要であったいかなる力学的仮定も含まない．私たちは本当に量子論の**論理的な構造**を検証することができるのであり，ただあれやこれやのハミルトニアンの正当性のみ検証できるということではない．ここにいくつかの例がある．

演習問題 2.16　(三つの指定された任意の純粋状態 m，μ と $\mathbf{r}$ に対する) 遷移確率 $\Pi_{\mathbf{r}\mu}$ および $P_{\mu m}$ が与えられているとして，遷移確率 $\mathbf{P}_{\mathbf{r}m}$ の許される値の範囲はどうなるか?

---

[18] M. Roos, *J. Math. Phys.* 5 (1964) 1609; 6 (1965) 1354 (erratum).

[19] G. Auberson, *Phys. Letters B* 216 (1989) 167.

[20] 異なった検証の結果を示すには異なった文字の添字を使うとよい．これによって，混乱が避けられる．

演習問題 2.17　一つの粒子源，二つの独立な散乱体と 1 台の検出器を考えよう．もし散乱体 A (あるいは B) のみが存在しているなら，検出器は強度 I_A (あるいは I_B) を記録する．もし両方の散乱体が存在しているなら，検出器は強度 I_{AB} を記録する．次式を示せ．

$$(I_{AB} - I_A - I_B)^2 \le 4\, I_A\, I_B \tag{2.17}$$

演習問題 2.18　前出の演習問題で記述された実験設定に，3 番目の散乱体 C を追加しよう．上と同じように，強度 I_C，I_{BC} および I_{CA} を定義する．さらに無次元パラメーターを次式で定義する．

$$M_{AB} = (I_{AB} - I_A - I_B)/2\sqrt{I_A I_B} \tag{2.18}$$

M_{BC} と M_{CA} も同様に定義する．粒子源から放出された粒子が純粋状態にあるならば，

$$M_{AB}{}^2 + M_{BC}{}^2 + M_{CA}{}^2 - 2\, M_{AB}\, M_{BC}\, M_{CA} = 1 \tag{2.19}$$

であることを示せ．そのさい，六つの異なった実験の結果を含むこの関係式が，(純粋状態であること以外は) 粒子の性質にも，また散乱体の性質にも一切よらないことに留意せよ[*21]．　★

2.7　付録：ベイズの統計推論の規則

量子論で重要なのは，特定の準備に続く検証の結果に対する**確率**を予言する能力である．量子力学は実在についての理論ではない．それは，過去の情報から未来に対する可能で最良な予言をする処方箋である[*22]．もし，どの検出器が種々の事象の発生を検出するか賭けたいとき，量子論の理論家ならば，**勝ち目があるかどうか**を教えることができる[*23]．理論家の中には実際，未来の事象の確率を予言することに従事している者もいる．彼らはまだ測られていない断面積を計算したり，まだ観測されていない遷移確率を予言している．

だが，もっとふつうに行われているのは時間に逆行した予言 (retrodiction) である．つまり，検証の結果は与えられ，推測しなければならないのがどのように準備されたのかなのである．図 1.3 を見ていただきたい．そこに二つの光電管がそれぞれ 4 個と 3 個の事象を記録していたとする．偏光板の方向についてどのように推論することができるか? もう一つ別の広く行われている実験として C^{14} を検出し，その崩壊の個数を数えたとしよう．化石はどれぐらい古いのか? “逆の確率” 問題は人間の活動の多くの局面で，知識収集から産業的な品質管理まで，かなり重要なことである．この問題

[*21] この結果は，複素数を用いる量子論と実験的に四元数を用いる量子論を区別するために使うことができる．A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979) 683.

[*22] G. ’t Hooft, *J. Stat. Phys.* 53 (1988) 323.

[*23] だめな理論家に彼の統計的予言が間違っているということを納得させることは，どんな実験的証拠でもできないだろう．せいぜいできることといったら，賭事に熱中している彼を破産させてやることぐらいだろう．

に関しては，膨大な (しばしば論争がある) 文献があるが，それらに精通していない読者のために，以下に簡単に解説しよう．

二つの統計的に関連した事象 A と B を考えよう．たとえば，B は図 1.3 の実験結果である．そこでは上の光子検出器は 4 回，下の光子検出器は 3 回鳴った．(これが**一つの**実験であって，七つの実験の組ではないということに注意せよ.) 同じく，A はその実験で偏光板が角度 θ と $\theta + d\theta$ の間に位置することである．さて 2.1 節で導入された**統計アンサンブル**という概念を思い起こそう．あるアンサンブルで (すなわち同じ系の概念上の複製が無限個存在する)，事象 A と B の**相対頻度**はそれぞれ確率 $\mathbf{P}\{A\}$ および $\mathbf{P}\{B\}$ を定義する．さらに二つの概念を導入しよう．

$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B \cap A\}$ は事象 A と B の**共通確率**である．これは考えている統計アンサンブルで，**両方の**事象が発生する相対頻度である．

$\mathbf{P}\{A|B\}$ は，B が真のとき A が起こる**条件確率**である．同様にして，$\mathbf{P}\{B|A\}$ は逆の場合の条件確率である．

これらすべての確率は，与えられたアンサンブルでの事象の種々の組合せの相対頻度として定義されているので，次式が得られる．

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A|B\}\,\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{B|A\}\,\mathbf{P}\{A\} \tag{2.20}$$

これからベイズの定理が導出される[*24,*25]．

$$\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{B|A\}\,\mathbf{P}\{A\} \,/\, \mathbf{P}\{B\}. \tag{2.21}$$

私たちが使っている物理理論のおかげで，この方程式の $\mathbf{P}\{B|A\}$ は知られていると仮定しよう．たとえば，図 1.3 の実験では，理論から上下の光子検出器を励起する確率はそれぞれ $\cos^2\theta$，$\sin^2\theta$ であることがわかる．したがって，二項分布から，

$$\mathbf{P}\{B|A\} = \frac{7!}{4!3!}\cos^8\theta\,\sin^6\theta \tag{2.22}$$

が得られる．

図 1.3 の問題は偏光板の方向 θ を推定することであることを思い出そう．式 (2.22) を利用するには，さらに $\mathbf{P}\{A\}$ と $\mathbf{P}\{B\}$ が必要である．これらの確率を理論から計算することもできないし，経験的に決定することもできない．それらはもっぱら私たちが頭の中で考えている統計アンサンブルによっている．タイプ A の事象の**完全な**組を考え，それらを $A_1, A_2, \cdots$ とよぼう．たとえば，A_j は角度 θ_j と $\theta_j + d\theta_j$ の間に偏光板が位置していることを表している．完全性によって $\sum_j \mathbf{P}\{A_j\} = 1$，したがって，

$$\mathbf{P}\{B\} = \sum_j \mathbf{P}\{B|A_j\}\,\mathbf{P}\{A_j\} \tag{2.23}$$

---

*24 T. Bayes, *Phil. Trans. Roy. Soc.* 53 (1763) 370; リプリント版 *Biometrika* 45 (1958) 293.

*25 共通確率は共存できる事象に対してのみ存在する．特に，共存できない検証の結果に対してはいかなる共通確率も定義できない．それゆえにベイズの定理は式 (2.4) のような量子条件確率には適用されない．なぜならそれらは異なった実験設定に関連しているからである．

である．この段階で，ベイズの**仮定**(これはベイズの**定理**と同じものではない！)をふつうは導入する．この仮定は"無関心の原理"，あるいは"不十分な理由の原理"ともよばれている．もし偏光板を置いた人が特定な方向を好むという理由がないならば，すべての方向が等しく選ばれそうで，その結果すべての θ に対して $\mathbf{P}\{A\} = d\theta/\pi$($\theta$ と $\theta + \pi$ は同等であるから，常に $0 \leq \theta < \pi$ ととれる) である．そこで式 (2.23) から，

$$\mathbf{P}\{B\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 35\,\cos^8\theta\,\sin^6\theta\,d\theta \tag{2.24}$$

を得て，さらにベイズの定理 (2.21) から，

$$\mathbf{P}\{A|B\} = \frac{35}{\pi}\,\cos^8\theta\,\sin^6\theta\,d\theta/\mathbf{P}\{B\} = \frac{2^{11}}{5\pi}\,\cos^8\theta\,\sin^6\theta\,d\theta \tag{2.25}$$

が得られる．

演習問題 2.19　上式を確かめ，右辺を θ の関数として図に描け．この関数の最大値はどこにあるか? それらはどのくらい鋭いか?　⋆

演習問題 2.20　同じ未知の方向に直線偏光した正確に 10^6 個の光子とそれに直交する方向に直線偏光した正確に 10^6 個の光子を完全反射箱の中に打ち込む*9．その箱の中で光子は偏光の向きを変えることなく運動するとしよう．これらの光子が箱に打ち込まれる順序は一切記録されていない．(ただ合計の光子数だけが記録されている.) このとき，これらの光子がどの方向に偏極しているか決定することができるか?　**ヒント**：まず正反対向きに偏光した 1 対の光子から始めて，2 対，3 対のように増やして考えてみよ．すぐに，光子を一つずつ検証するなら，たとえ完全な光子検出器をもってしても，結果は，光子全体を含む組み合わされた一つの検証よりかなり効率が低いとわかるであろう．これ以上のヒントは，141 ページの演習問題 5.27 を参照せよ．　⋆⋆

演習問題 2.21　1 eV のエネルギーをもつ光子 1 個が，遠くの光源から到着した．この光源が熱スペクトルをもっていると仮定し，その温度を推定せよ．　**ヒント**：温度に対して何らかの演繹的な確率分布を仮定しなければならない．そしてその場合のみ帰納的な確率を推定することができる．　⋆

演習問題 2.22　2 番目の光子が前出の演習問題の光源から到着し，そのエネルギーが 0.01 eV と観測されたとしよう．このとき，依然として光源が熱放射を放出していると信じることができるか?　**ヒント**：プランク分布からランダムに選ばれた 2 光子が 100 倍以上異なるエネルギーをもっている確率はどれくらいか?　⋆⋆

2.8 参 考 文 献

ベイズ統計の簡単な解説は前節で与えられた．確率データの分析については膨大な数の文献がある．その中で，次の 2 冊は素晴らしい本である．

S. L. Meyer, *Data Analysis for Scientists and Engineers*, Wiley, New York (1975).

C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York (1976).

これらの本で採用された方法を比較するのは興味深い．メイヤーは実験科学者の習慣に従い，ランダム変数の最もありそうな値と，この最もありそうな値からのずれの可能性を与える信頼度の計算法を示している．他方，ヘルシュトロームは，唯一の，曖昧さのない出力を出さなければならない通信エンジニアの見地から問題を提起している．この場合，検出と推定のエラーが起こるかもしれない．任意の“代価”がそれぞれのタイプのエラーに割り当てらるが，そのさい問題は，不可避のエラーのためにメッセージの受取人が払わなければならない代価を最小にすることである．

推 薦 図 書

R. T. Cox, “Probability, frequency, and reasonable expectation,” *Am. J. Phys.* 14 (1946) 1.

R. Giles, “Foundations for quantum mechanics,” *J. Math. Phys.* 11 (1970) 2139.

3
複素ベクトル空間

3.1 重ね合せの原理

量子遷移が式 (2.10) を満足するユニタリー行列 $C_{\mu m}$ で記述されることを見てきた．読者の便宜のためにここにその式を再び表示しよう．

$$\sum_{\mu} \overline{C_{\mu m}}\, C_{\mu n} = \delta_{mn} \tag{3.1}$$

これによって，これらの行列が作用する複素ベクトルを導入できることが示唆される．その複素ベクトルは，これからわかるように，物理的に**純粋量子状態** を意味する．これらの N 次元複素ベクトルを表すのに**サンセリフ体**文字を使い，一方，慣習にならってユークリッド 3 次元空間の通常の実ベクトルに対して**ボールド体**文字を使おう．

この新しい種類のベクトルをしらべよう．最初に，線形代数の加算規則を満たすために，それらの複素成分は，ユニタリー行列の添字に合うように，m とか μ のような添字で区別されていなければならないことを注意しておく．これらの添字が最大量子検証の結果を，つまり純粋量子状態を示していることを思い起こそう (2.4 節を参照)．他方，式 (3.1) は，ユニタリー行列が実ユークリッド回転を表すよく知られた直交行列を複素数領域へ拡張したものであることを示している．したがって次のような考えを試みよう．最大検証をどう選択するかはユークリッド幾何学での座標系の選択に類似しており，最大検証したさいの種々の結果に対応する純粋状態は直交座標軸に沿っての単位ベクトルに類似している．

これらの単位ベクトルを記号 e_μ，e_m などによって表す．こうした記号を用いて，e_m は “ローマ文字の検証” の結果 m に対応する純粋状態，e_μ は “ギリシャ文字の検証” の結果 μ に対応する純粋状態，などと区別する．ユニタリー行列 $C_{\mu m}$ の真っ先に思い浮かぶ役割は，一つの基底から別の基底への変換法則を表現することである．

$$\mathsf{e}_\mu = \sum_m C_{\mu m}\, \mathsf{e}_m \tag{3.2}$$

しかし，勝手に上記の関係を置くことができるわけではない．そこに現れるユニタリー行列が実験で得られる遷移振幅を表しているのである．したがって式 (3.2) は**物理的意味をもっており**，無矛盾であるというチェックを受けなければならない．実際，結果

がボールド体の添字で表される3番目の最大検証を考えよう．今までと同じように，

$$\mathsf{e}_{\mathbf{r}} = \sum_{m} \mathbf{C}_{\mathbf{r}m}\,\mathsf{e}_m \qquad \text{および} \qquad \mathsf{e}_{\mathbf{r}} = \sum_{\mu} \Gamma_{\mathbf{r}\mu}\,\mathsf{e}_\mu \tag{3.3}$$

となる．ここで $\mathbf{C}_{\mathbf{r}m}$ と $\Gamma_{\mathbf{r}\mu}$ は，それぞれ状態 m と μ から 状態 $\mathbf{r}$ への遷移振幅を表すユニタリー行列である．式 (3.2) と (3.3) が首尾一貫しているためには，

$$\mathbf{C}_{\mathbf{r}m} = \sum_{\mu} \Gamma_{\mathbf{r}\mu}\,C_{\mu m} \tag{3.4}$$

でなければならない．この結果は以前，純粋に現象論的理由で見いだされた式 (2.16) の遷移振幅の合成則と同じものである．この一致は私たちが正しい道を進んでおり，量子現象の記述には正に複素ベクトル形式が適切であることを示している．

演習問題 3.1 次式を証明せよ．

$$\mathsf{e}_m = \sum_{\mu} \mathsf{e}_\mu\,\overline{C_{\mu m}} \tag{3.5}$$

演習問題 3.2 図 1.6 のように，お互い 120° の角度で傾けられた磁石をもつ，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対する三つの異なったシュテルン–ゲルラッハの実験を考えよう．一つの基底からもう一つ別の基底へ変換する行列を見いだして，式 (3.4) が満たされていることを確かめよ．

演習問題 3.3 上の演習問題をスピン 1 の粒子の場合について繰り返せ． ⋆

式 (3.2) がうまくいったから，今度は一次結合として，一般的に**ベクトル**を定義しよう．

$$\mathsf{v} := \sum_{m} v_m\,\mathsf{e}_m \tag{3.6}$$

複素数の係数 v_m はベクトルの**成分**である．ベクトルであればどのようなものでも純粋状態を表すことが後でわかるだろう．しかし，まず式 (3.6) のような表式に数学的な意味を与えるいくつかの形式的規則が必要である．

$\mathsf{u} := \sum u_m \mathsf{e}_m$ をもう一つのベクトルとしよう．等式 $\mathsf{u} = \mathsf{v}$ は u と v の対応する成分が等しいこと，つまり $u_m = v_m$ であることを意味している．ベクトルの**和**とそのスカラー (複素数，古い文献ではよく c 数とよばれている) **倍**はベクトルの各成分に対してそのように演算することとして定義される．それゆえベクトルは**線形空間**をつくる．つまり，もし u と v がベクトルであり，α と β が複素数であるなら，$\mathsf{w} = \alpha\mathsf{u} + \beta\mathsf{v}$ は $w_k = \alpha u_k + \beta v_k$ を成分としてもつベクトルである．**ゼロベクトル0** はそのすべての成分がゼロであるものとして定義される．

量子論の基本教義は次の仮定である．

> G. **重ね合せの原理** 任意の複素ベクトルは，ゼロベクトルを除いて，実現可能な純粋状態を表す．

残念ながら，このように大雑把に宣言しても，与えられたベクトルによって表される純粋状態を準備する装置をどのようにデザインするかは教えられるものではない．1.4節で説明したように，指定された準備に続く検証の結果に対する確率を量子論によって計算することができるだけである．しかし，理論が(ちょうどユークリッド幾何学が定規とコンパスの製法を教えていないように)，実際に準備と検証として用いられる実験室での手順の設定について指示を与えてくれるわけではない．利用可能なあらゆる装置を使う物理学者がこれらの手順を考え出し，彼らのデザインは，**帰納的に**量子論の助けを借りて，解析することができるのである．

重ね合せの原理 G が一般的に成り立っているわけではないという主張を聞くことが多い．つまり理論家が書くことができるすべてのベクトルが実験的に実現可能であるわけではない．現実には達成できない理論的状況(超高エネルギー，極低温など)が工学の予見可能な範疇を越えてることは事実である．装置を設計する私たちの能力は常に，既存の材料の有限の強さ，あるいは絶縁破壊せずに高電圧に耐える性能のような，現実の物理的拘束によって制限される．さらに，**情報の蓄積と処理**に対する実際上の制約が，多数の自由度をもっている**巨視的**系の純粋状態の実現を極端に難しく(“不可能” といってもよい)する．にもかかわらず，**有限**個の状態数をもっている量子系に対して重ね合せの原理が成り立たないかもしれないとする議論に説得力はない．実験物理学者の発明の才能は決して過小評価すべきではない!

重ね合せの原理によって提起されるもう一つの問題は，前と逆の命題である．所定の実験的な手順によって指定された，純粋状態を表す成分 v_m の値を，どのように決定することができるか? ここで再び，助けになる指針はユークリッド・ベクトルとのアナロジーである．ユークリッド・ベクトルは，変位，運動量，力などのような，**物理的意味**をもてる．その成分はいろいろな物理量の任意の三つの直交軸への射影である．異なる軸を選べば，**同じ**ベクトルでもその成分に異なる値を与えることになる．ある座標軸系を選択して初めて，ベクトルの成分が明確な値を得るのである．

量子論でも，同じく異なる基底で**同じ**ベクトルを表すことができる．たとえば，式(3.6)によって与えられたベクトル v は，

$$\mathsf{v} = \sum_{\mu} v_{\mu}\, \mathsf{e}_{\mu} \tag{3.7}$$

とも書き下すことができる．そして，変換則(3.2)および(3.5)から，

$$v_m = \sum_{\mu} v_{\mu}\, C_{\mu m} \qquad \text{および} \qquad v_{\mu} = \sum_{m} \overline{C_{\mu m}}\, v_m \tag{3.8}$$

となる．ベクトル**成分**の変換則は，式(3.2)または(3.5)にある基底ベクトルの変換則の**逆**であることに注意しよう．二つの成分の組，v_m と v_{μ} は**同じ**物理的な状態の二つの異なる表現であることをはっきりさせておく．

さて簡潔に成分 v_m(あるいは v_{μ})を実験で決める方法を概説しよう．任意の検証を行えば，その結果に対する確率によって一つの状態が定義されていることを思い起こ

そう．v を準備するための手順が指定されているので (これは，現在の問題が定式化されたときの仮定であった)，状態 v にある量子系の複製はいくらでも望むだけつくることができる．それゆえに，任意の精度で，状態 v にある系に対して行う種々の最大検証の結果 e_m, e_μ, $\cdots$ の起こる確率を測定できる．換言すれば，状態 v から状態 e_m, e_μ, などへの遷移確率 $P_{m\mathbf{v}}$, $\Pi_{\mu\mathbf{v}}$, $\cdots$ を得ることができる．そのような十分なデータで，$C_{m\mathbf{v}}$ のような複素振幅を計算できる．それから最終的に式 (3.6) の係数 v_m が得られる．この概念上のプログラムの実行をするには，以下で述べられる新たな数学的道具を必要とする．

3.2 距離の性質

ユークリッド空間における直交変換は $|\mathbf{A}| = [\sum(A_k)^2]^{1/2}$ によって定義されるベクトルの**長さ**を保存している．複素ベクトル空間でも同じように**距離構造**を導入し，ベクトルの**ノルム**[*1]を

$$\|\mathsf{v}\| := \left[\sum |v_m|^2\right]^{1/2} \tag{3.9}$$

によって定義しよう．ベクトルのノルムは，それがゼロベクトル 0 でない限り，常に正値である．ノルムが 1 であるベクトルは**規格化**されているといわれる．ゼロでないベクトルを，そのノルムで割ることによって規格化することは常に可能であり，そうするとたいてい都合が良い．

一次結合 $\alpha\mathsf{u} + \beta\mathsf{v}$ に対して，

$$\|\alpha\mathsf{u} + \beta\mathsf{v}\|^2 \equiv |\alpha|^2\,\|\mathsf{u}\|^2 + |\beta|^2\,\|\mathsf{v}\|^2 + \overline{\alpha}\beta\sum_m \overline{u_m}v_m + \alpha\overline{\beta}\sum_m u_m\overline{v_m} \tag{3.10}$$

である[*2]．

$$\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle := \sum_m \overline{u_m}\,v_m \tag{3.11}$$

は，ベクトル u と v についての**スカラー積**(あるいは**内積**) とよばれる．これは普通のユークリッド・ベクトルのスカラー積の自然な一般化になっている．$\langle\mathsf{v},\mathsf{v}\rangle \equiv \|\mathsf{v}\|^2$ に注意せよ．二つのベクトルは，そのスカラー積がゼロになれば，**直交している**とよばれる．ゼロでない α と β に対して $\alpha\mathsf{u} + \beta\mathsf{v} = 0$ を満足する二つのベクトルは，**平行である**とよばれる．

スカラー積 $\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle$ がその 2 番目の変数に関して線形であることは容易にわかる．

$$\langle\mathsf{u},\alpha\mathsf{v} + \beta\mathsf{w}\rangle \equiv \alpha\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle + \beta\langle\mathsf{u},\mathsf{w}\rangle \tag{3.12}$$

[*1] 著者によっては，ノルムの記号として $\|\mathsf{v}\|$ のかわりに $|\mathsf{v}|$ を採用している．

[*2] ここでの表記法は，スカラー積を (u,v) と書く数学者が使うものと，物理学者の間で非常によく知られているが，正しく使わないと紛らわしいディラックの表記法 $\langle\mathsf{u}|\mathsf{v}\rangle$ との中間のものである．ディラックの表記法は章末の付録で説明する．

そして 1 番目の変数に関して“反線形”である．

$$\langle \alpha \mathsf{u} + \beta \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \equiv \overline{\alpha} \langle \mathsf{u}, \mathsf{w} \rangle + \overline{\beta} \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \tag{3.13}$$

しかもスカラー積は

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle \equiv \overline{\langle \mathsf{v}, \mathsf{u} \rangle} \tag{3.14}$$

を満足している．この性質をもっている二次形式は**エルミート**であるといわれる．

演習問題 3.4 ベクトルのノルムがユニタリー変換の下で不変であることを示せ*3．

$$\sum_{\mu} |v_\mu|^2 = \sum_{m} |v_m|^2 \tag{3.15}$$

演習問題 3.5 “平行四辺形則”

$$\|\mathsf{u} + \mathsf{v}\|^2 + \|\mathsf{u} - \mathsf{v}\|^2 = 2\,\|\mathsf{u}\|^2 + 2\,\|\mathsf{v}\|^2 \tag{3.16}$$

を証明せよ．

演習問題 3.6 ノルムがスカラー積を完全に決定することを示せ．

$$\|\mathsf{u} + \mathsf{v}\|^2 - \|\mathsf{u} - \mathsf{v}\|^2 + i\,\|\mathsf{u} - i\mathsf{v}\|^2 - i\,\|\mathsf{u} + i\mathsf{v}\|^2 = 4\,\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle \tag{3.17}$$

この性質はたいへん便利で，しばしば利用する．たとえば，式 (3.15) と (3.17) から，スカラー積 $\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle$ が**ユニタリー変換の下の不変**である (これが，**スカラー積**とよぶ理由である) ことはただちに出てくる．

シュワルツの不等式

重要な性質はシュワルツの不等式である．

$$|\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle|^2 \leq \|\mathsf{u}\|^2 \|\mathsf{v}\|^2 \tag{3.18}$$

これは

$$\mathsf{v} \equiv \mathsf{u} \frac{\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle}{\|\mathsf{u}\|^2} + \left(\mathsf{v} - \mathsf{u} \frac{\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle}{\|\mathsf{u}\|^2} \right) \tag{3.19}$$

から容易に証明される．右辺の第 1 項は u に平行なベクトルである．残りの項は，u とのスカラー積をとればすぐにわかるように，u に直交している．これらの二つの項はそれゆえにお互いに直交しており，

$$\|\mathsf{v}\|^2 \equiv \frac{|\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle|^2}{\|\mathsf{u}\|^2} + \left\| \mathsf{v} - \mathsf{u} \frac{\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle}{\|\mathsf{u}\|^2} \right\|^2 \tag{3.20}$$

---

*3 $\sum |v_m|^2$ ではなく $\sum (v_m)^2$ のような平方和を保つ複素直交変換を定義することも可能であるが，こうした和は量子論では役に立たない．

が成り立つ．よってシュワルツの不等式が導かれる．さらに，式 (3.18) において等号は，式 (3.20) の最後の項がゼロになるとき，すなわち u と v が平行のとき，またそのときにのみ成り立つ．

シュワルツの不等式の帰結として有用なのは次の**三角不等式**である．

$$\|\mathsf{u}\| - \|\mathsf{v}\| \leq \|\mathsf{u} + \mathsf{v}\| \leq \|\mathsf{u}\| + \|\mathsf{v}\| \tag{3.21}$$

証明は読者に任せる．

正規直交系

完全正規直交系とは N 個のベクトル，e_a，e_b，$\cdots$ の組で，次の式を満足するものである．

$$\langle \mathsf{e}_m, \mathsf{e}_n \rangle = \delta_{mn} \tag{3.22}$$

これらの単位ベクトルの物理的解釈を思い起こそう．それらは最大検証 の異なった結果に対応している純粋状態を表している．ベクトルの定義 (3.6) と式 (3.22) から，

$$v_m = \langle \mathsf{e}_m, \mathsf{v} \rangle \tag{3.23}$$

が導かれる．逆もまた真である．実際，もし v_m が式 (3.23) で定義され，e_m が**完全**系であるなら，

$$\|\mathsf{v} - \sum v_m \mathsf{e}_m\|^2 = \|\mathsf{v}\|^2 + \sum |v_m|^2 - \sum \overline{v_m} \langle \mathsf{e}_m, \mathsf{v} \rangle - \sum \langle \mathsf{v}, \mathsf{e}_m \rangle v_m \tag{3.24}$$

である．この式の右辺は式 (3.9) と (3.23) よりゼロになる．$\mathsf{v} - \sum v_m \mathsf{e}_m$ がゼロベクトルであることが導かれ，したがって式 (3.6) が成り立つ．

いま $\mathsf{u}_\alpha, \mathsf{u}_\beta, \cdots$ を，

$$\langle \mathsf{u}_\mu, \mathsf{u}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \tag{3.25}$$

となっているもう一つ別の正規直交系 (もう一つ別の最大検証の結果に対応している) としよう．変換則 (3.2) から，

$$C_{\mu m} = \langle \mathsf{e}_m, \mathsf{e}_\mu \rangle \tag{3.26}$$

が得られる．すなわち，状態 m から μ への遷移確率が

$$P_{\mu m} = |C_{\mu m}|^2 = |\langle \mathsf{e}_m, \mathsf{e}_\mu \rangle|^2 \tag{3.27}$$

であることが導かれる．

特に，以下で示されるように，すべての μ と m に対して $P_{\mu m} = 1/N$ を満足するような正規直交系をつくることが可能である．これらの系は “可能な限り異なって” い

て，**相互に偏向**していないといわれる．たとえば，偏極した光子の場合，垂直対水平方向の直線偏光に対する検証，±45° の 2 本の直線偏光に対する検証，そして時計回り対反時計回りの円偏光に対する検証はお互いに公平となっている．これらの検証の一つを通った 1 光子が，次に別のある検証を受けるとき，この 2 番目の検証の二つの可能な結果をとる確率は等しい．公平となっている系のいくつかの例は，演習問題 2.12 で与えられている．もし N が素数なら，$N+1$ 個のお互いに公平な系を常に見つけられることを示せる[*4,*5]．

最も簡単な，偏向していない系は離散的フーリエ変換から導ける．

$$\mathsf{e}_m = N^{-1/2} \sum_{\mu} \mathsf{e}_\mu \, e^{2\pi i \mu m/N} \qquad (m, \mu = 1, \cdots, N) \tag{3.28}$$

式 (3.28) を満たす量子検証は**相補的**とよばれる[*6]．10 章で，こうした検証が古典論の正準共役な力学量の測定に対応する量子論における同類であることがわかるだろう．

3.3 量子期待値則

複素ベクトルと物理的純粋状態の間の対応は 1 対 1 ではない．量子論はお互いに**平行**なベクトルを**同じ**物理的な状態を表すものと見なす．ノルムが 1 であるように，ベクトルを，そのノルムで割ることによって**規格化**すると，都合の良いことが多い．しかし，位相の任意性は依然として残る．なぜなら v と $e^{i\theta}\mathsf{v}$ は，任意の実数 θ に対して，同じノルムをもっているからである．この位相の任意性は量子論の本質的特徴である．重ね合せの原理があるため，この任意性を排除することはできない．任意の二つの状態 u と v が与えられているとしよう．一次結合，$\mathsf{u}+\mathsf{v}$ と $\mathsf{u}+e^{i\theta}\mathsf{v}$ は，物理的に実現可能な状態であるが，図 1.4 で描かれている光子の偏極状態に関する簡単な例によって示されるように，同等ではない．

もし平行なベクトルが同じ物理的状態を表すなら，**直交**したベクトルの意味は何であろうか? 直交したベクトルは直交系基底の要素となりうる．これによって，重ね合せの原理 G を次のように拡張すべきことが示唆される．

G*．**強い重ね合せの原理**　任意の直交系は実現可能な最大検証を表す．

つまり，式 (3.6) の v のような個々のベクトルが実験的に実現可能であるばかりでなく，任意の互いに直交したベクトルの完全系は，最大量子検証の形で物理的に実現可能なものである．

最大検証の異なった結果に対応している直交状態は，古典物理学における “異なる状態” の量子論での同類である．もし系が**与えられた直交状態の一つ**(それらの一次結合ではなく) に準備されていると確実にわかっていれば，適当な最大検証によって，はっきりと状態を同定することができる．

---

*4 I. D. Ivanovic, *J. Phys. A* 14 (1981) 3241.
*5 W. K. Wootters, *Found. Phys.* 16 (1986) 391.
*6 J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 46 (1960) 570.

直交していない状態

一般的な場合は，二つのベクトルが平行でも，直交でもない状況である．これらのベクトルは，同一でも，まったく異なっているわけでもなく，“部分的には似た” 物理的状態に対応する．たとえば，互いに角度 α をなして直線偏光している 2 個の光子は部分的に似ている．直線偏光状態の一つに準備された光子が，もう一方の直線偏光に対する検証をパスするという確率はゼロではなく，$\cos^2\alpha$ である．

この部分的類似性は量子物理学に特有のことではない．古典の位相空間でも，二つのリウビル密度 $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p})$ と $f_2(\mathbf{q},\mathbf{p})$ が部分的に重なり合うことがある．たとえば，二つの異なった仕方で与えられた振り子を放すとしよう．ただし，これらの一つ一つでは，初期の座標と運動量は完全な精度では制御されていないとする．その場合，これらの二つの異なった準備手順に対応している位相空間領域は有限の大きさをもっていることになる．図 3.1 に示されるように，それらは共通要素をもたないかもしれないし，あるいは部分的に重なり合っているかもしれない．いわばこの図が，**1 個の**振り子の古典的 $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ に関する知識が不完全であることを表しているのだ．この不完全な知識を表すリウビル密度を使うことは次の意味をもっている．この振り子の**同じ無限個の複製**の存在を想定しよう．(すなわち，2.1 節で説明された**統計アンサンブル**を想定している.) これらすべての概念上の複製は二つの不完全にしか制御されていない準備手順のうちの一つに従ってつくられ，したがってその結果として生ずる $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ は位相空間での点の集合である一つの雲によって表される．この雲の点密度が使われた一つの準備手順に対応するリウビル密度 $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p})$ または $f_2(\mathbf{q},\mathbf{p})$ の濃度である．

いま，観測者が二つの準備のいずれが実際に実行されたかを決定したいとしよう．たとえ，その観測者が理想的な測定の手段によって正確に $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ の場所を突き止めることができるとしても，得られた結果から，いずれの “雲” に属するかはっきりとはいえず，**確率**で答えることができるだけである．

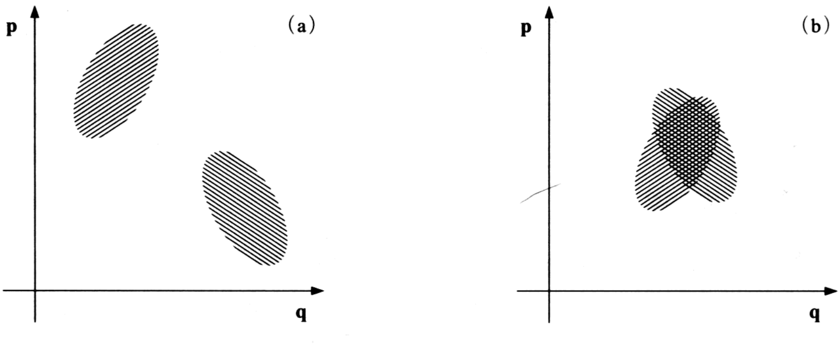


図 3.1　二つの異なった古典的準備手順の結果が，直交する方向に引かれた斜線で示されている．楕円の大きさは予想される装置の誤差を表している． (a) 二つの楕円の重なり合いがなければ，観測者はどちらの方法が使われたか確実に推定できる． (b) 重なり合いがあれば，二つの方法に確率をあてることができるだけである．

量子論によって導入された新しい特徴は測定の結果の統計的性質が準備あるいは測定器の不完全性に起因するのではないということである．それは量子物理学に固有の事柄である．**純粋**量子状態は古典的**統計アンサンブル**に類似している[*7]．それゆえに，意味があるのは，力学変数の値に関する質問ではなく，特定の準備がなされた確率に関する質問である．これはずっと健全なアプローチである．量子論の力学変数は，私たちの頭の中にのみ存在する抽象的概念である．実験的準備は実験室に存在するのである．

確率解釈

一般的に，v で準備された量子系に対してはいつでも成功し，v に直交する状態に準備された系に対してはどんなものでも必ず失敗するものとして状態 “v に対する検証” を定義しよう．これは最大検証である必要はない．ただ v に直交するすべての状態から v を選び出すものでありさえすればよい．量子論の基本的な結果は次の規則である．

> H.　**量子期待値則**　u と v を二つの規格化されたベクトルであるとしよう．u の状態に準備された量子系が状態 v に対する検証にパスする確率は $|\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle|^2$ である．

2.4 節の記号でいえば，これは

$$P_{\mathbf{vu}} = |\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle|^2 \tag{3.29}$$

を意味する．この式は式 (3.27) と強い重ね合せの原理 $\mathrm{G}^\star$ からの自明な結果である．(もし $\mathrm{G}^\star$ の妥当性を仮定していなかったなら，H を新しい独立の仮定と考えなければならないであろう.)[*8]

式 (2.4) によって表された相反則 D は，いまやスカラー積のエルミート性 (3.14) の自明な帰結となる．逆に，もし相反則 D が実験的に偽と示されたなら，期待値則 H を取り下げなければならず，またここで提案された複素ベクトル形式すべては物理的解釈を欠くことになる．

3.4　物理的遂行

量子論の抽象的な数学形式を，実験室で実際に行える観測に関連づけているのは確率則 H である．この規則はすでにあげられているいろいろな仮定から導くことができる．その導出のすべてのステップはその前のステップのもっともらしい拡張である．H の導出の道筋をたどり直してみると，最も弱い根拠は**遷移振幅の合成則** (仮定 F，40

[*7] I. R. Senitzky, *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981) 1503.

[*8] 仮定 $\mathrm{G}^\star$ を合理性のある連続性仮説と合わせると，グリーソンの定理を導くことが可能である (7.2 節参照)．その定理は量子期待値則を純粋ではない状態に一般化している．

ページ) である．それは，私たちが古典場の理論になじんでおり，それによって影響された経験から割り出した推測にほかならないからである．

それに対して，量子論は，いま適当な道具を集めているのであるが，将来いつかは不満足であることが判明し，いっそう精密な理論にとって代られるかもしれない．(ちょうどニュートン力学が特殊相対論によって，次いで一般相対性理論によってとって代られたように.) 量子論を捨てる (あるいは改訂する) 必要が，私たちがより小さい時空領域，もっと強い重力場，生物系，あるいはその他の思いがけない現象を探れるようになれば，起こるかもしれない．だがより緊急な作業は，理論内部の首尾一貫性を確かめることである．これまで述べてきた論議はすべて理想的な最大検証に関わっており，現実の実験室の手順はそれを**近似**できるだけにすぎない．この本の最終章で "観測問題" を扱っている．それによって量子系に関しての実験者の仕事がより詳細に記述できよう．現段階では，穏やかな操作上の意味で期待値則のもう一つ別のバージョンを提案しよう．

> **I. 量子期待値則 (操作的バージョン)** 任意の二つの規格化されたベクトル u および v に対して，次の性質をもつ実験的な検証手順を設計できる．状態 u に対する検証を確実に通る量子系は，状態 v に対する検証を $|\langle u, v\rangle|^2$ という確率で通る．その逆の場合にも当てはまる．

この新しいバージョンは H よりいっそう明白であるが，まだ完全に満足すべきものではない．量子検証は超自然事象ではない．それは普通の物質に関わる物理過程である．私たちの検証装置は普通の物理法則に従う．もしこうした明白な事実を無視して，いま行っているように量子検証を原始的な概念として取り扱うなら，物理学をあまりに単純化しすぎているというそしりを免れない．この問題には 12 章で戻ろう．一方，期待値則が無矛盾であるためには，力学法則が次の特別な性質をもたなくてはならないということに注意しよう．

> **J. 量子検証の力学的記述** U と V をそれぞれ状態 u と v に対する検証を行う装置としよう．これらの装置の動作を支配する力学法則は次の性質をもたなければならない．もし装置 U を常に作動させるように量子系が準備されたなら，装置 V が作動する確率は $|\langle u, v\rangle|^2$ である．逆の場合も成り立つ．

この要求が任意の u と v に対して満たされるかどうかは明らかではない．力学法則は，電荷保存，あるいは相対論的不変性，あるいは熱力学第二法則のような，破れて欲しくない物理学の原理に抵触することなく，勝手に決められるわけでない．たいてい，厳密に条件 J を満足させることは不可能である (このことは 12 章で示される) が，その条件は依然として任意に良い近似で満足させられる．

最終的に，基本的な疑問は次のものである．何が**量子検証**を量子論に支配される他の力学的過程から区別しているのか? 本物の検証の特徴はそれが**永久的記録**をつくり出

すということである．そしてその記録は観測行為に乱されることなしに，通常の手段によって観測された後で，普通の言語によって記述されることができる．誰かが実際にこの記録を観測するかどうかは重要ではない．既知の物理的法則に頼ることによって，観測が原理的に可能であって，そして矛盾する結果を与えずに，独立の何人かの物理学者によって思うままに繰り返されることができることを証明することで十分である．要約すれば，検証の結果は**客観的**事象 [他の文献の著者の中には**間主観的** (intersubjective) という術語を好んで使用している] である．

巨視的記録の堅固さ (繰り返される観測によって起こされる小さい摂動に関しての安定性) から，それには**不可逆**過程が含まれているに違いないことが示唆される．これは，まだ完全には理解されていない複雑な問題であり，11 章で論じよう．

このようにこれから先に横たわっている困難について読者に警告したので，ここで形式的で素朴なアプローチに戻ることにする．つまり，量子検証とは，解明されていない事象であるが，量子論によるはっきりとした確率規則に従って，明確で繰り返し可能な結果を与えるものである．

3.5 量子状態の決定

準備手順についてわかっている唯一の情報が，それが**純粋**状態をつくり出しているということだけだとする．(**混合**状態に関する，より一般的な場合は後で論じる.) 私たちの仕事は，対応する状態ベクトルの成分 $\mathsf{v} = \sum v_m \mathsf{e}_m = \sum v_\mu \mathsf{e}_\mu = \cdots$ を決定することである．もし無限個の系を準備して検証することができるなら，期待値則 H から任意の精度で，

$$|v_m|^2 = |\langle \mathsf{e}_m, \mathsf{v}\rangle|^2 \qquad \text{あるいは} \qquad |v_\mu|^2 = |\langle \mathsf{e}_\mu, \mathsf{v}\rangle|^2 \tag{3.30}$$

のような結果の**確率**を測ることができる．拘束条件 $\sum |v_m|^2 = \sum |v_\mu|^2 = 1$ のため，(3.30) には $2(N-1)$ 個の独立な実験データが存在する．これは，正確にこれらの複素数の**位相**を決定するのに必要なデータの数である．実際，

$$v_m = r_m\, e^{i\phi_m} \tag{3.31}$$

とおいてみよう．ここで r_m と ϕ_m は実数である．位相 ϕ_m は任意の共通の定数を除いてしか定義されないことに注意しよう．N 個の大きさ r_m は式 (3.30) のデータの最初の組によって与えられ，そして $N{-}1$ 個の相対位相は変換則 (3.8) を利用することによって次のように得ることができる．

$$|v_\mu|^2 = \left| \sum_m \overline{C_{\mu m}}\, r_m\, e^{i\phi_m} \right|^2 \tag{3.32}$$

未知の ϕ_m に対する式 (3.32) の解は，2.6 節と同じような代数的問題である．未知数の数と同数の代数方程式が存在する．したがって，データが $|v_m|$ と $|v_\mu|$ の許される値

の範囲を制限するいくつかの不等式を満たすならば，有限個の解が得られるはずである．これらの不等式は，次の例からもわかるように，**不確定性関係**という意味をもっている．

不確定性関係

2次元ベクトル空間において，式 (3.28) によって定義されるような二つの相補的な基準系を考えよう．そのとき $C_{\mu m} = (-1)^{\mu m}/\sqrt{2}$ であり，式 (3.32) によって

$$|v_\mu|^2 = \tfrac{1}{2}|\pm r_1\, e^{i\phi_1} + r_2\, e^{i\phi_2}|^2 = \tfrac{1}{2}[{r_1}^2 + {r_2}^2 \pm 2\, r_1\, r_2\, \cos(\phi_1 - \phi_2)] \tag{3.33}$$

となり，

$$\tfrac{1}{2}|r_1 - r_2|^2 \leq |v_\mu|^2 \leq \tfrac{1}{2}|r_1 + r_2|^2 \tag{3.34}$$

が得られる．たとえば，もし $v_m = \delta_{m1}$ であるなら (もし “ローマ文字” の検証の結果に不確定性がないなら)，μ の二つの値に対して $|v_\mu|^2 = \frac{1}{2}$ が得られる (“ギリシャ文字” の検証の結果に対しては最大の不確定性がある)．

例：光子の偏極

偏極した光の強いビーム (たとえばレーザーからの) を受けていて，そのビーム内の光子の偏極についての性質を決めたいとする．1.3 節ですでに，偏極が**古典**電磁気理論によってどのように記述されるかを述べた．(乱雑性が入る余地がないから) マクスウェル方程式を一つ一つの光子に適用はできないが，1 個の光子の偏極は古典的記述に類似して記述すべきである．というのは，ビームの全強度のような光子の単純な**統計的**性質は，古典電磁気理論の予言と合致しているからである．それゆえに，光子の**集合**[*9]は良い近似で古典的に扱える．図 1.4 のように，いま干渉し合っている偏極した 2 本のビームを考えよう．その図で示されている実験は非常に弱いビームで (つまり，一時に複数の光子が装置に入ることはほとんどないが，実験を通して光子の全個数は非常に大きくて，古典光学の法則が成り立つような状況で) 実行することができる．この両面性をもつ事態は，古典電気力学で使われているように，**1 個の**光子の偏極状態を線形空間で表していることを示している．この結論は当然重ね合せの原理 G と完全に一致している．

いまの議論では，偏極状態だけを扱っていることに注意しよう．光子の数 (つまり，ビームの強度) とそのビームの位置は考慮されていない．言い換えれば，方解石結晶あるいは似たような装置で検証している “量子系” は光子の**偏極**だけである．(1.5 節に

---

*9 用語 “**集合**” は，レーザーから出てくる光子のような，多数の同じように準備された物理系を意味する．現実の物理的対象である “集合” を，2.1 節で説明したような統計的議論に使われる同じ系を**概念上**複製した無限個のアンサンブルと混同してはいけない．

おけるシュテルン–ゲルラッハの実験の議論を思い起こそう．“量子系” は銀原子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ であった．原子の位置は古典的に記述することができた.)

光子の偏極を記述している線形空間は，それぞれの最大検証に対応している二つの異なる状態があるから，2 次元である．それは，位相の関係が本質的不可欠である (図 1.4 参照) から，**複素**空間である．このようにして偏極状態を列ベクトル $\binom{\alpha}{\beta}$ で表現できる．ここで成分 α と β は複素数で，規格化条件

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1 \tag{3.35}$$

を満たしている．どのような最大検証でもその二つの結果をこの 2 次元線形空間の基準ベクトルとして取って構わない．異なる検証は，すでに見たように，異なる基準ベクトルに対応している．たとえば，ベクトル $\mathsf{e}_x=\binom{1}{0}$ と $\mathsf{e}_y=\binom{0}{1}$ をおのおの，x および y 方向の直線偏光を表すことに使える．

古典的重ね合せの原理 (1.3) から，選択する単位とビームに依存し，かつどんな場合にもある共通の位相 $e^{i(kz-\omega t)}$ を含む比例定数を別にして関係式 $\alpha\sim E_x\exp(i\delta_x)$ と $\beta\sim E_y\exp(i\delta_y)$ が与えられよう．ここで，E_x と E_y は，もし無限の平面波ではなく，有限の大きさのビームを表したいなら，x と y の関数とすることもできる．光のビームの偏極が，成分 E_x と E_y の**比**とそれらの相対位相にのみ依存することに注意しよう．両方の成分に同じ数を掛けることはビームの偏極を変えないで，ただその全強度だけを変える．

いま，未知の偏極 $\binom{\alpha}{\beta}$ をもった光子に対して，x 軸と角度 θ をなす方向の直線偏光の検証がなされるとしよう．$E_x/E_y=\cos\theta/\sin\theta$ ならば，古典電磁波は強度を減ずることなしに通過する，したがって偏光状態 $\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ の光子は常にその検証に通ることがわかる．同じく，直交した偏光，すなわち $\binom{\alpha}{\beta}=\binom{-\sin\theta}{\cos\theta}$ をもつ光子は絶対に検証を通らない．一般には，

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \tag{3.36}$$

と書くことができる．ここで，

$$c_1=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{3.37}$$

かつ

$$c_2=-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{3.38}$$

である[*10]．

そしてまた，古典電磁波との類推から，直線偏光分析器を通った波の**振幅**は c_1 に比例しているので，その**強度** (ポインティング・ベクトルで与えられるエネルギー流) は $|c_1|^2$ に比例する．光子の個数で言い表せば，$|c_1|^2$，$|c_2|^2$ それぞれが，任意の 1 光

[*10] 添字 † はエルミート共役を表している．つまり，転置と複素共役の両方である．

子が検証に通る，あるいは通らない**確率**であることを意味している．式 (3.35) より $|c_1|^2+|c_2|^2=1$ である．これらすべての結果は，期待値則 H と完全に一致している．

ここで，純粋状態にある光子集合の偏極を見いだす，すなわち，一般的には複素数となる比 α/β を見いだすという問題を解くことができる．方解石結晶は，$|\alpha|^2$ と $|\beta|^2$ に比例する強度で，光のビームを二分する．これらのビーム内で，光子はそれぞれ純粋状態 $\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ にある．ここで x，y 軸は結晶の光学軸に沿って定義されている (図 1.2 を参照)．これではまだ α/β の位相が未決定のままである．その位相を見いだすために，分析器を光のビームのまわりに 45° 回転させよう．そこで，式 (3.37) と (3.38) に $\theta=45°$ を代入する．そのとき，観測される確率 $|c_1|^2$，$|c_2|^2$ は $\frac{1}{2}|\alpha\pm\beta|^2$ となり，それから α/β の位相 ($\pm i$ という符号の任意性を除いて) を得ることができる．α と β になお**共通の位相因子**を掛けてもかまわない．この共通の位相因子が共通の位相 $e^{i(kz-\omega t)}$ における原点の任意性と関係しているのは明らかである．

演習問題 3.7 上に述べられた二つの実験で測られる強度から，具体的に比 α/β を求めよ．

演習問題 3.8 円偏光を検証する 1/4 波長板を用いた類似の実験が，二つの確率 $\frac{1}{2}|\alpha\pm i\beta|^2$ を与えることを示せ．さらに，この実験の結果を前の二つの実験の結果と比較することによって，入射光子が完全に偏極していた (光子が**純粋**量子状態にあった) という主張に間違いないことをチェックしていることを示せ．

演習問題 3.9 3 次元ベクトル空間における相補的基準系に対して，式 (3.34) に類似した不確定性関係を見いだせ． ⋆

演習問題 3.10 四つの偏光フィルターが，図 3.2 に示されるように，マッハ–ツェンダー干渉計に導入されている．真中の二つのフィルターはそれぞれ垂直および水平方向に偏極した光が通過できる．光源近くのフィルターは，45° 斜めになっている．観測者の近くのフィルターは，回転させたり，取り外すことができる．もし観測者の近く

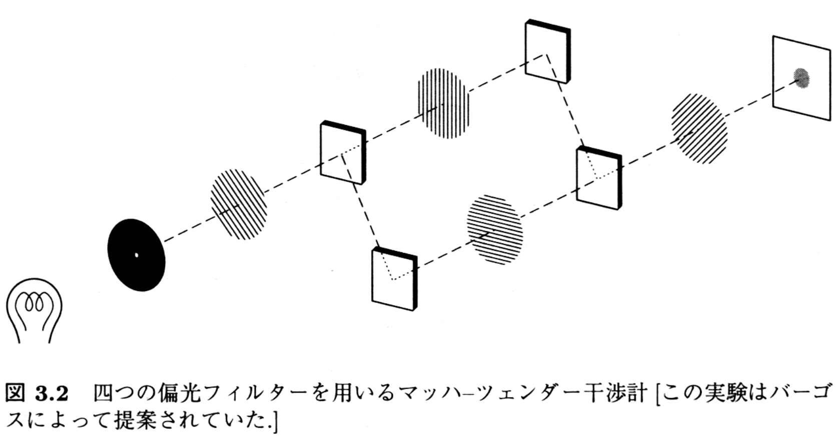


図 3.2 四つの偏光フィルターを用いるマッハ–ツェンダー干渉計 [この実験はバーゴスによって提案されていた.]

のフィルターが垂直であるか，あるいは水平であるか，あるいは存在しないなら，干渉縞が現われないことを示せ．一方，もしそのフィルターが斜めなら，干渉縞が**現れる**ことを示せ．これらの縞模様の存在が，干渉計を通過する偏極光子という観点から，どのように説明されるのか? もし光源近くのフィルターが取り去られるか，あるいは垂直あるいは水平な位置に回転させられたなら，これらの縞模様はどうなるか?

3.6 測定と力学量

意味のある量子検証には，通常古典物理学の言葉で定式化される理論的解釈が付随していなくてはならない．たとえば，もしシュテルン–ゲルラッハの検証がある一定の原子線に対して三つの異なる結果をもたらすことがわかっているなら，これらの結果を各原子の磁気モーメントの成分がとることができる値 μ，0，$-\mu$ として解釈する．検証の結果に対して明白な古典的値が存在しない場合，これらの結果に任意の数値ラベルをつけてもよい．たとえば，図 1.3 で，二つの直線偏光には ± 1 というラベルがつけられる．一般的には，N 個の実数 $a_1, \cdots, a_N$ が与えられた最大検証の N 個の異なる結果と関連づけられている．

こうしてしまえば，量子検証の結果は実数であるといってもよい．その検証は同じく数値を与える古典測定に似てくる．それゆえ，そうした検証を慣用に従って，“量子測定” とよぶことにする．しかしながら，1.5 節で説明したように，この新しいタイプの測定は，古典物理学のように，知識を受動的に取得できない．測定前は未知だが，測定後は値が明らかになるという “物理量” はないのである．“量子測定” はその本来の定義以上の何ものでもない．単に，その結果が実数によってラベル付けられたのが量子**検証**である．

事態を複雑にしているのは，“測定” という同じ単語がまったく異なった意味でも使われていることである．多数の量子検証が一つの測定に含まれてしまう場合である．たとえば，不安定原子核の寿命 (すなわち，その**期待**寿命) を測定する場合，同じ条件で準備された多数の原子核の崩壊を観測するのである．単独の崩壊からはほとんど情報が得られない．同じく，断面積の測定には多数の散乱される粒子の検出を必要とする．検出事象の一つ一つが量子検証で，選択的に検証される結果はその実験における様々な検出器に対応している．

測定とよばれる別のもう一つの散乱実験は**古典**量を決定するために，**量子調査**の集合*9 を使用する．たとえば，干渉計によって二つの鏡の間の距離を測定するとき，私たちがしらべる各干渉縞は多数の光子の衝突によってつくられている．このような実験では，単独の光子は役に立たない．こうした集団的測定は 12 章で論じよう．ここでは，単独の量子検証に関係する測定に注意を集中することにする．

純粋状態 $\mathbf{v}$ に準備された量子系の集合*9 に対して，何度も繰り返しそうした検証を行うとしよう．$\mathbf{e_r}$ を検証の $\mathbf{r}$ 番目の結果を表すベクトル，$a_\mathbf{r}$ をその結果に名付けた実数とする．(検証の結果にラベルを付けるさいにボールド体を使っている．この理

由はすぐ明らかになる.) この過程の結果として**数値**が得られるので，かなり大雑把に，ある物理量 A の値を観測しているといい，A を**オブザーバブル**とよぶ．この定義そのものから，そのオブザーバブルは $a_{\mathbf{1}}, a_{\mathbf{2}}, \cdots$，という値のみをとれる．量子期待値則 H は $a_{\mathbf{r}}$ という結果を得る確率が $|\langle \mathsf{e}_{\mathbf{r}}, \mathsf{v}\rangle|^2$ であることを保証する．それゆえに，オブザーバブル A の**平均値** (**期待値**ともよばれる)[*11]は

$$\langle \mathsf{A}\rangle = \sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}\, |\langle \mathsf{e}_{\mathbf{r}}, \mathsf{v}\rangle|^2 = \sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}\, |v_{\mathbf{r}}|^2 \tag{3.39}$$

である．

$\mathsf{e}_a, \mathsf{e}_b, \cdots$，が量子論の複素ベクトル空間を構成するために使われる正規直交基準系を表すとしよう．(通常通り，この基準系にイタリック体の添字をつける．ここでは，対象となっている検証に対応して，ボールド体の基底 $\mathsf{e}_{\mathbf{1}}, \mathsf{e}_{\mathbf{2}}, \cdots$，をとった方がより効率的と思われるであろうが，そう選ぶのは一般的ではない．なぜなら間もなくいくつかの異なる検証の結果を比較することになるからである.) 変換則 (3.3) から，

$$\langle \mathsf{A}\rangle = \sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}} \left|\sum_m \langle \mathbf{C}_{\mathbf{r}m}\, \mathsf{e}_m\,, \mathsf{v}\rangle\right|^2 = \sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}} \left|\sum_m \overline{\mathbf{C}_{\mathbf{r}m}}\, v_m\right|^2 \tag{3.40}$$

が得られる．これをまた

$$\langle \mathsf{A}\rangle = \sum_{mn} \overline{v_m}\, A_{mn}\, v_n \tag{3.41}$$

とも書けるが，これは検証すべき量子系を準備することのみに関与する $\overline{v_m}v_n$ という表現のもつ別の役割を示しており，

$$A_{mn} := \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{C}_{\mathbf{r}m}\, a_{\mathbf{r}}\, \overline{\mathbf{C}_{\mathbf{r}n}} \tag{3.42}$$

は基底 $\mathsf{e}_{\mathbf{r}}$，すなわち，オブザーバブル A を定義する量子検証だけに関係している．

このように，オブザーバブルは複素ベクトル空間の中の**行列**によって表されている．これらの行列を，それらの成分 A_{mn} のような普通の複素数から区別するために，A のようなサンセリフ体の大文字で表そう．上付き記号 † で表される行列のエルミート共役は，複素共役転置行列として定義される．

$$(M^\dagger)_{rs} \equiv \overline{M_{sr}} \tag{3.43}$$

$a_{\mathbf{r}}$ は実数なので，式 (3.42) から $A_{mn} = \overline{A_{nm}}$ で，その結果，任意のオブザーバブルの行列はエルミート $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\dagger$ になる．後に，この逆，つまり任意のエルミート行列がオブザーバブルを定めることも真実であることがわかろう．

[*11] 慣習にならい，オブザーバブルの平均値と二つのベクトルのスカラー積を意味するのに同じ記号 ⟨ と ⟩ を使用する．この二重の使用に深い意味はなく，もっぱら印刷の記号が足りないためである．それによってあいまいになることはない．平均を表すのに $\overline{\mathsf{A}}$ を愛用する人もいるが，これは複素数の式が平均されるとき，混乱しやすい．なお本書ではバーを**古典**平均 (たとえば，1.5 節の $\overline{\mathbf{B}}$) を表すのに用いる．それはそのような場合には複素共役と無縁であり，他方，**量子**平均との混乱を避ける必要があるからである．

変　換　性

ここで二つの本質的に異なったタイプの行列があることに注意しよう．まず，$C_{\mu m}$ あるいは $\mathbf{C}_{\mathbf{r}m}$ といったユニタリー変換行列がある．その添字は二つの異なった字体のアルファベットに属し，このことは二つの異なった直交基準系に関連していることを表している．そして A_{mn} のようなエルミート行列があるが，それは**一つの**基準系を使って記述される観測可能な物理的性質を表している．

もう一つ別の基準系に関連づけるとき，これらのオブザーバブルの行列成分の変換則はどうなっているのかという疑問が当然湧く．たとえば，式 (3.42) との類推から，式

$$A_{\mu\nu} := \sum_{\mathbf{r}} \Gamma_{\mathbf{r}\mu}\, a_{\mathbf{r}}\, \overline{\Gamma_{\mathbf{r}\nu}} \tag{3.44}$$

を定義してもよいだろう．ここで変換行列 Γ は式 (3.3) で定義されている．これらの変換行列は独立ではない (数学的な言い方で，それらは**群**をつくっている)．合成則 (3.4) を式 (3.42) に代入して，

$$A_{mn} = \sum_{\mathbf{r}} \left(\sum_{\mu} \Gamma_{\mathbf{r}\mu}\, C_{\mu m} \right) a_{\mathbf{r}} \left(\sum_{\nu} \overline{\Gamma_{\mathbf{r}\nu}}\, \overline{C_{\nu n}} \right) \tag{3.45}$$

が導ける．そこから，式 (3.44) と比較して，

$$A_{mn} = \sum_{\mu\nu} C_{\mu m}\, A_{\mu\nu}\, \overline{C_{\nu n}} \tag{3.46}$$

となる．これがオブザーバブルの行列に対する変換則である．それはベクトル変換則 (3.8) に似ているが，いまの場合変換される要素が二つの添字をもっているため，$C_{\mu m}$ とその複素共役の両方が現れる*12．

演習問題 3.11　式 (3.8) と

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \sum_{\mu\nu} \overline{v_\mu}\, A_{\mu\nu}\, v_\nu \tag{3.47}$$

が式 (3.41) と一致する結果を与える条件から式 (3.46) を導け．

演習問題 3.12　式

$$A_{\mu\nu} = \sum_{mn} \overline{C_{\mu m}}\, A_{mn}\, C_{\nu n} \tag{3.48}$$

を示せ．

これから，N 個の式 $w_m = \sum_n A_{mn} v_n$ が $\mathsf{w} = \mathsf{A}\mathsf{v}$ と書ける**ベクトル**の成分であることを示そう．一般的には N 個の任意の数がベクトルの成分とは限らないので，これは自明な主張ではない．ベクトルの特性は，その成分がもう一つ別の基準系に関連づけられるとき，はっきり定義された変換則 (すべてのベクトルに対して同じ規則である!) に従うということである．ベクトルでない簡単な例が次の演習問題に示される．

*12 一般相対性理論の記法に，特に曲がった空間でスピノール演算に精通している読者ならば，ここで下付き (共変) と上付き (反変) 添字，ならびに複素共役変換に対して点なしと点付き添字を導入したくなるかもしれないが，慣れていない読者を面食らわせないように，このような凝った表記法は使わないことにする．

演習問題 3.13 ユークリッド平面上のベクトル $\{x_1, x_2\}$ は座標軸の角度 θ の回転によって

$$\{x_1, x_2\} \to \{x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta,\ -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta\} \tag{3.49}$$

のように線形写像されるという性質で定義される．このとき次のことを示せ．1 対の数 $\{y_1, y_2\} = \{x_1, -x_2\}$ は座標軸の回転の下で線形写像されるが，その規則は式 (3.49) とは同じ形でなく，したがって $\{y_1, y_2\}$ はベクトルではない．他方，$\{u_1, u_2\} = \{-x_2, x_1\}$ は

$$\{u_1, u_2\} \to \{u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta,\ -u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta\} \tag{3.50}$$

に従って変換し，それゆえ $\{u_1, u_2\}$ はベクトルである． ⋆

演習問題 3.14 1 対の数 $\{v_1, v_2\} = \{{x_1}^2 - {x_2}^2,\ 2x_1x_2\}$ は，写像 (3.49) の下で，軸のまわりに角度 θ ではなく，2θ 回転したベクトルと同じようにふるまうことを示せ．したがって，v_1 と v_2 はベクトルの成分ではない．(それらは**テンソル**の成分である.) ⋆

それでは $\mathsf{w} = \mathsf{Av}$ がベクトルであるかどうかしらべよう．式 $w_m = \sum_n A_{mn} v_n$ がもう一つ別の正規直交基底に，たとえば e_μ に関連付けられたとき，それがどうなるかをしらべなければならない．そのとき変換則 (3.8) を満たす w_μ で，$w_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu} v_\nu$ を導けるのか? 変換則 (3.8) および (3.46) から見てとれるように，答はイエスである．これらの変換則は

$$\sum_n A_{mn}\, v_n = \sum_{n\mu\nu\sigma} C_{\mu m}\, A_{\mu\nu}\, \overline{C_{\nu n}}\, C_{\sigma n}\, v_\sigma = \sum_{\mu\nu} C_{\mu m}\, A_{\mu\nu}\, v_\nu = \sum_\mu C_{\mu m}\, w_\mu$$

を与え，これは正に w_m である．このことは，w の成分がベクトルの成分のように変換することを形式的に証明している．換言すれば，オブザーバブルの行列はベクトルをベクトルに写像する**線形演算子**である．

この点が確立されれば，かなり表記法を単純化して，ベクトルを種々の直交基底に関連づけるすべての添字 (ローマ文字，ギリシャ文字，ボールド体文字など) を省くことができる．たとえば，式 (3.41) は

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \mathsf{v}^\dagger \mathsf{A} \mathsf{v} = \langle \mathsf{v}, \mathsf{A}\mathsf{v} \rangle \tag{3.51}$$

となる．このような抽象的な表記法は美しいだけではなく，"添字" が連続な値をとる (4 章参照) **無限**次元ベクトル空間に対しては，唯一可能な表記法といえる．添字のない表記法は，すべてのベクトルと行列が**同じ**基底に関連している場合のみ，あいまいでない．いくつかの基底間の変換が関係するときは，はっきり添字を付けることが望ましい．

射 影 演 算 子

最も単純なオブザーバブルは，それに対するすべての係数 $a_{\mathbf{r}}$ が 0 か 1 のどちらかであるようなものである．これらのオブザーバブルは yes–no 型の質問をする検証 (yes = 1, no = 0) に対応する．それらは次の理由のために**射影演算子**，あるいは単に**射影子**とよばれる．規格化された任意のベクトル v に対して，一つの行列 $\mathsf{P_v} = \mathsf{v}\mathsf{v}^\dagger$ が定義でき，それは $\mathsf{P_v}^2 = \mathsf{P_v}$ および

$$\mathsf{P_v}\,\mathsf{u} = \mathsf{v}\,\mathsf{v}^\dagger \mathsf{u} = \mathsf{v}\,\langle \mathsf{v}, \mathsf{u} \rangle \tag{3.52}$$

という性質をもつ．最後の式は，($\langle \mathsf{v}, \mathsf{u} \rangle = 0$ でなければ) どんな u に対しても，v に平行なベクトルを表す．幾何学の言葉では，$\mathsf{P_v}\,\mathsf{u}$ は v の方向に沿った u の**射影**である．式 (3.52) より一般的な型の射影子は後に論じよう．

こうした射影演算子は非常に便利である．特に，任意のオブザーバブル A をそのオブザーバブルを定義する基準系での射影子の一次結合として書くことができる．

$$\mathsf{A} = \sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}\, \mathsf{e_r}\, \mathsf{e_r}^\dagger \tag{3.53}$$

そのさい，行列の要素 A_{mn} は単に

$$A_{mn} = \mathsf{e}_m^\dagger\, \mathsf{A}\, \mathsf{e}_n = \langle \mathsf{e}_m\,, \mathsf{A}\, \mathsf{e}_n \rangle \tag{3.54}$$

で与えられる．これは定義式 (3.3) と (3.42) からわかる．逆に，

$$\mathsf{A} = \sum_{mn} A_{mn}\, \mathsf{e}_m\, \mathsf{e}_n^\dagger \tag{3.55}$$

である．行列 A_{mn} は基底 e_m でのオブザーバブル A の**表現**であるといわれる．同じく，行列 $A_{\mu\nu}$ は基底 e_μ でのオブザーバブル A の表現である，などなど．式 (3.53) からただちに，基準系 $\mathsf{e_r}$ における A の表現 (A を定義するのに使われた量子検証に対応する基準系) は**対角**行列であり，その対角要素は数 $a_{\mathbf{r}}$ であることがわかる．

固有値と固有ベクトル

これから述べる二つの概念が，量子論で最も重要なものである．もし方程式 $\mathsf{A}\mathsf{u} = \alpha \mathsf{u}$ が成り立つような数 α とゼロベクトルでないベクトル u があるなら，α は A の**固有値**とよばれ，u は対応する**固有ベクトル**である[*13]．たとえば，式 (3.53) から，

$$\mathsf{A}\,\mathsf{e_s} = \sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}\, \mathsf{e_r}\, \mathsf{e_r}^\dagger\, \mathsf{e_s} = a_{\mathbf{s}}\, \mathsf{e_s} \tag{3.56}$$

が得られる．

[*13] eigen のかわりに，proper あるいは characteristic という用語が，比較的古い文献に使われている．

演習問題 3.15　e_m 表現において，式 (3.56) が

$$\sum_n A_{mn}\,\mathbf{C}_{\mathbf{s}n} = a_{\mathbf{s}}\,\mathbf{C}_{\mathbf{s}m} \tag{3.57}$$

となることを示せ．ただし，$\mathbf{C}_{\mathbf{s}m}$ は式 (3.3) で定義されている．

式 (3.57) は，A を対角化するユニタリー変換行列の構造を示している．行列要素 $\mathbf{C}_{\mathbf{s}m}$ は固有値 $a_{\mathbf{s}}$ に対応する A の固有ベクトルの m 番目の成分である．

3.7　さらなる代数的性質

オブザーバブルの行列要素に対する変換法則 (3.46) は線形である．それゆえにオブザーバブルは，状態ベクトルと同じように，線形空間をつくる．もし A と B がオブザーバブルであり，α と β が実数であるなら，$\mathsf{D} = \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$ もオブザーバブルであり，$D_{mn} = \alpha A_{mn} + \beta B_{mn}$ という成分をもつ．α と β が実数であることに注意せよ．さもなければ D はエルミートではなくなる．いくつかの重要な定理は，次の演習問題で読者に証明してもらおう．

演習問題 3.16　もし C がユニタリーで，A がエルミートであるなら，$\mathsf{C}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{C}$ もエルミートであることを示せ．同様に，もし U がユニタリーであるなら，$\mathsf{C}^\dagger\mathsf{U}\mathsf{C}$ がユニタリーであることを示せ．

演習問題 3.17　$\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{D}$ あるいは $\mathsf{AB} = \mathsf{D}$ のような任意の行列間の代数関係式が，相似変換 (特にユニタリー変換) の下で不変であることを示せ．

オブザーバブルの非線形な関数は式 (3.53) の自然な一般化によって定義される．

$$f(\mathsf{A}) = \sum_{\mathbf{r}} f(a_{\mathbf{r}})\,\mathsf{e}_{\mathbf{r}}\,\mathsf{e}_{\mathbf{r}}^\dagger \tag{3.58}$$

それらの行列要素は (3.42) のように与えられる．

$$(f(\mathsf{A}))_{mn} = \langle \mathsf{e}_m\,, f(\mathsf{A})\,\mathsf{e}_n\rangle = \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{C}_{\mathbf{r}m}\, f(a_{\mathbf{r}})\,\overline{\mathbf{C}_{\mathbf{r}n}} \tag{3.59}$$

オブザーバブルの整数べきに対して，この定義はオブザーバブルの行列を同じべき次数まで上げている．実際に，たとえば，

$$(\mathsf{A}^2)_{mn} = \sum_k A_{mk}\,A_{kn} = \sum_{k\mathbf{rs}} \mathbf{C}_{\mathbf{r}m}\,a_{\mathbf{r}}\,\overline{\mathbf{C}_{\mathbf{r}k}}\,\mathbf{C}_{\mathbf{s}k}\,a_{\mathbf{s}}\,\overline{\mathbf{C}_{\mathbf{s}n}} \tag{3.60}$$

は式 (3.1) のおかげで $\sum_{\mathbf{r}} \mathbf{C}_{\mathbf{r}m}\,(a_{\mathbf{r}})^2\,\overline{\mathbf{C}_{\mathbf{r}n}}$ に等しい．しかし，定義 (3.58) は，log A のようなべき級数に展開できない関数にも適用できる．もし関数 f が全単射なら，A と $f(\mathsf{A})$ の測定は，仮定 B の意味で (31 ページを参照)，同等であることを指摘しておく．

演習問題 3.18　もし H がエルミートであるなら，$e^{i\mathsf{H}}$ はユニタリーであることを示せ．

演習問題 3.19 もし，U がユニタリーであるなら，$i(\mathbb{1}-\mathsf{U})/(\mathbb{1}+\mathsf{U})$ はエルミートであることを示せ．(ここで $\mathbb{1}$ は単位行列を意味する.)

次に，同じ完全検証では定義されない複数のオブザーバブル，たとえば A と B の関数を考えよう．A が，実数 $a_{\mathbf{r}}$ を正規直交ベクトル $\mathsf{e}_{\mathbf{r}}$ と関連づけることによって上のように定義されている一方，**異なる**最大検証に対応するもう 1 組の正規直交ベクトル e_μ と実数 b_μ を関連づけることで B を定義する．(もし具体例を望むならば，A と B として角運動量成分 J_x と J_y を考えよ.) 上と同じように，ベクトルと行列のすべての成分をある固定された正規直交基底 e_m (たとえば，J_z が対角的である基底) に関連づける．行列 A_{mn} は式 (3.42) によって与えられ，そして同様に

$$B_{mn} := \sum_\mu C_{\mu m}\, b_\mu\, \overline{C_{\mu n}} \tag{3.61}$$

が得られる．それではオブザーバブル $\mathsf{D} = \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$ の物理的意味は何であるのか? 明らかに，(何か他の最大検証に対応する) 他の基底が存在し，そこでは D_{mn} が ($a_{\mathbf{r}}$ や b_μ のかわりに) 係数 $d_\heartsuit$ をもつ形の式 (3.42) あるいは (3.61) に似た式で与えられる．この係数は定義によりオブザーバブル D の可能な値である．これらの $d_\heartsuit$ およびこれらに対応する正規直交ベクトル $\mathsf{e}_\heartsuit$ は，式 (3.56) のように，行列 D の固有値と固有ベクトルである．

逆に，ある量子状態 v を準備し，それに対してオブザーバブル D の測定が値 $d_\heartsuit$ を与えると確実にいえるとしよう．そのとき $d_\heartsuit$ が D の固有値で，v が対応する固有ベクトルとなる．実際，分散

$$\langle(\mathsf{D}-d_\heartsuit)^2\rangle = \mathsf{v}^\dagger(\mathsf{D}-d_\heartsuit)^2\mathsf{v} \equiv \|(\mathsf{D}-d_\heartsuit)\mathsf{v}\|^2 \tag{3.62}$$

はゼロにならなくてはならないが，このことは $\mathsf{Dv} = d_\heartsuit\mathsf{v}$ ならば，そしてこの場合に限り成立する．

演習問題 3.20 スピン 2 の粒子に対して $\mathsf{J}_x+\mathsf{J}_y$ の固有値はどうなるか? J_z が対角化される表現で固有ベクトルはどうなるか?

演習問題 3.21 行列の固有値がユニタリー変換の下で (あるいは，もっと一般的に相似変換の下で) 不変であることを示せ．

物理的解釈の無矛盾性を確かめるためには，任意のエルミート行列の固有値は実数であり，異なった固有値に対応している固有ベクトルが直交していることを示さなくてはならない．1 番目の性質はエルミート行列の対角成分が，**どの**表現でも，実数であるという事実から容易に導かれる．2 番目の性質も容易に証明される．$\mathsf{Hu} = \alpha\mathsf{u}$ および $\mathsf{Hv} = \beta\mathsf{v}$ としよう．そのとき

$$\mathsf{v}^\dagger\mathsf{H}\mathsf{u} = \alpha\mathsf{v}^\dagger\mathsf{u} \qquad \text{かつ} \qquad \mathsf{u}^\dagger\mathsf{H}\mathsf{v} = \beta\mathsf{u}^\dagger\mathsf{v} \tag{3.63}$$

が成り立つ．最初の式のエルミート共役から 2 番目を引くと，結果は $(\alpha-\beta)\mathsf{u}^\dagger\mathsf{v} = 0$ であるので，u と v は $\alpha \neq \beta$ なら，実際に直交する．

演習問題 3.22 ユニタリー行列の固有値が単位円上にあり，異なった固有値に対応する固有ベクトルが直交することを同じように証明せよ．

逆に，もし $\langle \mathsf{w}, \mathsf{A}\mathsf{w}\rangle$ が任意のベクトル w に対して実数ならば，そのとき A は任意の u と v に対して

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{A}\mathsf{v}\rangle = \overline{\langle \mathsf{v}, \mathsf{A}\mathsf{u}\rangle} \tag{3.64}$$

を満足する (すなわち，A はエルミートである)．この性質は，ノルムの全知識からすべてのスカラーの積を決定することができることを示した式 (3.17) と同じように証明される．ここでは，

$$(\mathsf{u}+\mathsf{v})^\dagger \mathsf{A}(\mathsf{u}+\mathsf{v}) - (\mathsf{u}-\mathsf{v})^\dagger \mathsf{A}(\mathsf{u}-\mathsf{v}) \\ + i(\mathsf{u}-i\mathsf{v})^\dagger \mathsf{A}(\mathsf{u}-i\mathsf{v}) - i(\mathsf{u}+i\mathsf{v})^\dagger \mathsf{A}(\mathsf{u}+i\mathsf{v}) = 4\,\mathsf{u}^\dagger \mathsf{A}\mathsf{v} \tag{3.65}$$

となる．左辺の実部は，明らかに u と v の交換に関して不変である．他方，虚部はその符号を変える，なぜなら

$$(\mathsf{v} \pm i\mathsf{u})^\dagger \mathsf{A}(\mathsf{v} \pm i\mathsf{u}) = (\mathsf{u} \mp i\mathsf{v})^\dagger \mathsf{A}(\mathsf{u} \mp i\mathsf{v}) \tag{3.66}$$

だからである．したがって，式 (3.64) がただちに出てくる．

固有値と固有ベクトルの計算

ある与えられた行列 A の固有値と固有ベクトルを具体的に得るには，$\sum A_{mn}\,u_n = \alpha\,u_n$ あるいは $\sum (A_{mn} - \alpha\,\delta_{mn}) u_n = 0$ を解かなければならない．これらの線形方程式は，$\mathrm{Det}(A_{mn} - \alpha\,\delta_{mn}) = 0$，かつその場合に限り，自明でない解をもつ．これは**永年方程式**とよばれる N 次の代数方程式である．もし α がこの方程式の重根でない根なら，対応する固有ベクトルは連立線形方程式を解くことによって得られる．それは規格化因子を除いて，一意的である．

もし同じ固有値が複数個あるなら，それは “縮退している” といわれ，いくつかの独立な固有ベクトルが存在しうる．特に，もし A がエルミート (あるいはユニタリー) なら，永年方程式の M 重根に対応した M 個の正規直交固有ベクトルを常に構成できる．これは次のように証明する．まず一つの固有ベクトル，たとえば v を見つける．次に，v が k 番目の基底ベクトルになるように，新しい基準系へのユニタリー変換を行う．これは A の固有値に影響を与えない (演習問題 3.21 を参照)．この新しい基準系で，$\sum A_{mn}\,v_n = \alpha\,v_m$ が得られる．しかしながら，その基準系で，ゼロでない v の唯一の成分は v_k である．そのことから $A_{kk} = \alpha$ で，ほかのすべての要素 $A_{mk} = 0$ と，また A のエルミート性から $A_{km} = 0$ ともなることが導かれる．今度は A から k 番目の行と列を取り去った以外，A と違いのない行列 A' を考えよう．この行列は v に直交するすべてのベクトルの部分空間で定義されている．そのつくり方から，その

固有ベクトルは同じ固有値をもつ A の固有ベクトルでもある．この過程を $M-1$ 回繰り返すと，M 重根の固有値に関する直交した M 個の固有ベクトルを見つけることができる．明らかに，これらのベクトルの任意の一次結合も，同じ固有値に対応する固有ベクトルである．これ以外の情報は，参考文献にまとめた代数に関する著作を参照されたい．

演習問題 3.23　上記と同じような性質が，ユニタリー行列に対して成り立つことを証明せよ．

演習問題 3.24　他方，エルミートでもユニタリーでもない行列 $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ は，ただ 1 個の固有ベクトルをもつことを示せ．

演習問題 3.25　エルミート，あるいはユニタリー行列のトレース (対角成分の和) はその固有値の和に等しいこと，その行列の行列式はその固有値の積に等しいことを示せ．

$f(\mathsf{A})$ の定義 [式 (3.58) 参照] から，もし固有値 $a_{\mathbf{r}}$ が $f(a_{\mathbf{r}})=0$ という関係式を満足するなら，$f(\mathsf{A})=0$ であることも容易に出てくる．A が対角化される表現を考慮すればわかるように，逆も真である．簡単な例は，**射影演算子**(あるいは**射影子**) で，この場合すべての固有値は 0 あるいは 1 のどちらかであり，したがって

$$\mathsf{P}^2 = \mathsf{P} \tag{3.67}$$

を満たしている．

演習問題 3.26　任意のベクトル v は任意の射影子 P を使って二つの直交する項の和に分割できること

$$\mathsf{v} \equiv \mathsf{Pv} + (\mathsf{v} - \mathsf{Pv}) \tag{3.68}$$

を証明せよ．

演習問題 3.27　u と v を規格化されたベクトルであるとしよう．$\mathsf{uu}^\dagger$ および $\mathsf{vv}^\dagger$ が射影子であることを示せ．さらに，$\mathsf{uu}^\dagger + \mathsf{vv}^\dagger$ が，$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = 0$，かつその場合に限り，射影子であることを示せ．この結果を任意の数のベクトルに一般化せよ．

演習問題 3.28　$\{\mathsf{e}_\mu\}$ が完全正規直交系としよう．

$$\sum_\mu \mathsf{e}_\mu \mathsf{e}_\mu^\dagger \equiv \mathbb{1} \tag{3.69}$$

($\mathbb{1}$ は単位行列である) を示せ．

交　換　子

次式

$$[\mathsf{A},\mathsf{B}] := \mathsf{AB} - \mathsf{BA} \tag{3.70}$$

は行列 A と B の**交換子**とよばれる．$[\mathsf{A},\mathsf{B}] = 0$ なら，A と B は交換するという．明らかに，同じ最大検証によって定義される二つのオブザーバブルは交換する．(両者が同時に対角となる表現がある.) 逆に，もし A と B がエルミートであって，交換するなら，両方の行列が対角化される基準系を見いだせる．これは次のようにして達成できる．最初に，A を対角化しよう．そのとき

$$[\mathsf{A},\mathsf{B}]_{mn} = (A_{mm} - A_{nn})\,B_{mn} = 0 \tag{3.71}$$

である．もし A が縮退していないなら，$m \neq n$ のときはいつでも $B_{mn} = 0$ となる (つまり B も対角化されている) ということが導かれる．もし，他方，A が縮退しているなら，B はただブロックとして対角的となるだけである．A のブロックの一つ一つが (すなわち，A の対応するブロックは単位部分行列の定数倍である) 等しい固有値の組に対応する．そのとき，A に影響を与えないで，B のそれぞれのブロックを対角的することができ，その結果最終的に，A と B 両方が対角的となる．

特に，二つの射影子 P と Q を考えよう．もしそれらが交換するなら，両方共ある基準系で対角化することができる．このような場合，それらの積 $\mathsf{PQ} = \mathsf{QP}$ は，ただ P と Q の**両者**が 1 に等しい対角成分をもっているところでのみ，1 に等しい対角成分をもつ．$\mathsf{PQ} = 0$ を満す射影演算子は**直交している**といわれる．

演習問題 3.29　もし射影演算子 P と Q が $\mathsf{PQ} = 0$ を満たすなら，$\mathsf{QP} = 0$ でもあることを示せ．

演習問題 3.30　P と Q が直交射影演算子で，v が任意のベクトルなら，$\langle \mathsf{Pv}, \mathsf{Qv} \rangle = 0$ であることを示せ．

演習問題 3.31　P が射影子なら，演算子 $\mathbb{1} - \mathsf{P}$ も射影子で，それは P に直交していることを示せ．

正規行列と極分解

線形代数に関するこの節を終えるにあたって，ここであと二つの定義をしておこう．行列 A は，もしそれがその共役行列と交換する，すなわち $[\mathsf{A},\mathsf{A}^\dagger] = 0$ であるなら，**正規**行列とよばれる．その場合，行列 $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\dagger$ と $i(\mathsf{A} - \mathsf{A}^\dagger)$ は交換し，一つのユニタリー変換によって同時に対角化できる．したがって，A 自身対角化できる．

次に正規でなく，それゆえユニタリー変換によって対角化できない一般的な行列 A を考えよう．複素数を $z = re^{i\theta}$ と書くように，その場合でも A を**極**形式で書くこと

が可能かもしれない．実際には次のようにすればよい．行列 $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ はエルミートで，非負の固有値をもっている．なぜなら任意の u に対して

$$\mathsf{u}^\dagger\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{u} = \|\mathsf{A}\mathsf{u}\|^2 \geq 0 \tag{3.72}$$

だからである．さらに $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ がゼロ固有値をもたない (すなわち，方程式 $\mathsf{A}\mathsf{u} = 0$ が $\mathsf{u} = 0$ 以外の解をもたない) と仮定しよう．$\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ がエルミートなので，式 (3.58) のおかげで，行列 $(\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{-1/2}$ を定義することが可能である．ここであいまいでないよう，$\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ の各固有値の正の平方根を選択するとする．そのとき，行列積

$$\mathsf{U} := \mathsf{A}\,(\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{-1/2} \tag{3.73}$$

は，$\mathsf{U}^\dagger\mathsf{U} = (\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{-1/2}\,\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}\,(\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{-1/2} = \mathbb{1}$ なので，ユニタリーであって，最終的に

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}\,(\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{-1/2}\,(\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{1/2} = \mathsf{U}\,(\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A})^{1/2} \tag{3.74}$$

が導かれる．読者は，$\mathsf{A} = \mathsf{J}_x + i\mathsf{J}_y + \epsilon\mathbb{1}$ のような具体例で，極限 $\epsilon \to 0$ のとき何が起こるかをしらべてみよ．

3.8　量 子 混 合

たいていの検証は最大ではないし，たいていの準備は純粋量子状態をつくり出さない．往々にして物理的過程の部分的な仕様書があるだけにすぎない．したがって，不完全にしか指定されていない状況を記述する形式を必要とするのである．

それぞれ確率 p_α で，様々な純粋状態 u_α を準備する手順を想像してみよう．ベクトル u_α は規格化されているが，必ずしもお互いに直交してはいない．対応する射影子は $\rho_\alpha = \mathsf{u}_\alpha\mathsf{u}_\alpha^\dagger$ である．(以前の P_α のかわりに，確率 p_α との混同を避けるため，ここでは新たな記号 ρ_α を導入した.)

純粋状態 u_α に関するオブザーバブル A の平均値は

$$\langle\mathsf{A}\rangle_\alpha = \mathsf{u}_\alpha^\dagger\,\mathsf{A}\,\mathsf{u}_\alpha = \mathrm{Tr}\,(\rho_\alpha\,\mathsf{A}) \tag{3.75}$$

である．ここで，行列の**トレース**は**その対角成分の和**として定義されている．トレースはこれからの計算にしばしば登場する．そこで以下の演習問題に列挙されているトレースの重要な性質に精通しておいた方がよい．

演習問題 3.32　$\mathrm{Tr}\,(\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}) = \alpha\,\mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}) + \beta\,\mathrm{Tr}\,(\mathsf{B})$ を証明せよ．

演習問題 3.33　$\mathrm{Tr}\,(\mathsf{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{BA})$ を証明せよ．この帰結として，行列のトレースは相似変換 $\mathsf{A} \to \mathsf{SAS}^{-1}$ の下で不変であることを証明せよ．特に，それはユニタリー変換の下で不変である．

演習問題 3.34　A および B がエルミートなら，$\mathrm{Tr}\,(\mathsf{AB})$ は実数となることを証明せよ．

純粋状態 u_α が確率 p_α で起こる確率的準備手順に戻ると，オブザーバブル A の平均値は

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \sum_\alpha p_\alpha \langle \mathsf{A} \rangle_\alpha = \mathrm{Tr}\left(\sum_\alpha p_\alpha \rho_\alpha \mathsf{A}\right) \tag{3.76}$$

となり，それは

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho \mathsf{A}) \tag{3.77}$$

と書くことができる．ここで，

$$\rho = \sum_\alpha p_\alpha \rho_\alpha \tag{3.78}$$

は，その量子系の**密度行列**(あるいは**統計演算子**) である．それは

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_\alpha p_\alpha \,\mathrm{Tr}\,(\rho_\alpha) = \sum_\alpha p_\alpha = 1 \tag{3.79}$$

を満たす．特に，当然のこととして $\langle \mathbb{1} \rangle = 1$ であることにふれておく．

式 (3.77) は，系の準備が完全には指定されないときの式 (3.41) の一般化と見なせる．密度行列という概念は，ちょうど状態ベクトルという概念のように，**準備手順**を記述する．あるいは，そういう言い方を好むなら，それは，統計的性質が与えられた準備手順に対応する量子系の統計アンサンブルを記述する．純粋状態は，p_α の一つだけが 1 で，残りのすべてがゼロであるという，式 (3.78) の特別な場合である．その場合，ρ は射影演算子になって，

$$\rho^2 = \rho \tag{3.80}$$

を満たす．

逆に，式 (3.79) と (3.80) が満たされるなら，ρ はある純粋状態 w への射影子になる．実際，式 (3.80) は ρ の固有値は 0 と 1 であることを，そして式 (3.79) はこれらの固有値の和が 1 であることを意味する．それゆえに，$\rho \mathsf{w} = \mathsf{w}$ を満たす唯一の固有ベクトル w が存在し，$\rho = \mathsf{w}\mathsf{w}^\dagger$ となる．

任意の射影子は

$$\langle \mathsf{v}, \mathsf{P}\mathsf{v} \rangle = \langle \mathsf{v}, \mathsf{P}^2\mathsf{v} \rangle = \|\mathsf{P}\mathsf{v}\|^2 \geq 0 \tag{3.81}$$

を満足することに留意せよ．よって，射影子の対角成分は負でなく，密度行列の対角成分もそうである．この性質は別の基底を選んでも何ら影響されない．特に，**密度行列の固有値は負でない**．しかも，これらの固有値のいずれも，式 (3.79) のため，1 を超えることができない．

演習問題 3.35　ある最大検証が正規直交基準系 e_μ を定義している．準備 ρ に続き，その検証の μ 番目の結果を得る確率は $\mathrm{Tr}\,(\rho \mathsf{P}_\mu)$ (ただし $\mathsf{P}_\mu = \mathsf{e}_\mu {\mathsf{e}_\mu}^\dagger$) であることを示せ．

正 値 演 算 子

正値演算子 A は，任意の w に対して $\langle \mathsf{w}, \mathsf{Aw}\rangle \geq 0$ であるという性質によって定義される．(より正確な名称は “非負演算子” であろう.) このような演算子は，式 (3.64) の証明で見られるように，常にエルミートである．それはさらに面白い不等式を満たす．たとえば，二つだけゼロにならない成分 (それらを v_m と v_n としよう) をもつベクトル v を考える．$\mathsf{v}^\dagger\mathsf{Av}$ は m あるいは n という添字をもつ A の部分行列のみに関係しているので，その部分行列自身が正値演算子でなければならない．特に，その固有値は負ではありえない，したがって，(演習問題 3.25 参照) 対応する部分行列式 $(A_{mm}A_{nn}-|A_{mn}|^2)$ も負ではありえない．もし対角成分 A_{mm} が 0 なら，A の m 行と m 列全体が 0 でなければならないという結論になる．より一般的に，行列が正なら，もともとの添字の部分集合で特徴づけられる行と列だけを残して得られる任意の部分行列自身，正値行列であって，特に非負の行列式の値をもつ．

密度行列の分解

この結果の重要な系としてあげられることは，もし純粋状態 $\rho = \mathsf{uu}^\dagger$ を，$0 < \lambda < 1$ で，

$$\rho = \lambda\,\rho' + (1-\lambda)\,\rho'' \tag{3.82}$$

のように分解しようとすれば，ただ

$$\rho' = \rho'' = \rho \tag{3.83}$$

となるということである．実際，u と直交する任意の v を考えると，

$$\langle \mathsf{v}, \rho\mathsf{v}\rangle = \lambda\,\langle \mathsf{v}, \rho'\mathsf{v}\rangle + (1-\lambda)\,\langle \mathsf{v}, \rho''\mathsf{v}\rangle = 0 \tag{3.84}$$

となってしまう．λ および $(1-\lambda)$ 両方とも正なので，$\langle \mathsf{v}, \rho'\mathsf{v}\rangle = \langle \mathsf{v}, \rho''\mathsf{v}\rangle = 0$ という結論になる．したがって，u と v を基底とする表現を選べば，v に属している行と列全体が 0 でなければならない．ρ' と ρ'' の 0 でない成分は $\langle \mathsf{u}, \rho'\mathsf{u}\rangle = \langle \mathsf{u}, \rho''\mathsf{u}\rangle = 1$ であって，このことから式 (3.83) が得られる．

他方，純粋状態でない任意の密度行列は無限の方法で純粋状態に分解することができる[*14]．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \equiv 0.7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

がある．この例では，右辺の二つの行列はそれぞれ直交した純粋状態 $\binom{1}{0}$ および $\binom{0}{1}$ への射影子である．同じ対角的密度行列 (3.85) を分解するほかの方法は無限にある．

[*14] そのため，量子混合は一意的に純粋な成分へ分解できる化学的混合とは根本的に異なっている．

例を次にあげる.

$$0.4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.3\begin{pmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.36 \end{pmatrix} + 0.3\begin{pmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

最後の二つの行列は,お互いに直交する純粋状態 $\binom{0.8}{0.6}$ と $\binom{0.6}{-0.8}$ に対応しているが,決して $\binom{1}{0}$ あるいは $\binom{0}{1}$ には対応していない.

このように一意性を欠いていることから,注目に値する結果が出てくる.密度行列 ρ_1 と ρ_2 によって表される二つの**異**なった準備がなされたとすると,3 番目の準備 ρ を次のように定めることができる.あるランダムな過程が“成功する”確率 λ と“失敗する”確率 $1-\lambda$ をもっているとしよう.成功の場合には ρ_1 に従って量子系を準備し,失敗の場合には ρ_2 に従って準備する.結果は密度行列

$$\rho = \lambda\,\rho_1 + (1-\lambda)\,\rho_2 \tag{3.87}$$

によって表される.なぜなら,もし上記の指示を多数回実施するなら,その後に任意のオブザーバブル A を測定して得られる**平均**値は

$$\langle \mathsf{A}\rangle = \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\rho_1\,\mathsf{A}) + (1-\lambda)\,\mathrm{Tr}\,(\rho_2\,\mathsf{A}) = \mathrm{Tr}\,(\rho\,\mathsf{A}) \tag{3.88}$$

だからである.

この結果で本当にびっくりするのは,一度 ρ が与えられると,そこには手に入る情報が**すべて**含まれており,そしてまたそれからもともとの ρ_1 と ρ_2 は再構築できないということである.たとえば,多数の偏極した光子を準備する実験設定があって,次の光子を準備するとき,コインを投げ上げて等しい確率で,垂直あるいは水平方向の**直線**偏光にするかどうかを決める場合がある.あるいは完全に異なった実験設定では,次の光子が右巻き,あるいは左巻き**円**偏光しているかどうかをランダムに決める場合である.いずれの場合も,同じ $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ が得られるだろう.観測者が大量にこれらの光子を受け取っても,これらの二つの方法のどちらが,実際にこれらの準備が**巨視的に**異なっているという事実にもかかわらず,光子の準備に選ばれたかを決して知ることはできないであろう.(もしそうすることができるなら,遠い観測者へ相対論的因果律を破って,瞬間的に情報を送れてしまう.このことは 6 章で示される.)

この性質は私たちの最後の基本的仮定として表現される.

> K. **量子記述の完全性** 行列 ρ は量子アンサンブルのすべての性質を完全に指定する.

密度行列の決定

すでに 3.5 節で,原理的には未知の**純粋**状態を決定できる方法がわかった.それは未知の準備が本当に純粋状態の準備であることが確かならば,同じように準備された

多数の系を検証すれば未知の純粋状態を決定できる方法がわかるのである．これは単純ではあるが，むしろ人為的問題である．今度は**任意の**未知の準備という一般的な場合を考えよう．どのように対応する密度行列 ρ を決定できるのか? 原理的には，方法は同じであるが，今回は多数のオブザーバブルの平均値を測る必要がある．

再び偏極した光子の場合を考えよう．ただし今回は**部分的な**偏極を許すことにする．純粋状態 $\binom{1}{0}$ と $\binom{0}{1}$ を区別する垂直対水平方向の偏極に対する検証は，これらの純粋状態を固有値 1 と -1 の固有状態としてもつオブザーバブル

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

の測定と同等である．同様に，純粋状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{および} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

に対応する，$\pm 45^\circ$ の角度の直線偏光に対する検証は，オブザーバブル

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.91}$$

[式 (3.90) の固有状態と ± 1 の固有値をもつ] の測定と見みなすことができる．

最後に，純粋状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{および} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

に対応する，円偏光に対する検証は，オブザーバブル

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

[式 (3.92) で固有状態が与えられ，ここでも ± 1 の固有値をもつ] の測定と同等である．

これらの 3 種の測定は，何回も繰り返されて (光のビームからランダムに選ばれた共通要素をもたない光子の三つの部分集合に対して)，平均値の結果として

$$a_j = \langle \sigma_j \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho\,\sigma_j) \tag{3.94}$$

を与える．トレース条件 (3.79) を一緒に用いれば，これらの三つの実験データ a_j という観測値から，エルミート行列 ρ の四つの未知要素を決定できる．結果は

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} + \textstyle\sum_j a_j\,\sigma_j) \tag{3.95}$$

で，これは恒等式

$$\sigma_m\,\sigma_n + \sigma_n\,\sigma_m \equiv 2\,\delta_{mn} \tag{3.96}$$

を利用して簡単に確かめることができる．

演習問題 3.36 式 (3.94) は式 (3.95) の当然の帰結であることを示せ．

演習問題 3.37 N 個の直交状態をもつ量子系に対して，ρ を決定するのにいくつの異なった測定が必要か?

解答：$N+1$

演習問題 3.38 式 (3.95) における ρ は，もし $\sum_j (a_j)^2 = 1$ なら，純粋状態 (すなわち，完全に偏極した光) に対応することを示せ．

演習問題 3.39 式 (3.95) の ρ の固有値を求めよ．

解答:二つの固有値は $\frac{1}{2}[1\pm(\sum_j a_j{}^2)^{1/2}]$ である．したがって，もし実験者が $\sum_j a_j{}^2 > 1$ という結果を得たら，実験の系統的エラーを探した方がよい．

3.9 付録：ディラックの表記法

この章で使われた表記法はほとんど線形代数の標準的なものであるが，複雑な量子系を記述するとき，見づらいかもしれない．たとえば，自由水素原子の状態は，その全運動量 $\mathbf{p}$，内部量子数 n，l，m，電子スピン用の一つの量子数，さらに原子の超微細構造を論じたければ，もう一つ陽子スピン用の量子数を含む．$\mathsf{u}_{\mathbf{p}nlms_es_p}$ のような多数の添字をもつ煩雑な記号を避けるため，ディラックはブラケット表記法を導入した．状態ベクトルは，$|\mathbf{p}nlms_es_p\rangle$ と書かれる．この記号は**ケット**とよばれ，列ベクトルと同じ代数的意味をもつ．行ベクトルとなるそのエルミート共役は $\langle\mathbf{p}nlms_es_p|$ と書かれて，**ブラ**とよばれる．(これは，ちょっと淫らな冗談がとばされることになっただけでなくて，ブラとケットに準備状態と観測状態という物理的意味をもたせる成果のない試みを招くことにもなった.) これまで $\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle$ と表記されていた[*2] スカラー積は，完全なブラ-ケット $\langle u|v\rangle$ になる．

表 3.1 ベクトルと演算子表記の対応表

	$\mathbf{R}^3$	複素ベクトル	ディラック表記法
ベクトル (列，ケット)	$\mathbf{v}$	v	$\|v\rangle$
共役ベクトル (行，ブラ)	$\mathbf{u}\cdot$	$\mathsf{u}^\dagger$	$\langle u\|$
スカラー積	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$	$\mathsf{u}^\dagger\mathsf{v}\equiv\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle$	$\langle u\|v\rangle$
ジャド	$\mathbf{v}\mathbf{u}\cdot$	$\mathsf{v}\mathsf{u}^\dagger$	$\|v\rangle\langle u\|$
エルミート共役	—	$\mathsf{v}\leftrightarrow\mathsf{v}^\dagger$	$\|v\rangle\leftrightarrow\langle v\|$
線形演算子	$A\mathbf{v}$	$\mathsf{A}\mathsf{v}$	$A\|v\rangle$
共役ベクトル (A に関して線形，u に関して反線形)	$\mathbf{u}A\cdot$	$\mathsf{u}^\dagger\mathsf{A}$	$\langle u\|A$
共役ベクトル (A に関して反線形 u に関して線形)	—	$(\mathsf{A}\mathsf{u})^\dagger\equiv\mathsf{u}^\dagger\mathsf{A}^\dagger$	$\langle Au\|\equiv\langle u\|\bar{A}$
演算子の共役	—	$(\mathsf{A}\mathsf{u})^\dagger\mathsf{v}\equiv\mathsf{u}^\dagger\mathsf{A}^\dagger\mathsf{v}$	$\langle Au\|v\rangle\equiv\langle u\|\bar{A}\|v\rangle$

表 3.1 に様々な表記法を要約しておこう．最後の 2 行は，ディラック表記法を使うさい，エルミート共役に関して大いに注意しなければならないことを示している．

3.10 参　考　文　献

ベクトルと行列

G. Fano, *Mathematical Methods of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1971) Chapt. 1, 2.

P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, Academic Press, Boston (1985).

量　子　力　学

初等量子力学に関する素晴らしい本は多数ある．そのうち以下の 2 冊は波動関数や微分方程式ではなく，行列代数を使っているので，特にここにあげておく．

H. S. Green, *Matrix Mechanics*, Noordhoff, Groningen (1965).

T. F. Jordan, *Quantum Mechanics in Simple Matrix Form*, Wiley, New York (1986).

強い重ね合せの原理

強い重ね合せの原理 (54 ページ) は，任意の直交系が実現可能な最大検証を表すことを保証するが，実際にどのようにその検証を実行するかについて何も教えない．次の論文では，多重光学ビームの場合にそうしたことの指示が与えられている．

M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein, and P. Bertani, *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 58.

4 連続変数

4.1 ヒルベルト空間

ほとんどの量子系はベクトルが無限個の成分 u_k もつ**無限次元**ベクトル空間を使うことを要求する．添字 k が連続変数をとることさえある．その場合には，u_k のかわりに $u(k)$ と書く．ある領域では離散的で，別の領域では連続的な添字をもつことも可能である．たとえば，もしある量子系に束縛状態と非束縛状態の両方が存在し，その系のエネルギーが状態を区別する添字として用いられるなら，その添字は離散と連続両方の値をとる．

物理学者は，次元の数が無限大に拡張されても通常あまり気にしない．楽天主義が普通なので，すべての無限数列は，証明されない限り，収束すると考える．この章の目的は，ベクトルと行列が無限次元になるとき現れる新たな特徴を浮彫りにすることである．この内容をすべて扱うつもりはない．ただ読者がふつう陥りやすい落し穴巡りをしようと思う．話題の選定は，私自身が現実の問題で遭遇した経験にもとづく個人的趣味を反映している．厳密さには種々のレベルがあるが，より詳しいことは，章末にあげた文献で得られよう．

量子論は，“ヒルベルト空間”(通常 $\mathcal{H}$ と表される) とよばれる特別な種類の無限次元ベクトル空間を使う．ヒルベルト空間であるためには，ベクトル空間は三つの性質を満足しなくてはならない．第 1 番目に，**線形性**がある．これは u と v が $\mathcal{H}$ の元で，α と β が複素数であるなら，$\alpha\mathsf{u}+\beta\mathsf{v}$ も $\mathcal{H}$ の元であるということである．たとえば，もし $\mathcal{H}$ の元が $u(x)$ とか $v(x)$ のような，x の関数によって表されるなら，$\alpha u(x)+\beta v(x)$ も x の関数で，したがって $\mathcal{H}$ の元である．特に，$\mathcal{H}$ は，任意の u に対して $\mathsf{u}+\mathsf{0}=\mathsf{u}$ となるゼロ元 $\mathsf{0}$ を含む．この点までは，本質的に新しいことは何もない．

内積とノルム

ヒルベルト空間であるための第 2 番目の条件は，エルミート内積の存在である．任意の元 u と v の対には，ある**複素数** $\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle=\overline{\langle\mathsf{v},\mathsf{u}\rangle}$ が対応して，その値は v に関して線形で，u に関して反線形である．$\langle\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle$ の実際の計算規則はこの段階で指定する必要

はない．ただ，その規則は

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{u} \rangle \geq 0 \tag{4.1}$$

で，等号は $\mathsf{u} = 0$ の場合，またその場合に限り成り立つようなものでなくてはならない．もし $\langle \mathsf{u}, \mathsf{u} \rangle < 0$ が許されると，これは “疑ヒルベルト” 空間を与える．ヒルベルト空間に対して証明される多くの定理が，疑ヒルベルト空間では成り立たず，したがって後者は量子論で正しく状態を表すのには使えない．(特殊相対論のミンコフスキー時空のような，不定計量空間は理論物理学の多くの重要な場面で使われているが，**量子状態の空間は定計量**でなくてはならない.) 無謀にもよくあることだが，もし要求 (4.1) を無視すると，シュワルツの不等式 (3.18) は成立せず，ただちに負の確率，あるいは 1 より大きい確率，さらに説明できないような奇異な結果となってしまう．

$\mathcal{H}$ の元が x の関数によって表される場合に戻ると，内積 (あるいはスカラー積) の定義の自然な (しかし決して一意的ではない) 選択は

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \int \overline{u(x)}\, v(x)\, dx \tag{4.2}$$

である．この表式は明らかにエルミート，すなわち v に関して線形で，u に関して反線形であり，望ましい形になっている．しかし，すでにこの定義自体に困難が存在している．式 (4.2) の積分はある関数 $u(x)$ と $v(x)$ について発散するかもしれない．特に，式 (4.1) が意味あるためには，積分 $\int |u(x)|^2 dx$ が存在しなくてはならない．それゆえ，スカラー積を式 (4.2) によって定義するヒルベルト空間には 2 乗可積分な関数だけが受け入れられる．ここでまた，無限大のノルムのベクトルを気にしない人もいるかもしれない．もし彼らのやり方を選ぶなら，自分で責任を負わなくてはならない．ここに一つの例がある．

演習問題 4.1　もし単色波 e^{ikx} が受け入れられる状態であるなら，なぜ e^{kx} も受け入れてはいけないのか? しかし，それが可能なら，井戸型ポテンシャルで**離散的**エネルギー準位を得られないことになる．**任意**の負のエネルギー E に対応する，井戸内部の波動関数 $\cos Kx$ は，常に井戸外部の波動関数 $Ae^{kx} + Be^{-kx}$ に滑らかに接続できることを示せ．

ベクトルのノルム $\|\mathsf{u}\|$ は通常通り

$$\|\mathsf{u}\|^2 := \langle \mathsf{u}, \mathsf{u} \rangle \tag{4.3}$$

で定義される．有限次元ベクトルのノルムに対して証明された性質の多くはそのまま成立する．特に，ノルムは式 (3.17) のように完全にスカラー積を定義する．そしてシュワルツの不等式 (3.18) と三角形不等式 (3.21) は依然として成り立つ．

強収束と弱収束

ヒルベルト空間であるための第3番目の条件は**完全性**である．それは強収束する勝手な元の数列 u_n が極限をもっていて，その極限も $\mathcal{H}$ の元である．(より正式には，もし $m, n \to \infty$ で $\|\mathsf{u}_m - \mathsf{u}_n\| \to 0$ なら，$\|\mathsf{u}_m - \mathsf{u}\| \to 0$ となるような**一意的**な $\mathsf{u} \in \mathcal{H}$ が存在する.) 上に定義されるように，**強**収束が本質的であることに注意しよう．任意の v に対して数列 $\langle \mathsf{v}, \mathsf{u}_n \rangle$ が極限 $\langle \mathsf{v}, \mathsf{u} \rangle$ に近づくという性質によって定義される弱収束は，完全性には十分でない．たとえば，u_n が正規直交ベクトルからなる無限数列なら，スカラー積 $\langle \mathsf{v}, \mathsf{u}_n \rangle$ は極限，すなわち0をもつ一方，明らかに数列 u_n は $\mathsf{u} = 0$ に収束していない．

演習問題 4.2 デルタ関数の平方根 (後にわかるように，そのようなものは存在しない) を定義してみよう．関数列

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & (|x| < 1/2n \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1/2n \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.4}$$

を考えよう．それぞれの関数は規格化されているにもかかわらず，数列 u_n はゼロに弱収束することを示せ．さらに，この数列は，m と n が無限大になるとき，$\|\mathsf{u}_m - \mathsf{u}_n\|$ が極限をもたないので，強収束しないことを示せ．

完全性の要請には直接，物理的意味はないが，ヒルベルト空間に関する多くの定理の証明が何らかの極限を必要とし，その極限もヒルベルト空間に属さなくてはならないので，完全性の要請は本質的である．もし完全性が満足されていなければ，ヒルベルト空間にはならず，ヒルベルト空間に対して証明されたいくつかの定理はもはや成立しなくなる．

特に，**連続**関数はヒルベルト空間を形成して**いない**，なぜなら連続関数の数列は，その極限として，不連続関数をもつことができるからである．初等的例は矩形波のフーリエ展開である．この展開の有限項は連続であるが，その極限は不連続である．

事例研究：特異点の自発的発生

シュレーディンガー波動関数が常に連続で有限であるようにすると，自由粒子の場合さえ矛盾に陥る．$t = 0$ で連続関数によって表され，時間発展して不連続に，あるいは特異点さえもつようになる状態をつくることは難しくない．実際，自由粒子のシュレーディンガー方程式を考えよう．

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{4.5}$$

ここでは，$m = \hbar = 1$ という単位系が選ばれている．$\psi(x,0)$ という初期条件に対して，式 (4.5) の具体的解[*1]は

$$\psi(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi it}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2t}\, \psi(y,0)\, dy \tag{4.6}$$

である．読者は，式 (4.6) は式 (4.5) の解で，$\lim_{t\to 0} \psi(x,t) = \psi(x,0)$ を満たすことを確かめるとよい．シュレーディンガー方程式をこのように積分方程式として書く方が，微分方程式より利点をもっており，たとえ ψ が微分可能関数ではないとしても成立している．

例として，

$$\psi(x,0) = e^{-ix^2/2}\,(1+x^2)^{-1/3} \tag{4.7}$$

をあげよう．これは 2 乗可積分で，至るところ連続で微分可能である．このとき

$$\psi(x,t) = \frac{e^{ix^2/2t}}{(2\pi it)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2(1-t)/2t}\, e^{-ixy/t}\, \frac{dy}{(1+y^2)^{1/3}} \tag{4.8}$$

となる．被積分関数は，大きな $|y|$ に対して $|y|^{-2/3}$ のようにしか小さくならないが，複素指数の激しい振動のために，$x=0$ で $t=1$ を**除いて**，可積分となっている．つまり，$\psi(0,1)$ は無限大である．具体的に書き下せば，時刻 $t=1$ で，

$$\psi(x,1) = \frac{e^{ix^2/2}}{(2\pi i)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}\, dy}{(1+y^2)^{1/3}} \tag{4.9}$$

となる．右辺の積分は具体的に計算できる[*2]．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy\, dy}{(1+y^2)^{1/3}} = \frac{2\,\pi^{1/2}}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{1/6} K_{1/6}(|x|) \tag{4.10}$$

ここで $K_\nu(x)$ は第 3 種の変形ベッセル関数であり，$x=0$ で無限大であるにもかかわらず 2 乗可積分である．

演習問題 4.3　もっと穏やかな例は

$$\psi(x,0) = e^{-ix^2/2}\, x^{-1} \sin x \tag{4.11}$$

である．ψ が $t=1$ で有限の跳び

$$\psi(x,1) = \begin{cases} e^{ix^2/2}\,(\pi/2i)^{1/2} & (|x|<1\text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1\text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.12}$$

をもつことを示せ．

[*1] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York (1970) p. 163.

[*2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York (1954) Vol. I, p. 11, Eq. (7).

可　　分

ヒルベルト空間は，任意の $\mathsf{v} \in \mathcal{H}$ が式 (3.6) のように

$$\mathsf{v} = \sum v_m \, \mathsf{e}_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \cdots, \infty) \tag{4.13}$$

$(\langle \mathsf{e}_m, \mathsf{e}_n \rangle = \delta_{mn}$，$\sum |v_m|^2$ は有限) であるような**可算個の**ベクトルの組 $\{\mathsf{e}_m\}$ が存在すれば，**可分**[*3]であるといわれる．v をこのように離散的な和として書いても，それは $v(x)$ のような連続変数の関数によって表す可能性を排除するものではない．離散的基準系と連続変数による表現間の関係の単純な例を示すため，$\mathcal{H}$ が区域 $0 \le x \le 2\pi$ 上のすべての 2 乗積分可能関数 $v(x)$ から成り立っていて，そのスカラー積が

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{u(x)}\, v(x)\, dx \tag{4.14}$$

で定義されているとしよう．ディリクレの定理は，たかだか有限個の極大，極小および不連続点をもつ任意の $v(x)$ は孤立点を除いてフーリエ級数によって

$$v(x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_m v_m \, e^{imx} \tag{4.15}$$

と表されることを保証している．上式で，

$$v_m = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} e^{-imx}\, v(x)\, dx \tag{4.16}$$

である．つまり，関数 $v(x)$ はフーリエ係数という可算個の組と同じ情報を含んでいる．$\|\mathsf{v}\|^2 \equiv \langle \mathsf{v}, \mathsf{v} \rangle = \sum_m |v_m|^2$ であることに注意せよ．

もし反例を望むなら，ディリクレ条件を満たさない関数は，$f(x) = x^2 \sin(a/x)$ である．これらの関数は至るところ連続で微分可能だが，$x = 0$ の近傍で無限個の極大と極小をもっている．それゆえに，これらの $f(x)$ は，式 (4.15) のように，パラメーター a によらず，可算個の正規直交基準によって表すことはできない．

不可分ヒルベルト空間は，本書の範囲を大きく越えた込み入った数学が必要とされる．**場** (すなわち，可算無限自由度の古典の力学系) を量子化すると，おのずと不可分ヒルベルト空間[*4]となってしまうので，ここでふれたまでである．その量子化ではまた重ね合せの原理の有効性を制限する**超選択則**が現れる．幸い，普通の量子力学に必要なのは可分ヒルベルト空間だけである．それは，不連続波動関数を含んでもよく，“異常” なものではない．

4.2 線 形 演 算 子

次に，ベクトルをベクトルに写像する無限次元の行列を考えよう．前と同じように，無限次元の結果として生じる最も重要な新しい特徴だけに限って話をしよう．ここでも収束問題が出てくるが，それは当然であろう．

[*3] ここでの単語 “separability” は，6 章で論じられる “separability” (分割可能性) とは完全に異なった意味をもっている．

[*4] G. Barton, *Introduction to Advanced Field Theory* (Interscience, New York, 1963), chapt.13.

たとえば，何でもなく見える行列

$$A_{mn} = \delta_{1m} + \delta_{1n} \tag{4.17}$$

によって，$\mathsf{v} = \mathsf{Au}$ を展開するとき，

$$v_1 = \sum_n A_{1n}\, u_n = u_1 + \sum_n u_n \tag{4.18}$$

と

$$v_m = u_1 \qquad (m \neq 1) \tag{4.19}$$

が与えられる．式 (4.18) に現れる式 $\sum u_n$ は，たとえ $\sum |u_n|^2$ が有限である (たとえば，$u_n = 1/n$) であっても，発散するかもしれない．したがって，Au はすべてのベクトル u に対して定義されるわけではない．さらに，たとえ $\sum u_n$ が有限で，その結果 (4.18) の v_1 が意味をもっていても，v 自身はヒルベルト空間の元ではない．なぜなら，$u_1 = 0$ でないなら，$\sum |v_m|^2$ は発散しているからである．

演習問題 4.4　もし A が上のように定義されるなら，A^2 は存在しないことを示せ．

これらの収束問題は，演算子 A の**定義域**という概念に導く．これは，元 $\mathsf{u} \in \mathcal{H}$ の組で，$\mathsf{v} = \mathsf{Au}$ もまた $\mathcal{H}$ の元であるようなものである．任意の規格化された u に対して $\|\mathsf{Au}\|$ が有界であれば，またその場合に限り，ヒルベルト空間全体が演算子 A の定義域になりうる．有界線形演算子の***ノルム*** $\|\mathsf{A}\|$ は

$$\|\mathsf{A}\| = \sup\left(\|\mathsf{Au}\| \,/\, \|\mathsf{u}\| \right) \qquad (\mathsf{u} \neq 0) \tag{4.20}$$

で定義される．

演習問題 4.5　任意のユニタリー演算子が $\|\mathsf{U}\| = 1$ を満たすことを示せ．

演習問題 4.6　ある有界演算子 A と規格化されたベクトル u および v に対して次のことを示せ．

$$|\langle \mathsf{Au}, \mathsf{Av} \rangle| \leq \|\mathsf{A}\|^2 \qquad \text{かつ} \qquad |\langle \mathsf{u}, \mathsf{Av} \rangle|^2 \leq \|\mathsf{A}\|^2 \tag{4.21}$$

局所および準局所演算子

連続的な添字を使えば，$\mathsf{v} = \mathsf{Au}$ のような表式は

$$v(x) = \int A(x, y)\, u(y)\, dy \tag{4.22}$$

となる．対角行列 $A_{mn} = a_m\, \delta_{mn}$ に対応したものは

$$A(x, y) = a(x)\, \delta(x - y) \tag{4.23}$$

となる．ここで $\delta(x-y)$ はディラックのデルタ関数で，任意の連続関数 f に対し

$$f(x) \equiv \int_{y_1<x}^{y_2>x} \delta(x-y)\, f(y)\, dy \tag{4.24}$$

で定義される．直観的には，デルタ関数 $\delta(z)$ は $z=0$ できわめて高く鋭いピークをもち，$\int \delta(z)\, dz = 1$ を満たす．実際には，その構造はずっと複雑でありうる．この一般化された関数は，**超関数**とよばれ，章末の付録で説明されている．

もし式 (4.23) が成り立つなら，式 (4.22) は $v(x) = a(x)\, u(x)$ となる．このような場合，演算子 A は x 基準系で**局所的**である．その意味はただ関数 $a(x)$ を掛けることである．この関数は A の x 表現とよばれる．

同じく，帯状行列 $B_{mn} = b_m\,(\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n-1})$ に対応するものとして**準局所演算子**を定義できる．この場合，式 (4.23) のかわりに，

$$B(x,y) = b(x)\, \delta'(x-y) \tag{4.25}$$

が得られる．部分積分することによって，

$$v(x) = \int b(x)\, \delta'(x-y)\, u(y)\, dy = b(x)\, u'(x) \tag{4.26}$$

となる．これは，オブザーバブル B の x 表現が微分演算子 $b(x)\, d/dx$ であることを意味する．同様に，デルタ関数の高階の微分は高階の微分演算子に対応する．

これらの演算子は，連続で微分可能な関数にのみ作用するように制限されていても，非有界である．たとえば，$\mathcal{H}$ が区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上のすべての 2 乗積分可能な関数 $v(x)$ から成り立ち，スカラー積は式 (4.14) によって定義されているとしよう．都合の良い基準系は $w_m(x) = e^{imx}/\sqrt{2\pi}$ の集合である．式 (4.15) と (4.16) は，m が $-\infty$ から ∞ までのすべての整数にわたるなら，完全であることを示している．いま $\mathsf{A} := -id/dx$ であって，$\mathsf{A}\mathsf{w}_m = m\mathsf{w}_m$ としよう．そのとき，$\|\mathsf{A}\mathsf{w}_m\|^2 = m^2$ は任意の m に対して有限である．しかし数列 $\|\mathsf{A}\mathsf{w}_m\|^2$ は有界でなく，したがって 演算子 A も有界でない．

さらに別の例として，関数 $\psi = e^{-ix^2/2}\, x^{-1} \sin x$ を $-\infty < x < \infty$ の範囲で考えよう．これは演習問題 4.3 に出てきた関数である．この関数は連続で微分可能である．にもかかわらず，それは $-i\partial/\partial x$ の定義域に属さない．なぜなら，その微分は 2 乗可積分ではないからである．それゆえに自由粒子のシュレーディンガー方程式 (4.5) は，厳密にいえば，この場合無意味である．しかし，等価な積分方程式 (4.6) は何の困難も引き起こさない．たとえ H が非有界であるとしても，ユニタリー演算子 $\mathsf{U} = e^{-i\mathsf{H}t}$ はノルム 1 で，そしてその定義域は全ヒルベルト空間である．このユニタリー時間推進演算子はそれゆえにエルミート演算子 H より基本的といえる．

さらにいくつかの定義

線形演算子と数 c の積は，$(c\mathsf{A})\mathsf{v} = c\,(\mathsf{A}\mathsf{v})$ で定義される．二つの線形演算子の和 $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ は，$(\mathsf{A}+\mathsf{B})\,\mathsf{v} = \mathsf{A}\mathsf{v}+\mathsf{B}\mathsf{v}$ で，その積 AB は $(\mathsf{A}\mathsf{B})\,\mathsf{v} = \mathsf{A}\,(\mathsf{B}\mathsf{v})$ で定義される．$c\mathsf{A}$,

$\mathsf{A}+\mathsf{B}$ および AB も線形演算子であることに注意せよ．$c\mathsf{A}$ の定義域は A のものと同じである．$\mathsf{A}+\mathsf{B}$ の定義域は，A と B の定義域**共通部分**として定義される．AB の定義域は表式 Bv が定義されて，A の定義域に属するベクトルでできている．上の定義で保証される最小の境界を超えて，自然な方法で，これらの定義域を拡大できることが多い．

明らかに，普通の数は有界な線形演算子の自明な場合である．したがって，多くの場合，数 1 と単位演算子 $\mathbb{1}$ の間の区別をしないでよいであろう．ゼロ演算子 O は任意のベクトル u に対する $\mathsf{Ou}=0$ という性質で定義される．後に役立ついくつかの初等的補助定理を以下の演習問題に列記しよう．

演習問題 4.7　もしすべての v に対して $\langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle=0$ であれば，$\mathsf{u}=0$ である．　**ヒント：** $\mathsf{v}=\mathsf{u}$ とせよ．

演習問題 4.8　もしすべての u および v に対して $\langle \mathsf{Au},\mathsf{v}\rangle=0$ ならば，$\mathsf{A}=\mathsf{O}$ が導かれる．

演習問題 4.9　もしすべての v に対して $\langle \mathsf{Av},\mathsf{v}\rangle=0$ ならば，$\mathsf{A}=\mathsf{O}$ であることを示せ．

演習問題 4.10　もし A が有界ならば，$\|c\,\mathsf{A}\|=|c|\,\|\mathsf{A}\|$ であることを示せ．

演習問題 4.11　任意の有界な演算子 A と B に対して，次式を示せ．

$$\|\mathsf{A}+\mathsf{B}\|\le\|\mathsf{A}\|+\|\mathsf{B}\| \qquad \text{および} \qquad \|\mathsf{AB}\|\le\|\mathsf{A}\|\,\|\mathsf{B}\| \tag{4.27}$$

共役演算子

演算子 A がヒルベルト空間のベクトル v の**稠密**[*5]な集合の上で定義されているとしよう．**共役**演算子 A^* は関係式

$$\langle \mathsf{A}^*\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle=\langle \mathsf{u},\mathsf{Av}\rangle \tag{4.28}$$

によって定義される．この式は，もし u が同じく稠密な集合に属するなら，A^* を一意的に決定する．実際，もし式 (4.28) が二つの解 A_1^* と A_2^* をもつとするなら，これらは $\langle(\mathsf{A}_1^*-\mathsf{A}_2^*)\mathsf{u},\mathsf{v}\rangle=0$ を満足して，このことから $\mathsf{A}_1^*-\mathsf{A}_2^*=\mathsf{O}$ が導かれる．(これは演習問題 4.8 の結果を稠密な集合に拡張することによって証明される.) しかしながら，一般的には A^* の定義域が稠密であるという保証はない．(ひょっとして，それはただ一つの元 0 しかもたないかもしれない.)[*6]

$\mathsf{A}^*=\mathsf{A}$ を満たす演算子は**自己共役** とよばれる．等式 $\mathsf{A}^*=\mathsf{A}$ が，両方の演算子は**同じ定義域**をもっていることをも意味していることに注意しよう．二つの演算子が，そ

[*5] ベクトルの集合は，もし $\mathcal{H}$ のすべてのベクトルがその集合のある元によって任意の精度で近似することができる場合，**稠密**である．

[*6] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York (1955) pp. 300, 305.

れらの定義域の共通領域で同じように作用するというのでは十分ではない．この要求は，次の例が示すように，本質的である．

再び区間 $0 \le x \le 2\pi$ 上のすべての 2 乗積分可能な関数 $v(x)$ から成り立ち，スカラー積が式 (4.14) によって定義されているヒルベルト空間を考えよう．演算子 $\mathsf{A} = -id/dx$ はすべての微分可能な関数 $v(x)$ 上で定義されている．その共役 A^* も $-id/dx$ と書かれるが，A^* は A より小さい定義域をもつことがわかる．それは境界条件 $u(0) = u(2\pi) = 0$ を満たす微分可能関数 $u(x)$ の上でのみ定義される．実際，

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{Av} \rangle - \langle \mathsf{A}^*\mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = -i \int_0^{2\pi} [\, \overline{u(x)}\, v'(x) + \overline{u'(x)}\, v(x) \,]\, dx \tag{4.29}$$

$$= -i\, [\, \overline{u(2\pi)}\, v(2\pi) - \overline{u(0)}\, v(0) \,] \tag{4.30}$$

であり，$v(0)$ と $v(2\pi)$ は任意なので，上式は，関数 $u(x)$ が $u(0) = u(2\pi) = 0$ を満たす場合，その場合に限り，ゼロとなる．このように，この例では，(u に作用する) A^* の定義域は (v に作用する) A の定義域より小さい．このことは

$$\mathsf{A} \supset \mathsf{A}^* \qquad \text{あるいは} \qquad \mathsf{A}^* \subset \mathsf{A} \tag{4.31}$$

と書かれ，そして A は A^* の**拡張**である，あるいは A^* は A の**制限**であるという．両方の演算子は定義域の共通領域で一致することに留意せよ．

閉　包

定義域 $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ をもつ演算子 A は，もしすべての数列 $\mathsf{v}_n \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ が同じく $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ に属する極限 v をもち，さらに数列 Av_n が極限 Av をもつならば，**閉じている**といわれる．たとえ A が閉じていなくとも，式 (4.28) によって定義されるその共役 A^* は常に閉じている．なぜならスカラー積はその引数に関して連続関数だからである．もし A が閉じていて，$\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ が $\mathcal{H}$ で稠密ならば，A^* の定義域も同じく $\mathcal{H}$ で稠密であり，かつ $\mathsf{A}^{**} = \mathsf{A}$ である[*6]．

対称演算子と自己共役拡張

$\mathcal{H}$ の稠密な領域で $\langle \mathsf{u}, \mathsf{Bv} \rangle = \langle \mathsf{Bu}, \mathsf{v} \rangle$ を満足する演算子は**対称である**とよばれる．(もう一つの言い方は，$\mathsf{B} \subseteq \mathsf{B}^*$ である.) たとえば，式 (4.29) で，A^* は対称であるが，A はそうではない．物理の文献では，“エルミート” という用語が，自己共役あるいは対称のどちらかに無差別に使われることが多い．

演習問題 4.12　もし A, B, A + B および AB が稠密な定義域をもつなら，

$$(\mathsf{AB})^* \supseteq \mathsf{B}^*\,\mathsf{A}^* \qquad \text{および} \qquad (\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B})^* \supseteq \overline{\alpha}\,\mathsf{A}^* + \overline{\beta}\,\mathsf{B}^* \tag{4.32}$$

を証明せよ．同じく，任意の複素数に対して $(\alpha\mathsf{A})^* = \overline{\alpha}\,\mathsf{A}^*$ を証明せよ．　⋆

対称演算子の定義域は，それが自己共役になるように拡張できることが多い．一つの対称演算子が無限通りの**異**なった自己共役拡張をもつこともありうる．たとえば，定義域が，

$$v(2\pi) = e^{2\pi i\alpha}\, v(0) \tag{4.33}$$

$(0 \le \alpha < 1)$ を満たす微分可能関数 $v(x)$ からできているような演算子 $\mathsf{A}_\alpha = -id/dx$ のファミリーを定義しよう．これらの微分演算子はすべて $-id/dx$ と書かれ，"同じに見える" が，実際には，定義域が異なっている (まったく重なり合う部分さえない) ので，それらは，非常に異なっている．これらの演算子の一つ一つに対して，式 (4.29) から 共役演算子 A_α^* は再び $-id/dx$ であることが導かれる．ところが，A_α^* の定義域は A_α と同じである．なぜなら式 (4.33) と並んで境界条件

$$\overline{u(2\pi)} = e^{-2\pi i\alpha}\, \overline{u(0)} \tag{4.34}$$

が成立すれば，式 (4.30) の右辺がゼロになるからである．したがって，$\mathsf{A}_\alpha^* = \mathsf{A}_\alpha$ である．これらの A_α^* は，式 (4.29) で定義された対称演算子 A^* の自己共役拡張である．一つ一つの α の値によって，**物理的に異なったオブザーバブル**を表す異なった拡張が生み出される．違いは，様々な A_α に対して固有値方程式 $\mathsf{A}_\alpha \mathsf{v} = \lambda \mathsf{v}$ によって与えられる A_α のスペクトルから明らかにわかる．この固有値方程式は，具体的には，境界条件 (4.33) をもった方程式，$-i\,dv/dx = \lambda v$ である．解は $v(x) = e^{i(m+\alpha)x}$ (m は整数) である．それゆえに A_α の固有値 (すなわち，観測可能な値) は $m+\alpha$ で，それらは α の値で異なっている．

アハラノフ–ボーム効果

A_α のような微分演算子に簡単な物理的解釈を与えることができる．磁束 Φ が貫いている，無限に長くて細いソレノイドを考えよう[*7]．ソレノイドの外部には磁場 $\mathbf{B}$ は存在しないにもかかわらず，磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が存在して，ソレノイドのまわりの線積分は $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi$ を満たす．たとえば，もしソレノイドに沿って z 軸の円筒座標系 r, θ, z をとり，適当なゲージを選べば，ベクトル $\mathbf{A}$ は方位角成分 $\Phi/2\pi r$ のみをもつ．(磁束 Φ はゲージ不変であることに注意せよ.) ソレノイドの外部領域で運動している，質量 m と 電荷 q の自由粒子は，古典的にはハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[{p_r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta - \frac{q\Phi}{2\pi c}\right)^2 + {p_z}^2\right] \tag{4.35}$$

によって記述される．そのとき，古典正準変換 $p_\theta \to p_\theta + q\Phi/2\pi c$ は式 (4.35) から磁束の項を完全に消去することができる．その結果ソレノイドはその外部の電荷の運動に影響を与えない．これは，ソレノイドの外部に磁場がないので，予想される古典的結果である．

[*7] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* 115 (1959)485.

量子力学でも (p_θ は $-i\hbar\partial/\partial\theta$ になる) 同じく，上記の正準変換に類似した，シュレーディンガー方程式から Φ を消去するユニタリー変換がある．その変換は

$$\psi = e^{iq\Phi\theta/2\pi\hbar c}\chi \tag{4.36}$$

で，

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{q\Phi}{2\pi c}\right)\psi = e^{iq\Phi\theta/2\pi\hbar c}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\chi \tag{4.37}$$

を与える．χ で書かれたシュレーディンガー方程式は，正に自由粒子の方程式と見える (磁束 Φ はどこにも現れない) が，その一方で新しい波動関数 χ は，単に $\psi(2\pi) = \psi(0)$ のかわりに，境界条件

$$\chi(2\pi) = e^{-iq\Phi/\hbar c}\chi(0) \tag{4.38}$$

を満足しなくてはならない．外部パラメーター Φ に依存し，それを物理的に関連づけるのが**境界条件**である．ソレノイドを取り囲む領域での散乱実験のような，実用的な問題では，ψ と式 (4.37) の左辺で，**あるいは**式 (4.36) によって与えられる χ のいずれでも扱うことができる．後者の場合，ソレノイドの存在は，波動方程式自身によってではなく，境界条件 (4.38) によって考慮されている．物理的状況を表すこれらの二つの方法は完全に同等である．

動径方向運動量

すべての対称演算子が自己共役拡張をもっているわけではない．たとえば，$\mathsf{p}_r = -id/dr$ が，領域 $0 \le r < \infty$ における，条件 $v(\infty) = 0$ を満足する微分可能で 2 乗可積分な関数 $v(r)$ 上に定義され，内積が

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v}\rangle = \int_0^\infty \overline{u(r)}\, v(r)\, dr \tag{4.39}$$

で与えられているとしよう．式 (4.29) は，定義域が境界条件 $v(0) = 0$ によって制限されるなら，p_r は対称であることを示している．そのとき，p_r^* の定義域は $u(0) = 0$ によって制限される必要はない．式 (4.33) と (4.34) と同様に調節しても，p_r と p_r^* の定義域は一致できないことが証明できる．

4.3 交換子と不確定性関係

量子不確定性関係を正式に導出することは，非有界演算子の定義域を正確に指定することの重要性を示し，きわめて教育的である．しかし，こうした数学的事柄を論じる前に，これらのいわゆる “不確定性” の物理的意味を明確にすることが望ましい．

古典観測理論は暗黙のうちに，物理量は未知であるが，客観的な数値をもつと仮定している．測定誤差は，観測者自身の不完全さはいうまでもなく，実験装置の不完全

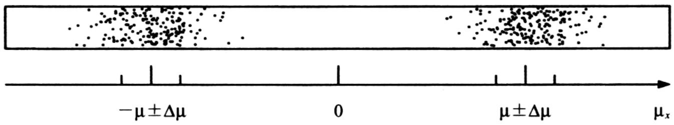


図 4.1 シュテルン–ゲルラッハの実験に対するシミュレーション散布図 (各クラスターには，乱数生成機構でつくられた 200 点が含まれている.)

性によって生じる．それで，もし巨視的対象の長さあるいは重量といった同じ物理量を繰り返し測るなら，結果として得られる値はある平均のまわりに散らばる．データ解析の一番普通で素朴なアプローチは，この平均をただ物理量に対して得られた "最良" の値とすることである．

一般的に，装置誤差には多くの独立な原因がある．もしこれらの誤差が有限な 1 次および 2 次モーメントをもつなら，中心極限定理*8は，偏向していない実験値がガウス分布になることを保証している．ある変数 X の不確定さを推定する便利な方法は，標準偏差 $\Delta X = (\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2)^{1/2}$ を実験データ数の平方根で割ったものである．この不確定さは，"最良" 値の後に，その値の予想される精度を示すために，± 符号と一緒に表記される．たとえば，西暦 1990 年度の記録された太陽の光度は，$L_{\odot} = (3.826 \pm 0.008) \times 10^{26}$ ワットであった．

量子物理学においても装置誤差は存在する．もし多くの独立な原因によるのであれば，ガウス分布が成立する．しかしながら，たとえ完全に信頼できる装置をもつことができたとしても，同じように準備した同一の量子検証の結果は，一般的には一致しないだろう．たとえば，z 方角に偏極しているスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の原子線が，x 方向に沿って向けられたシュテルン–ゲルラッハ磁石を通して送られるなら，観測される磁気モーメント μ_x の分布の結果は図 4.1 のようになろう．

"最良値" 形式を素朴に当てはめると，$\langle \mu_x \rangle \simeq 0$ となって，実験でしらべられている原子の固有磁気モーメントについての有用な情報を与えていない．さらに，この "最良値" からの標準偏差 $\Delta\mu_x \simeq \langle {\mu_x}^2 \rangle^{1/2} \simeq \mu$ は，装置誤差の結果とはまったく異なる．図 4.1 で示されたデータの正しい解釈は，μ_x が μ あるいは $-\mu$ という二つの値をとることができるということである．衝突点の二つの集まりのそれぞれは，**別々に**扱われなくてはならない．その二つの集団の中心間の距離は，装置の欠陥によるのではなく，正真正銘，避けることのできない量子効果である．原子線が平行でないなどの実験の不完全性に関係しているのは，**それぞれ**の集団内部の点の広がりである．μ の値の実際の不確定さは，**それぞれ**の集団の幅をその中の点の数の平方根で割ったもので与えられる．

標準偏差が装置の不確定性と同じで**ない**他の事例はたくさんある．たとえば，素粒

*8 W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York (1968) Vol. I, p. 244.

子の性質の表で，$\phi(1020)$ 中間子は次のように掲載されている[*9].

質量 $m = 1019.413 \pm 0.008$ MeV

全崩壊幅 $\Gamma = 4.43 \pm 0.06$ MeV

明らかに，質量分布の全幅 Γ は，質量の不確定さ (0.008MeV) よりずっと大きい．これらは二つの本質的に異なった概念である．質量の不確定さは，統計を改善するためにもっと多くの実験を行うことによって減らすことができるであろう．全幅 Γ はもっと多くの実験を行うことによって減らすことができない物理的定数である．減らすことができるのは，それ自身の不確定さ (0.06MeV) だけである．

標準偏差 $\Delta X = (\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2)^{1/2}$ は一般的には，量子測定の不均一な結果の良い指針にはなり得ないにもかかわらず，この式の数学的単純さゆえに広く使用されてきた．よく知られた関係式[*10]

$$\Delta \mathsf{A}\, \Delta \mathsf{B} \geq \tfrac{1}{2}\, |\langle \mathsf{AB} - \mathsf{BA}\rangle| \tag{4.40}$$

は不確定さの伝統的な尺度 (標準偏差) を量子力学によってもたらされた新たな特徴 (非可換性) と結び付けている．しかし，事態は見かけよりいっそう複雑である．式 (4.40) は一般的に成立するわけではない．慎重にその導出をしらべてみよう．

シュワルツの不等式 (3.18) から，

$$\|\mathsf{Au}\|^2\, \|\mathsf{Bu}\|^2 \geq |\langle \mathsf{Au}, \mathsf{Bu}\rangle|^2 \tag{4.41}$$

が得られる．ここでは，u が A と B の定義域に属すると仮定された．式 (4.41) の等号は，ベクトル Au と Bu が平行ならば，その場合に限り成り立つ．さらに，演算子の共役の定義 (4.28) から，

$$\langle \mathsf{Au}, \mathsf{Bu}\rangle = \langle \mathsf{u}, \mathsf{A^*B\,u}\rangle \tag{4.42}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \langle \mathsf{u}, (\mathsf{A^*B} + \mathsf{B^*A})\, \mathsf{u}\rangle + \tfrac{1}{2}\, \langle \mathsf{u}, (\mathsf{A^*B} - \mathsf{B^*A})\, \mathsf{u}\rangle \tag{4.43}$$

が導かれる．$\mathsf{A^*B} + \mathsf{B^*A}$ と $i(\mathsf{A^*B} - \mathsf{B^*A})$ の両方とも，自己共役，あるいは少なくともある稠密な領域で対称演算子であることに注意しよう．それゆえに式 (4.43) の初項は実数であり，そして第 2 項は純虚数である．したがって

$$|\langle \mathsf{Au}, \mathsf{Bu}\rangle|^2 = \tfrac{1}{4}\, |\langle \mathsf{A^*B} + \mathsf{B^*A}\rangle|^2 + \tfrac{1}{4}\, |\langle \mathsf{A^*B} - \mathsf{B^*A}\rangle|^2 \tag{4.44}$$

が導かれる．さらに，式 (4.41) において，

$$\|\mathsf{Au}\|^2 = \langle \mathsf{Au}, \mathsf{Au}\rangle = \langle \mathsf{u}, \mathsf{A^*A\,u}\rangle = \langle \mathsf{A^*A}\rangle \tag{4.45}$$

[*9] Review of Particle Properties, *Phys. Rev. D* 45 (1992) VII.22.
[*10] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* 34 (1929) 163.

である．これらの結果をすべてまとめると，

$$\langle \mathsf{A}^*\mathsf{A}\rangle \langle \mathsf{B}^*\mathsf{B}\rangle \geq \tfrac{1}{4}\,|\langle \mathsf{A}^*\mathsf{B}+\mathsf{B}^*\mathsf{A}\rangle|^2 + \tfrac{1}{4}\,|\langle \mathsf{A}^*\mathsf{B}-\mathsf{B}^*\mathsf{A}\rangle|^2 \tag{4.46}$$

である．

演習問題 4.13　次式を示せ．

$$\langle \mathsf{A}^*\mathsf{A}+\mathsf{A}\mathsf{A}^*\rangle \langle \mathsf{B}^*\mathsf{B}+\mathsf{B}\mathsf{B}^*\rangle \geq |\langle \mathsf{A}^*\mathsf{B}\pm \mathsf{B}\mathsf{A}^*\rangle|^2 \tag{4.47}$$

ヒント：表式 $\langle \mathsf{A}^*\mathsf{B}\rangle = \overline{\langle \mathsf{B}\mathsf{A}^*\rangle}$ はスカラー積 $\langle \mathsf{A},\mathsf{B}\rangle$ のようにふるまう．そして，特にそれはシュワルツの不等式を満たす[*11]．　★

量子論では，たいてい A と B が自己共役演算子である場合に興味があり，式 (4.46) は

$$\langle \mathsf{A}^2\rangle \langle \mathsf{B}^2\rangle \geq \tfrac{1}{4}\,|\langle \mathsf{AB}+\mathsf{BA}\rangle|^2 + \tfrac{1}{4}\,|\langle \mathsf{AB}-\mathsf{BA}\rangle|^2 \tag{4.48}$$

となる．この式は，A が $(\mathsf{A}-a)$ に置き換えられても (どんな数 a でも，特に $a=\langle \mathsf{A}\rangle$ であっても)，成り立つ．そのとき

$$\langle (\mathsf{A}-\langle \mathsf{A}\rangle)^2\rangle = \langle \mathsf{A}^2\rangle - \langle \mathsf{A}\rangle^2 = (\Delta \mathsf{A})^2 \tag{4.49}$$

と，同様に $\Delta\mathsf{B}$ に対する式が得られる．不確定性関係 (4.40) はただちに導かれる．次に式 (4.40) で等号が成立する条件をしらべよう．ベクトル $(\mathsf{A}-\langle \mathsf{A}\rangle)\mathsf{u}$ と $(\mathsf{B}-\langle \mathsf{B}\rangle)\mathsf{u}$ は平行で，しかも式 (4.43) の実数の寄与はゼロにならなければならない．二つ目の条件は

$$\langle (\mathsf{A}-\langle \mathsf{A}\rangle)\mathsf{u},(\mathsf{B}-\langle \mathsf{B}\rangle)\mathsf{u}\rangle + \langle (\mathsf{B}-\langle \mathsf{B}\rangle)\mathsf{u},(\mathsf{A}-\langle \mathsf{A}\rangle)\mathsf{u}\rangle = 0 \tag{4.50}$$

と書くことができる．平行条件は

$$\alpha(\mathsf{A}-\langle \mathsf{A}\rangle)\mathsf{u} + \beta(\mathsf{B}-\langle \mathsf{B}\rangle)\mathsf{u} = 0 \tag{4.51}$$

であり，これらの 2 式から比 α/β が純虚数となることが導かれる．

ところで，前述のすべての数学的操作が意味をもつためには，状態ベクトル u が，式 (4.41) で見られるように A と B の定義域に属するだけでなく，$\mathsf{A}^*\mathsf{B}$，$\mathsf{B}^*\mathsf{A}$，$\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ および $\mathsf{B}^*\mathsf{B}$ の定義域に属さなければならない．これらの定義域 (重なり合う部分さえないかもしれない) の一つでもその範囲外にあるベクトル u は不確定性関係 (4.40) を破る可能性がある．

いくつかの例をしらべよう．最も単純な場合はデカルト座標とその共役運動量である．x 表現では，これらの演算子はそれぞれ x および $p=-i\hbar d/dx$ である．それらの交換子は

$$[x,p] = i\hbar \tag{4.52}$$

[*11] L. Pitaevskii and S. Stringari, *J. Low Temp. Phys.* 85 (1991) 377.

である．両方の演算子は，もし二つのベクトルの内積が

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}\, v(x)\, dx \tag{4.53}$$

なら，自己共役である．このとき，

$$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar/2 \tag{4.54}$$

という標準的不確定性関係が得られる．ところで，x と p は両方とも非有界演算子なので，それらの定義域の外にある関数が存在する．たとえば，2 乗可積分である関数 $(\sin x^2)/x$ は，x の定義域にも p の定義域にも属さないことが容易に確かめられる．そうした関数に対して，Δx と Δp は両方とも無限大となるが，もしそれらがそもそも意味をもっているなら，式 (4.54) が満たされるのは自明である．

演習問題 4.14　式 (4.54) での等号が

$$\psi(x) = C\, e^{-ax^2 - bx} \tag{4.55}$$

(a は正の実数，b は複素数) の場合だけに成立することを示せ．具体的に規格化定数 C を求め，この "最小不確定性波束" に対する $\langle x \rangle$ と $\langle p \rangle$ の値を計算せよ．　**ヒント：** ψ は，$(p - \langle p \rangle)\psi = im\omega(x - \langle x \rangle)\psi$ を満たさなければならない．(ただし，$m\omega$ は質量/時間の次元をもつ定数である.)

式 (4.54) のような不確定性関係は，計測器の精度について述べているのではない．逆に，**完璧**な装置 (普通の実験室機器による実験誤差は通常これらの量子不確定性よりずっと大きい) の存在を仮定して，導出している．式 (4.54) の唯一の正しい解釈は次の通りである．もし**同じ**準備手順が数多く繰り返されて，そして x，あるいは p のどちらかが測定されるなら，x か p に対して得られるた様々な結果は，標準偏差 Δx および Δp をもち，その積が $\hbar/2$ より小さくはできないということである．しばしば主張されるような，x の測定が p の値を "乱す"，あるいはその逆という問題はここにはない．実際，x と p の測定は両立できず，**異なる**粒子 (そのすべてが同一に準備されている) に対して行われるのであり，これらの測定はお互いにいかなる方法でも乱すことはできない．不確定性関係 (4.54)，あるいはさらに一般的に (4.40) は，ただ量子検証の結果の本質的乱雑性を反映しているだけである．

今度は，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲の角変数 θ と共役運動量 $p_\theta = -i\hbar d/d\theta$ を考えよう．スカラー積が式 (4.14) のように定義されていて，p_θ の定義域が $v(2\pi) = v(0)$ を満たす微分可能関数に制限されるなら，両演算子は自己共役である．そのとき不確定性関係

$$\Delta\theta\, \Delta p_\theta \geq \hbar/2 \tag{4.56}$$

が得られるであろうか? この式は明らかに間違っている．p_θ のすべての固有関数がそれを破っている．すなわち，$u_m(\theta) = (2\pi)^{-1/2}\, e^{im\theta}$ は明らかに $\Delta p_\theta = 0$ を満たして

いるが，一方 $\Delta\theta$ は約 1.8 である (次の演習問題を参照)．間違いの原因を見いだすのは難しくない．固有関数 $u_m(\theta)$ は積 $p_\theta\,\theta$ の定義域に属していない．なぜなら $\theta\,u_m(\theta)$ は周期条件 $v(2\pi)=v(0)$ を満たしておらず，したがって p_θ の定義域に属していないからである．

演習問題 4.15　p_θ のどんな固有関数に対しても $\Delta\theta=\pi/\sqrt{3}$ であることを示せ．

演習問題 4.16　間違った不確定性関係 (4.56) を載せている 3 冊の量子力学の教科書と正しく記述している教科書一冊を見つけよ．　★

演習問題 4.17　不確定性関係 $\Delta t\,\Delta E \geq \hbar/2$ (あるいは $\gtrsim \hbar$) を載せている別の 3 冊の教科書を見つけよ．それぞれの教科書がこの式の意味をどのように説明するか注意深く読め．これは式 (4.40) の特別な場合ではありえない．時間 t は演算子でない (古典力学では，力学変数ではない) ので，Δt は t の測定の結果の標準偏差ではありえない．(この問題は 12.8 節で論じる.)　★

事例研究：積の交換子

よく知られた恒等式

$$[\mathsf{A},\mathsf{BC}] \equiv [\mathsf{A},\mathsf{B}]\,\mathsf{C}+\mathsf{B}\,[\mathsf{A},\mathsf{C}] \tag{4.57}$$

から，もし A が B および C と交換するなら，A が積 BC とも交換しなくてはならないと結論づけたくなる．この結論は有限の行列に対しては確かに正しいが，それは次の例が示すように，無限次元のヒルベルト空間では正しくないことがある．

$\mathcal{H}$ が $-\infty \leq x \leq \infty$ における可積分関数からできていて，内積が式 (4.53) によって与えられているとしよう．演算子 A，B，C は x 表現で次のように与えられる．

$$\mathsf{A}=x/|x| \tag{4.58}$$

$$\mathsf{B}=1/x \tag{4.59}$$

$$\mathsf{C}=x\,d/dx \tag{4.60}$$

このとき，$\mathsf{AB}=\mathsf{BA}=1/|x|$ のため，$[\mathsf{A},\mathsf{B}]=0$ である．同様に，$\mathsf{AC}=|x|\,d/dx$,

$$\mathsf{CA}=x\left(\frac{d}{dx}\,\frac{x}{|x|}\right)+|x|\,\frac{d}{dx} \tag{4.61}$$

である．右辺の初項は，$2\delta(x)$ となる不連続関数 $x/|x|$ の微分を含んでいる．一見この項を無視してもよいように見える．なぜなら，$x\delta(x)$ は，$x=0$ で有限な関数 $\psi(x)$ あるいは x^{-1} より特異でない関数 (たとえば $\psi(x)=x^{-0.9}$) に掛かるとゼロに等しいからである．ところで，2 乗可積分な $\psi(x)$ ならいずれも $x^{-1/2}$ より低い特異性をもっているはずである．したがって，$\mathcal{H}$ に属する関数に作用するとき，$\mathsf{AC}=\mathsf{CA}$ と書いて大丈夫である．

今度は，積 $\mathsf{BC} = d/dx$ を考えよう．

$$[\,\mathsf{A},\mathsf{BC}\,] = [\,x/|x|\,,\, d/dx\,] = -2\delta(x) \tag{4.62}$$

となり，A が B および C と別々に交換するにもかかわらず，この交換子は確かにゼロとはならない！ 間違いはどこにあるか？ 前述の計算を慎重にしらべると，$[\,\mathsf{A},\mathsf{C}\,] = -2x\delta(x) \neq 0$ がゼロとおかれていることがわかる．これは，$\mathcal{H}$ に属する関数に掛かるときは常に $x\delta(x) = 0$ であるという理由による．演算子 $\mathsf{B} = 1/x$ は，そうした関数に作用すると，それに原点での特異性を与え，その結果，積 $\mathsf{B}[\,\mathsf{A},\mathsf{C}\,] = -2\delta(x)$ はゼロにならない．この例は，非有界演算子の定義域についてきわめて慎重にしなければならないことの重要さを示している．下に与えたいくつかの演習問題ではもっと多くの驚く例が見られるだろう．

演習問題 4.18　スケールを変える演算子 $\mathsf{D}(s)$ は，正の定数 s を用いて，

$$\mathsf{D}(s)\,\psi(x) = s\,\psi(s^2x) \tag{4.63}$$

によって定義される．$\mathsf{D}(s)$ がユニタリー演算子であることを，そしてそれが式 (4.58) によって定義される符号演算子 A と交換することを示せ．さらに，B が式 (4.59) によって定義されるとき，$[\,\mathsf{A},\mathsf{BD}(s)\,] = 0$ であることを示せ．　⋆

演習問題 4.19　上で定義されたスケール演算子 $\mathsf{D}(s)$ から新しい演算子

$$\mathsf{D}'(1) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathsf{D}(1+\epsilon) - \mathsf{D}(1)}{\epsilon} \tag{4.64}$$

が得られる．$\mathsf{D}'(1) = 1 + 2x\,d/dx = 1 + 2\mathsf{C}$ であることを示せ．ここで，C は式 (4.60) によって定義される演算子である．このため，A がすべての s に対して $\mathsf{BD}(s)$ と交換するにもかかわらず，微分 $\mathsf{BD}'(1)$ とは交換しない．　⋆

4.4　切断されたヒルベルト空間

前章で，物理的**オブザーバブル**はエルミート行列によって表されることを知った．そのさいの処方箋によれば，行列 A の固有ベクトルは正規直交基準系をつくり，その元は最大量子検証のすべての可能な結果によって定義される純粋状態に対応する．これらの結果の一つ一つが A の固有値の一つに対応する．このとき，その固有値は前述の量子検証による，A の測定の結果であるといわれる．

そこで可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における線形演算子の固有値と固有ベクトルの**存在**という難しい問題に注目しよう．これらの演算子は，$\mathcal{H}$ に離散的基底が与えられるなら無限次元行列で，$\mathcal{H}$ が関数空間で表されるなら，連続変数の関数に作用する微分あるいは積分演算子によって表される．ここで新たな特徴は，有限次元のエルミート行列の場合と異なり，**すべての演算子が固有値をもっているわけではないことである**．た

とえば，ヒルベルト空間が領域 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された x の関数から成り立ち，内積が

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{u(x)}\, v(x)\, dx \tag{4.65}$$

と定義されているとしよう．線形演算子 x は完璧なふるまいをする．それは有界で (その定義域はヒルベルト空間全体である)，自己共役である．しかし，他方，それは固有値をもたない．実際，もし $x\psi_\xi(x) = \xi\psi_\xi(x)$ を解いて固有値 ξ を求めようとすれば，$(x-\xi)\psi_\xi(x) = 0$ のため，$x \neq \xi$ のときは常に $\psi_\xi(x) = 0$ となることがわかる．大胆に $\psi_\xi(x) = \delta(x-\xi)$ とする人たちもいるが，これによって，この困難を克服することはできない．なぜならデルタ関数は 2 乗可積分でないので，$\mathcal{H}$ に属さないからである．また，デルタ関数の平方根も導入もできない，なぜならそのようなものは存在しないからである (演習問題 4.2 を参照)．この困難を克服するにはほかの方法を見つけなければならない．

可能性としてしらべるに値することは，連続変数の**離散化**である．これは数値的に微分方程式を解いたり，積分を有限和で置き換えるときに行っている．いまの場合，$\mathcal{H}$ を代用の有限次元のベクトル空間で置き換えてみる．たとえば，関数 $v(x)$ を N 次以下 (N は大きい整数とせよ) の多項式に限ってもよい．そのときには，$N{+}1$ 次元の線形空間となる．この種の切断方法は化学物理学で，一般に原子および分子系のエネルギー準位や遷移振幅を見いだすのに使われている．こうした方法は，滑らかな非調和ポテンシャルで表されたハミルトニアン (本当の分子のハミルトニアンの良い近似である) に対して相応に成功している．というのも正確なエネルギー固有関数が**有限**個の調和振動子固有関数の一次結合によって良く近似されるからである．

残念ながら，切断法は連続スペクトルをもつ演算子 (すなわち，離散的固有値の組をもたない演算子) に対しては成功しない．上で定義された演算子 x の場合についてこのことを詳しくしらべてみよう．もし $\mathcal{H}$ が N 次以下の多項式関数に限られるなら，都合の良い正規直交基底は規格化されたルジャンドルの多項式 $u_n(x) = (n+\frac{1}{2})^{1/2} P_n(x)$ $(n = 0, 1, \cdots, N)$ である．こうするとすべてのことは非常に単純に思われる．唯一の問題は演算子 x がもはや存在しないことである！実際，$x \cdot x^N = x^{N+1}$ は切断されたヒルベルト空間の外にある．

別の選択肢として，x に等価な演算子をその行列要素によって**定義**してみよう．恒等式

$$(2n+1)\, x\, P_n(x) \equiv n\, P_{n-1}(x) + (n+1)\, P_{n+1}(x) \tag{4.66}$$

から，

$$(2n+1) \int_{-1}^{1} x\, P_n(x)\, P_m(x)\, dx = (n\, \delta_{n-1,m} + m\, \delta_{n+1,m})/(m+\tfrac{1}{2}) \tag{4.67}$$

が得られる．それから，

$$x_{mn} = \int_{-1}^{1} u_m(x)\, x\, u_n(x)\, dx \tag{4.68}$$

$$= (m\,\delta_{m,n+1} + n\,\delta_{n,m+1})/\sqrt{(2m+1)(2n+1)} \tag{4.69}$$

となる．もし添字 m と n を無限大までとるなら，この行列は正確に演算子 x を表している．しかしながら，ここでの行列は (m, あるいは n)$\geq N$ に対して**切断**されている．この行列にもともとの演算子 x の性質と異なった性質をもたせる原因はこの切断である．どれほど異なっているのであろうか? それは，帯状行列 x_{mn} によって表される演算子の固有値と固有関数をしらべることでわかる．まず

$$\sum_n x_{mn}\, v_n = \xi\, v_m \tag{4.70}$$

を解いて，$N+1$ 個の固有値 ξ とそれに対応する固有ベクトルを見つけなければならない．(x_{mn} がすでに三角行列であるので，このことは数値的に容易にできる.) そのとき，それぞれの ξ に対して，固有ベクトル v_n の x 表現，すなわち固有関数 $v(x)$ が

$$v(x) = \sum_n v_n\, u_n(x) = \sum_n v_n \sqrt{n+\tfrac{1}{2}}\, P_n(x) \tag{4.71}$$

のように得られるであろう．

結果は，図 4.2 に $N = 100$ の場合が示されている．最初に，固有値が -1 と 1 の間に均等に分布していないことに気づく．それらは両端に集まる傾向がある．また，典型的な固有関数 (この場合第 60 番目) は，直観的に予想されるように，対応する固有値において鋭いピークをもっていることがわかる．けれどもそれは x の全領域にわたって裾をもっている．この裾は他の固有関数との直交性を保証するために必要である．特に $x = \pm 1$ における行過ぎ量 (ギブス現象) に注目しよう．こうした性質は予想外ではない．それらはこの章の付録で論じられるデルタ関数の性質に (図 4.4 を参照) 似ている．

さらに練習として，演算子 $p = -i\hbar d/dx$ の行列要素をしらべよう．それらは

$$p_{mn} = -i\hbar \int_{-1}^{1} u_m(x)\, \frac{du_n(x)}{dx}\, dx \tag{4.72}$$

で，前と同じように $u_m(x) = (m+\frac{1}{2})^{1/2} P_m(x)$ である．部分積分の結果，

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n'(x)\, dx = [\,1 - (-1)^{m+n}\,] - \int_{-1}^{1} P_m'(x)\, P_n(x)\, dx \tag{4.73}$$

となる．なぜなら $P_m(\pm 1) = (\pm 1)^m$ だからである．ルジャンドルの多項式の偶奇性と直交性は，$n = m+1,\, m+3, \cdots$ でないなら，左辺の積分が消えることを保証する．そしてこのような場合，0 にならなければならないのは右辺の積分である．したがって

$$p_{mn} = -i\hbar \sqrt{(2m+1)(2n+1)} \qquad (n = m+1,\, m+3, \cdots) \tag{4.74}$$

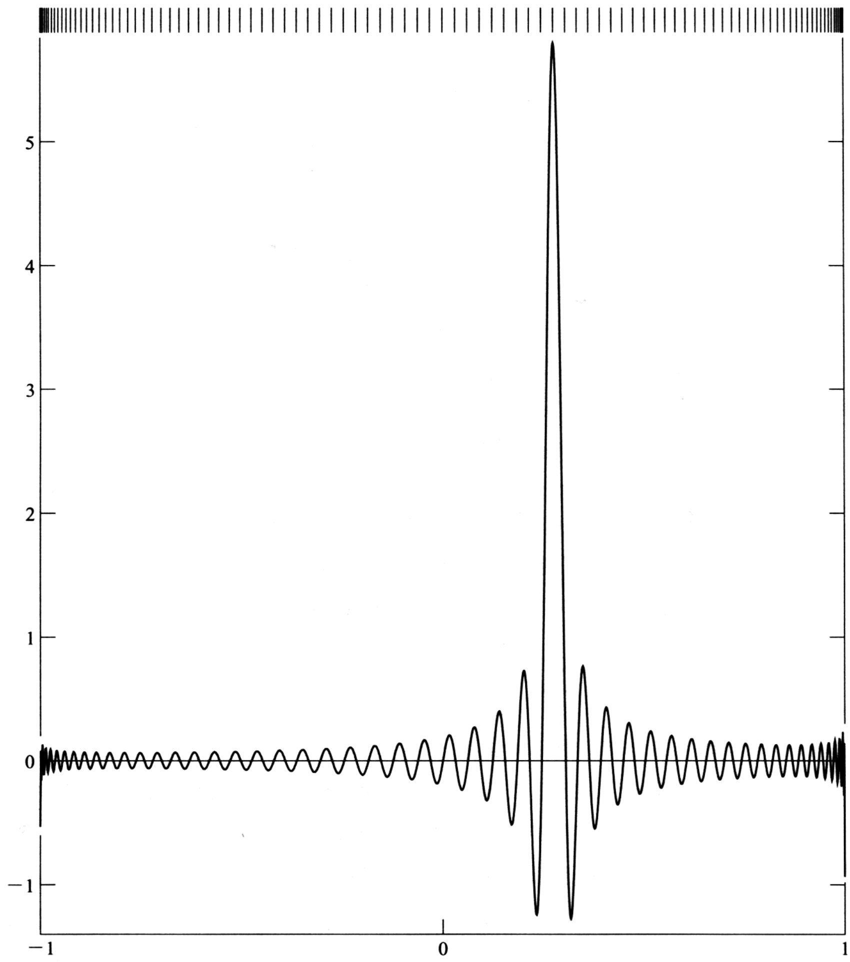


図 4.2　切断された演算子 x の 101 個の固有値が図の上部に縦棒で示されている．60 番目の固有値 (値は 0.27497 27848 である) に対応する規格化された固有関数はそこに鋭いピークをもつが，また x の全領域，−1 から 1 までに広がってもいる．

および他の p_{mn} は 0 となるという結果が得られる．明らかに，この行列はエルミートではない．これは予期されねばならなかった．以前に見たように，演算子 id/dx は，x の領域が有限で，何も境界条件が波動関数に課せられなければ，自己共役でない．

演習問題 4.20　和が切断されないとき，$\sum_s (x_{ms}\,p_{sn} - p_{ms}\,x_{sn}) = i\hbar\delta_{mn}$ を確かめよ．もし和を 0 から N までしかとらなければ，結果はどうなるか?　　⋆⋆

この検討から導かれる結論は，無限次元ヒルベルト空間を切断して有限次元にすると，完全に物理的な状況がゆがめられるということである．切断法は離散的固有値をもつ演算子に対してのみ，しかも有限個の基底ベクトルの一次結合によって良く表される状態に対してのみ正当化されるだろう．他のすべての場合では，根本的に新しいアプローチが必要とされる．

4.5 スペクトル理論

連続スペクトルをもつ演算子の数学的に正しい扱いは，日常平凡な道具で実際に行っていることに似ている．たとえば，物体の位置を見つけたければ，目盛の付いた定規を当てる．正式にはその物理的位置を連続変数 x であるとして考える．しかしながら，定規の分解能は有限である．その j 番目の範囲内のどこでも，結果は値 x_j に対応するといわれる．このように，実質的には，位置測定の結果はもともとの連続変数 x ではなく，むしろ階段関数

$$x' = f(x) = x_j\,, \quad \forall \quad x_j \le x < x_{j+1} \tag{4.75}$$

である．このことは図 4.3 で描かれている．

こうした考察は容易に量子の言語に書き換えられる．x 表現で，演算子 x' は階段関数 $f(x)$ が掛けられたものとして定義される．この演算子は，有限個の離散的固有値 x_j をもつ．これらの固有値の一つ一つは無限に縮退している．x_j と x_{j+1} の間にサポート (0 でない値をもつ領域) をもつ波動関数はいずれも，図 4.3 で示したように，完全に j 番目の定規の範囲に入ってしまっているので，縮退した固有値 x_j に対応する．

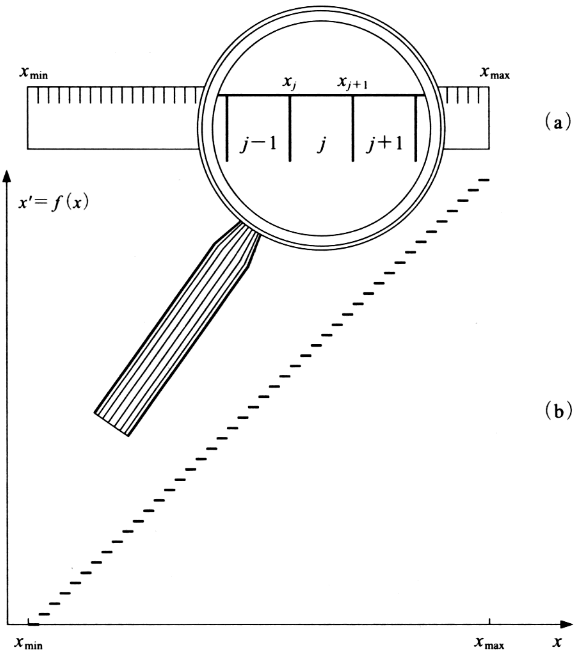


図 4.3 (a) 虫眼鏡が連続観測量 x を測る定規の詳細を示している．(b) 測定の結果は階段関数 $f(x)$ で与えられる．

単位元の直交分解

上記の形式によって記述される量子検証に対して実験を設定すれば，その最終段階で，実数 x_j というラベルを貼った，多数の検出器をぎっしり並べることになろう．このような量子検証が同時に，(それぞれの j に対して一つの質問)「$x_j \le x < x_{j+1}$ であるか?」という一連の質問をする．答の "yes" と "no" は，それぞれ数値 1 と 0 で表す．したがって，これらの質問の一つ一つがそれ自身 x の関数である**射影演算子**(あるいは**射影子**)P_j の測定に対応する．

$$\mathsf{P}_j(x) = \begin{cases} 1 & (x_j \le x < x_{j+1}\text{のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{4.76}$$

これらの射影子は明らかに

$$\mathsf{P}_j\,\mathsf{P}_k = \delta_{jk}\,\mathsf{P}_k \tag{4.77}$$

と

$$\sum_j \mathsf{P}_j = 1 \tag{4.78}$$

を満たす．式 (4.75) によって定義された階段演算子 $x' = f(x)$ は

$$x' = \sum_j x_j\,\mathsf{P}_j \tag{4.79}$$

と書くことができる．それは

$$\|\,x' - x\,\| = \sup\,(x_{j+1} - x_j) \tag{4.80}$$

なので，演算子 x' は実際，図 4.3 で定規の有限な分解能によって許されると同程度，演算子 x を近似している．

演習問題 4.21　式 (4.80) を証明せよ．

さてどのように連続極限をとるか? 式 (4.80) によって，センチメートル，ミリメートルなどなどに分けられた定規の無限の数列があって，連続的長さという抽象概念に限りなく近づくと想像できるだろう．しかし，次のように進む方がいっそう有効である．

演算子の**スペクトル族**を

$$\mathsf{E}(x_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \mathsf{P}_k \tag{4.81}$$

で定義しよう．それらは漸化式

$$\mathsf{E}(x_{j+1}) = \mathsf{E}(x_j) + \mathsf{P}_j \tag{4.82}$$

と境界条件

$$\mathsf{E}(x_{\min}) = \mathsf{O} \qquad \text{および} \qquad \mathsf{E}(x_{\max}) = \mathbb{1} \tag{4.83}$$

に従う．演算子 $\mathsf{E}(x_j)$ の物理的意味は,「$x < x_j$ であるか?」という質問で，答は yes $= 1$，no $= 0$ をもつ．式 (4.77) から見られるように，これらの $\mathsf{E}(x_j)$ は射影子である．それらは，一連のふるいのようにふるまい，

$$\mathsf{E}(x_m)\,\mathsf{E}(x_n) = \mathsf{E}(x_n)\,\mathsf{E}(x_m) = \begin{cases} \mathsf{E}(x_m) & (x_m \leq x_n \text{ のとき}) \\ \mathsf{E}(x_n) & (x_n \leq x_m \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.84}$$

を満たす．

ここで連続極限をとることは容易である．$\mathsf{E}(\xi)$ を質問「$x < \xi$ であるか?」を表し，答として数値 (yes $= 1$，no $= 0$) を返す射影子として定義する．そのとき二つの隣接する値 ξ と $\xi + d\xi$ を考えて，“無限小” 射影子

$$d\mathsf{E}(\xi) = \mathsf{E}(\xi + d\xi) - \mathsf{E}(\xi) \tag{4.85}$$

を定義することができる．これは「$\xi \leq x < \xi + d\xi$ であるか?」を表している．こうしてこの $d\mathsf{E}(\xi)$ は式 (4.82) の無限小増分の P_j としてふるまう．そのとき，階段近似 (4.79) のかわりに，正確な結果

$$x = \int_0^1 \xi\, d\mathsf{E}(\xi) \tag{4.86}$$

が得られる．積分の両端は実際には，式 (4.83) に応じて，**演算子**，すなわち，$\mathsf{E}(x_{\min}) = \mathsf{O}$ と $\mathsf{E}(x_{\max}) = \mathbb{1}$ である．

式 (4.86) は，演算子 x の**スペクトル分解**とよばれ，演算子 $\mathsf{E}(\xi)$ は，x によって生成される**スペクトル族**(**単位元の分解**ともよばれる) である．今度は式 (3.58) に類似した方法で，演算子 x の勝手な関数を定義することができる．

$$f(x) = \int_0^1 f(\xi)\, d\mathsf{E}(\xi) \tag{4.87}$$

式 (4.86) や (4.87) の右辺はスティルチェス積分とよばれる．

いま小さな増分 $d\xi \to 0$ を考えよう．もし極限 $d\mathsf{E}(\xi)/d\xi$ が存在するなら，積分幅は，演算子である $d\mathsf{E}(\xi)$ のかわりに，c 数 $d\xi$ ととることができる．その場合には演算子値のリーマン積分が得られる．

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\mathsf{E}(\xi) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(\xi)\, \frac{d\mathsf{E}(\xi)}{d\xi}\, d\xi \tag{4.88}$$

任意の自己共役演算子は単位元の**一意的な**分解をもたらすことが示せる[*12]．式 (4.86) のようなスペクトル分解は，連続スペクトルをもつ演算子にだけではなく，離散スペ

[*12] M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space*, Amer. Math. Soc., New York (1932) p. 176.

クトルをもつもの，さらには水素原子のハミルトニアンのように，連続と離散の混合したスペクトルをもつものにも当てはまる．離散スペクトルに対しては，もし ξ が引き続く二つの固有値の間にあるなら，$d\mathsf{E}(\xi)=0$，もし k 番目の固有値が ξ と $\xi+d\xi$ の間にあるなら，$d\mathsf{E}(\xi)=\mathsf{P}_k$，すなわち，$k$ 番目の固有状態への射影子である．

いずれにしても射影子 $\mathsf{E}(\xi)$ は，パラメーター ξ に依存する有界演算子であることに注意しておく．それは ξ の不連続関数であっても決して無限ではなく，そして実際には $d\mathsf{E}(\xi)/d\xi$ を決して必要としない．これは，よく知られているリーマン積分に対するスティルチェス積分の有利な点である．式 (4.88) の左辺は，たとえ右辺が意味なくとも，常に意味がある．

演習問題 4.22 もし $f(\xi)$ が実関数なら，式 (4.87) で定義される $f(x)$ は自己共役演算子であることを示せ． ⋆

演習問題 4.23 同じスペクトル族をもつ二つの演算子はそれぞれお互いどうしの関数であることを示せ．

演習問題 4.24 式 (4.84) から直接，与えられたスペクトル族 $\mathsf{E}(\lambda)$ に対して

$$\int f(\xi)\,d\mathsf{E}(\xi)\ \int g(\eta)\,d\mathsf{E}(\eta)=\int f(\zeta)\,g(\zeta)\,d\mathsf{E}(\zeta) \tag{4.89}$$

であることを示せ．これは後に使われる重要な性質である． ⋆

演習問題 4.25 もし $f(\xi)$ が実関数で，x がスペクトル表現 (4.86) をもつ演算子なら，表式

$$e^{if(x)}=\int e^{if(\xi)}\,d\mathsf{E}(\xi) \tag{4.90}$$

はユニタリー演算子であることを示せ． **ヒント**：上の演習問題の諸結果を使え．

自己共役演算子のスペクトル分解は連続変数の測定の厳密な定義を与えてくれる．後者は yes–no 質問の無限個の組と等価である．それぞれの質問は有界 (しかし無限に縮退した) 射影演算子によって表される．しかしながら，この形式的アプローチは，89 ページでその性質が論じられた動径方向の運動量 $-i\hbar d/dr$ (ただし $0\le r<\infty$) のような，自己共役でない演算子の測定に意味を与えることはできない．それでも，古典力学では，p_r はきちんと定義された変数である．このようにして古典力学と量子論の間には厳密な対応はありえないように思われる．

4.6 スペクトルの分類

自己共役演算子は離散スペクトルをもっていてもよく (お互いどうし十分に離れた固有値と規格化された固有ベクトルの**完全**系をもっている)，連続スペクトル，あるいは混合したスペクトルをもっていてもよい．混合したスペクトルには，有限個の離散的

固有値，あるいは，可付番無限個の離散的固有値さえ含まれているかもしれない．それぞれの典型的な例は，有限の高さの井戸型ポテンシャルと水素原子の束縛エネルギー準位である．両方共，離散スペクトルの上に，非束縛状態の連続スペクトルがある．

連続スペクトルをもつ演算子 A は，厳密にいえば，まったく固有ベクトルをもたないけれども，そのスペクトルの各点 λ (すなわち，$d\mathsf{E}(\xi)/d\xi$ が存在して，$\mathsf{0}$ ではない各点) は，次の意味で "ほとんど固有値" である．すなわち，任意の正の小さな ϵ に対して次式

$$\|(\mathsf{A}-\lambda)\,\psi_\lambda\| < \epsilon \tag{4.91}$$

を満たす状態 ψ_λ を構成できる．実際，$\mathsf{E}(\xi)$ を A のスペクトル族としよう．射影子

$$\mathsf{P}_\lambda = \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} d\mathsf{E}(\xi) \tag{4.92}$$

を定義し，ψ_λ を固有値 1 をもつ P_λ の任意の固有状態，すなわち

$$\mathsf{P}_\lambda\,\psi_\lambda = \psi_\lambda \tag{4.93}$$

としよう．こうした ψ_λ は，$\mathsf{P}_\lambda\,\phi \neq \mathsf{0}$ となるような任意の状態 ϕ をとることによって，容易に構成される．規格化されたベクトル $\psi_\lambda = \mathsf{P}_\lambda\,\phi/\|\mathsf{P}_\lambda\,\phi\|$ は，式 (4.93) を満足するであろう．たとえば，もし $\mathsf{A}=x$ なら，ψ_λ の x 表現は $\lambda-\epsilon$ と $\lambda+\epsilon$ の間にサポートをもつ任意の関数 $\psi(x)$ である．

式 (4.91) を証明するために，式 (4.89) から，

$$\mathsf{A}\,\psi_\lambda = \mathsf{A}\,\mathsf{P}_\lambda\,\psi_\lambda = \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} \xi\, d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda \tag{4.94}$$

であり，それで

$$\|(\mathsf{A}-\lambda)\,\psi_\lambda\|^2 = \left\| \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} (\xi-\lambda)\, d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda \right\|^2 \tag{4.95}$$

$$= \left\langle \psi_\lambda\,, \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} (\xi-\lambda)^2\, d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda \right\rangle \tag{4.96}$$

となることに注目する．式 (4.95) でも式 (4.89) を使った．最後の式は通常の積分 (つまり，c 数の和) に変換することができる．

$$\int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} (\xi-\lambda)^2 \,\langle\psi_\lambda\,, d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda\rangle \leq \epsilon^2 \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} \langle\psi_\lambda\,, d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda\rangle \tag{4.97}$$

右辺の積分は単に $\langle\psi_\lambda\,, \int d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda\rangle = \langle\psi_\lambda\,, \mathsf{P}_\lambda\,\psi_\lambda\rangle = 1$ である．こうして式 (4.91) の証明が完了する．

もっと一般的に，

$$\|[\,f(\mathsf{A}) - f(\lambda)\,]\,\psi_\lambda\| = \left\| \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} [\,f(\xi) - f(\lambda)\,]\, d\mathsf{E}(\xi)\,\psi_\lambda \right\| \tag{4.98}$$

が導かれる．もし関数 f が λ のまわりにテイラー級数展開可能

$$f(\xi) = f(\lambda) + (\xi - \lambda)\, f'(\lambda) + \cdots \tag{4.99}$$

ならば，式 (4.98) の右辺は

$$\left\| \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} [\,(\xi - \lambda)\, f'(\lambda) + \cdots]\, d\mathsf{E}(\xi)\, \psi_\lambda \right\| \leq \epsilon\, |f'(\lambda)| + O(\epsilon^2) \tag{4.100}$$

となる．したがって，状態 ψ_λ は任意の滑らかな関数 f に対して平均値 $\langle f(\mathsf{A})\rangle$ が $f(\lambda)$ にいくらでも近いように，つくることができる．このことは**離散**スペクトルの固有値間の**空白**領域の状況と著しく対照的である．演算子 A の固有状態の重ね合せを (二つの離散固有値の間の任意の実数 μ に対して) $\langle \psi, \mathsf{A}\psi \rangle = \mu$ であるようにつくることは容易である一方，偏差

$$\langle \psi, (\mathsf{A} - \mu)^2 \psi \rangle = \|(\mathsf{A} - \mu)\, \psi\|^2 \tag{4.101}$$

を任意に小さくすることはできない．

演習問題 4.26　λ_m と λ_n を A の二つの連続した離散固有値，v_m と v_n を対応する固有ベクトルであるとしよう．$\psi = \mathsf{v}_m \cos\theta + \mathsf{v}_n \sin\theta$ とおく．θ を選んで，$\langle \psi, \mathsf{A}\psi \rangle$ が λ_m と λ_n の間の勝手な値をとるようにできることを示せ．そのとき，偏差 $\|(\mathsf{A}-\mu)\,\psi\|^2$ はどうなるか?

連続スペクトルに埋め込まれた束縛状態

混合スペクトルの離散的部分と連続部分が常に共通要素をもたないというわけではない．それらは重なり合うかもしれない．規格化可能な固有ベクトルに対応する離散固有値が連続スペクトルに埋め込まれている (すなわち，これらの離散固有値の間の領域は空でない) かもしれない．たとえば，お互いどうし遠く離れた二つの水素原子を考えよう．それらの間の相互作用は無視できる．もし量子化された電磁場の真空とそれら原子の相互作用を無視するなら，それぞれの原子は無限個の安定エネルギー準位をもつ．最も低い方から，エネルギー準位は $E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$，$E_2 = -3.4\,\mathrm{eV}$ である．各原子は連続スペクトル $E \geq 0$ ももつ．それゆえに，二つの原子を**一緒**に考えれば，全体の離散固有値の中に，一つの離散固有値 $2E_2 = -6.8\,\mathrm{eV}$ が存在し，それはこの場合の連続スペクトルしきい値，すなわち $E \geq E_1$ **より高い**．

しかし，もし 2 原子の相互作用を考慮すると，この離散固有値 (両方の原子が $n = 2$ 状態に励起された) 状態は準安定になる．それは実際には**共鳴状態**である．系は，結局は 1 個の電子が $n = 1$ 基底状態に落ち，もう一つの電子が無限遠に逃げるという**自己イオン化**遷移をたどるであろう．

演習問題 4.27　この H_2 系の自己イオン化による平均崩壊時間を，2 原子間距離の関数として計算せよ．　　★★

似た状況はオージェ効果で起こる．原子は，最内殻の電子がよりエネルギー的に高い，不完全殻に移るという形で励起されることがある．その結果は原子のハミルトニアン[*13]の固有状態であり，すべての電子は束縛されたままである．しかしながら，その励起した原子の全エネルギーは最内殻が占領され，1 個の電子が自由であるという別の電子の配位と両立できる．結果として生じる正イオンは，中性原子と同様，離散エネルギー準位をもつ．しかし，他方，自由電子の運動エネルギーは連続スペクトルをもつ．このようにして，中性原子の離散エネルギー準位はイオン–電子系の連続スペクトルの中に埋め込まれている．ここでも，これらの“離散エネルギー準位”の大部分が実際には，自己イオン化によって崩壊する非常に狭く長い寿命の共鳴状態である．これらの準位を不連続で，安定であるように見せているのは，一部の相互作用が無視された**近似的**ハミルトニアンを使うからである．

さらにもう一つのタイプのスペクトルは，**離散**固有値の**稠密**な集合からできているものである．これは一見してどちらかというと奇異に思うかもしれないが，後で述べる応用 (10.5 節) で実際に現れる．単純な例として，$0 \le x,\ y < 2\pi$ の関数 $\psi(x,y)$ のヒルベルト空間を考えよう．スカラー積は

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\phi(x,y)}\, \psi(x,y)\, dx\, dy \tag{4.102}$$

で与えられている．その空間で，演算子

$$\mathsf{A} = -i \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2}\, \frac{d}{dy} \right) \tag{4.103}$$

が境界条件

$$\psi(2\pi, y) = \psi(0, y) \qquad \text{かつ} \qquad \psi(x, 2\pi) = \psi(x, 0) \tag{4.104}$$

を満たす微分可能関数 $\psi(x,y)$ の部分空間の上で定義されているとする．その演算子は自己共役である．規格化された固有関数は，固有値 $m + \sqrt{2}\, n$ (m と n は正でも負でも整数をとる) に対応して，$e^{i(mx+ny)}/2\pi$ である．

このスペクトルは非常に単純に見えるが，しかしその物理的意味は興味深いものである．A を測定すると，精度 $\pm\epsilon$ で結果 α が与えられると考えよう．(推測される誤差 $\pm\epsilon$ はもっぱら装置の有限の分解能のためで，量子効果ではない.) いま対応する固有状態 (すなわち，対応する量子数 m と n) について何がいえるだろうか? 量子数については，

$$\alpha - \epsilon < m + \sqrt{2}\, n < \alpha + \epsilon \tag{4.105}$$

から得られるが，この方程式には任意の小さな正数 ϵ に対して，m と n の無限個の解が存在する．

[*13] オージェ効果は**放射を伴わない**電子の再配置である．いまの議論では，核の位置は固定していると仮定し，ハミルトニアンは量子化された電磁場との相互作用を含まない．

このことは，式 (4.105) が mn 平面で狭い帯状の領域を表すことに気づけば，直観的にわかる．非有理数の勾配をもつその帯は，整数座標値 m と n の無限個の点を含んでいる．ϵ が小さくなれば，連続した m と n の値の平均距離は大きくなる．A を正確に測定すれば (たとえば，正確に $\alpha = 7 - 5\sqrt{2}$)，m と n に対してあいまいさのない値が，したがってお互いに交換する演算子 $-id/dx$ と $-id/dy$ の明確な固有状態が与えられる一方で，最小不正確さ ϵ があれば大きく異なった m, n 対が無限個与えられる．

最後に，もう一つの特異なスペクトルのタイプに言及する価値があろう．それは，そのサポートがカントール集合 (必ずしも必要ないが，ゼロ・ルベーグ測度をもつ可能性のある非可付番集合) である**特異連続スペクトル**である．この種類のスペクトルはほとんど周期的なポテンシャルをもつハミルトニアンに対して存在することがある[*14]．

4.7　付録：一般関数

もともとディラックによって導入された特異的なデルタ関数の使用は，フォン・ノイマンによって，彼の本の序文で批判されている[*15]．

> 上で述べたディラックの方法 (これは，ディラックの理論の明快さと簡潔さゆえに，今日量子力学のほとんどの文献で見落とされていますが) は，決して数学的な厳密性の要求を満たしていません．たとえこの要求を自然で適切な方法でもって理論物理学以外の普通の程度にまで下げたにしても同じです．たとえば，この方法は一つ一つの自己共役演算子は対角形にすることができるという架空なことに固執しています．このことが実際には当てはまらない演算子の場合には，自己矛盾した性質をもつ “不当な” 関数を導入する羽目になってしまいます．たとえ明確に定義された実験結果を数値的に計算するだけという手近な問題でも，ディラックのアプローチはしばしばそうした数学的 “虚構” が要求されるのです．もし，現在の解析学の枠組に取り入れられることができない概念でも本質的に物理理論に必要なら，反対はないでしょう ⋯．けれどもこの場合は当てはまりません ⋯．これだけは言っておきたいのですが，正しい構造を解明するには，ディラックの方法の洗練された数学や説明ではなく，むしろ出発点からまるっきり隔たった手順，つまり演算子のヒルベルト理論が必要なのです．

本章では，その趣きを伝えるようにフォン・ノイマンのアプローチに従った．数学的な厳密さや完璧さを試みたわけではない．より詳しくは章末の参考文献を参照されたい．この付録の目的は部分的にディラックのデルタ関数を修復することと，そしてどんな条件下でそれらの使用が正当であるかを明確にすることである．

[*14] J. Avron and B. Simon, *Bull. Am. Math. Soc.* 6 (1982) 81.
[*15] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932); 英訳：*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1955).

純粋数学者の見地からすると，各要素が質の悪くない性質の関数である空間は，各要素がいっそう抽象的な特徴をもつより大きい空間に埋め込めるかもしれない．このより大きい空間で，解析操作はより自由に実行されるかもしれない．そして定理はより単純な，そしていっそう奇麗な形をとるであろう．たとえば，シュワルツによって展開された**超関数論**[*16]は，ディラックの直観的デルタ関数形式の厳密版である．

こうした超関数は広義の極限として得られ，これを "lim" と引用符つきで書くことにする．ところが，後で見るように，それらの性質は，ディラックがグラフで描いたものとは非常に異なっている[*17]．

> $\delta(x)$ のイメージを得るには，実変数 x の関数で，原点 $x=0$ のまわりの，たとえば長さ ϵ の小領域以外いたるところで 0 になり，この領域内部では非常に大きくて，この領域にわたる積分が 1 となるものを考えよ．この領域内部の関数の正確な形は，不必要に激しく変動しないならば (たとえば，関数が常にオーダー ϵ^{-1} であるなら)，重要ではない．そのとき，$\epsilon \to 0$ の極限で，この関数は $\delta(x)$ に近づく．

事態はディラックの直観的描像とかけ離れていることを，簡単な例が示している．フーリエ級数の性質，式 (4.15) および (4.16) から，

$$v(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{im(x-y)}\, v(y)\, dy \tag{4.106}$$

となる．大胆に和の順序を交換しよう．すると

$$v(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(x-y)} \right] v(y)\, dy \tag{4.107}$$

が導かれ，これから

$$(2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(x-y)} = \delta(x-y) \tag{4.108}$$

と推定される．[式 (4.107) におけるように積分の中ではなく，それが単独で存在するとき，] この無限和に意味を与えるため $-M$ から M までの有限和の $M \to \infty$ の場合の "極限" と見なそう．この有限和は幾何級数であって，容易に評価できる．結果は，

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} e^{imz} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(2M+1)z/2]}{\sin(z/2)} \tag{4.109}$$

である (簡単のため $x-y$ を z とおく)．大きい M に対して，右辺が $z=0$ に高さ M/π の鋭いピークをもっていることが容易に見てとれる．そのピークの面積はほぼ 1 である．しかしながら，関数 (4.109) はその狭い領域の外部でゼロであるわけではない．むしろ，それは，周期 $2\pi/M$ で激しく振動し，そして $|z| \lesssim 1$ に対しておよそ

[*16] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris (1950).

[*17] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Univ. Press (1947), p. 58.

$1/\pi z$ 程度に，振幅がゆっくりと減少している．こうした激しい振動の結果，任意の滑らかな関数 f に対して，

$$\int_{y_1<x}^{y_2>x} \frac{\sin[(2M+1)(x-y)/2]}{2\pi\,\sin[(x-y)/2]}\, f(y)\, dy \simeq f(x) \tag{4.110}$$

である．この近似は，大きな M でかつ式 (4.110) における被積分関数の最初の因子よりゆっくり変化する関数 f に対して，正当である．こうした条件の下で，式 (4.109) の $M\to\infty$ の "極限" はデルタ関数の重要な性質を満たす．

$$f(x) = \int_{y_1<x}^{y_2>x} \delta(x-y)\, f(y)\, dy \tag{4.111}$$

この結果は x の近傍で十分滑らかな関数 f に対してのみ正しいことに注意しよう．

異なる形態を示すデルタ関数のもう一つの例は，領域 $-1\le x\le 1$ における，ルジャンドル多項式の直交性と完全性を使うことによって得られる．形式的には，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, P_m(x)\, P_m(y) = \delta(x-y) \tag{4.112}$$

が導かれる．これは，この式に $P_n(y)$ を掛けて y について積分すると，両辺同じ結果，つまり $P_n(x)$ を与えるからである．ルジャンドルの多項式は完全基準系をつくっているので，この同じ性質は $P_n(x)$ の和に展開できる "穏当な" 関数に対して成り立つであろう．ところで，どのように "極限"$m\to\infty$ をとるかをしらべよう．クリストッフェル–ダルブーの公式 (Christoffel–Darboux formula) から[*18]，

$$\sum_{m=0}^{n} (2m+1)\, P_m(x)\, P_m(y) \\ \equiv (n+1)\,[\,P_{n+1}(x)\, P_n(y) - P_n(x)\, P_{n+1}(y)\,]/(x-y) \tag{4.113}$$

である．図 4.4 は，$n=100$ かつ $y=\frac{1}{3}$ の場合 x の関数として，この式のグラフを示している．図 4.2 との著しい類似性がある．$x=\pm 1$ における行過ぎ量 (ギブス現象) さえ同じにみえる．しかしながら，これらの図の鉛直方向のスケールは完全に異なっている．図 4.4 の曲線で囲まれた部分の面積は 1 に等しい (次の演習問題参照)．他方，図 4.2 は，式 (4.71) によって与えらる切断された演算子 x の規格化された固有関数 $v(x)$ を表し，1 と等しいのは $|v(x)|^2$ の積分である．

演習問題 4.28　式 (4.113) の左辺に x^k(任意の $k\le n$) を掛けて，x について積分すると，結果は y^k であることを示せ．

演習問題 4.29　大きい n に対する $P_n(x)$ の漸近展開を使って，式 (4.113) の右辺の簡単な評価を求めよ．　★

[*18] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York (1980) p. 1026.

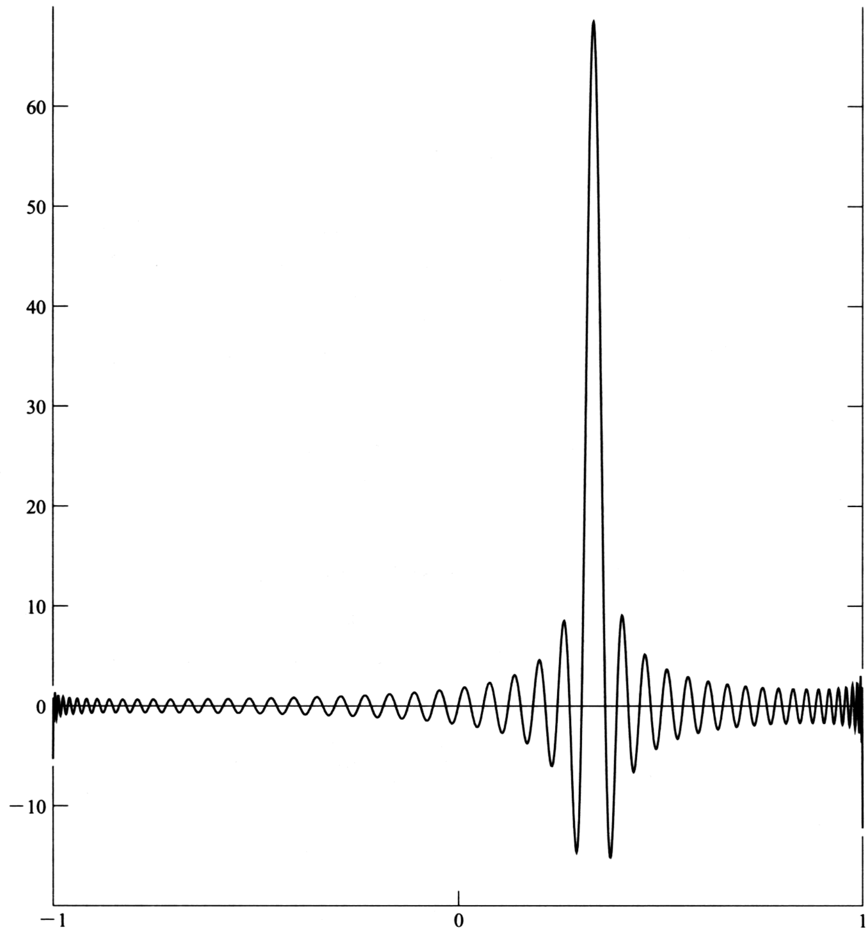


図 4.4 切断されたデルタ関数 (4.113) が，$y = \frac{1}{3}$，$n = 100$ に対して，x の関数として描かれている．

演習問題 4.30 次式

$$\text{“}\lim_{\epsilon\to 0}\text{”}\,\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\,\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \tag{4.114}$$

を示せ．ただし，$\mathcal{P}$ は主値を表す． **ヒント**：この式の実部と虚部を考えよ． ⋆

こうしてデルタ関数 (あるいは**緩増加超関数**と数学の文献でよばれるもの) に厳密な定義を与えることができ，それは正当な計算道具である．しかし，通常の言葉の意味からして，**これらは関数ではない**．そしてそれらを誤用しないように気を使わなくてはならない．特に，これは**量子状態を表すことができない**．なぜならそれは 2 乗可積分でなく，したがってヒルベルト空間の要素ではないからである．同様に，演習問題 4.2 で試みたように，矛盾なくデルタ関数の平方根を定義することもできない．

デルタ関数の本質的な性質は，ただそれを他の滑らかな関数が掛けられている式でのみ安全に使われるということである．ただそのときだけこれらの式の意味がはっき

りしている．他の場合には，結果はきちんと定義されていない．

量　子　場

しかしながら，こういう他の場合が実際起こっているのであり，量子場の理論では中心的役割さえ果たす．量子場の理論は，力学変数が $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ あるいは $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ というような**場**であるような，量子力学の拡張である．ここで，記号 $\mathbf{r}$ は力学変数を表しているのではなく，変数の組 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の連続的な添字として使われている．こうして**無限個**の自由度を取り扱うが，このことはこの章ですでに論じられた困難に加えて，新しい収束問題を生み出す．

初等的な例として，正準交換関係

$$[\,q_m\,,p_n\,]=i\hbar\,\delta_{mn} \tag{4.115}$$

を考えよう．ここで，**無限個**の正準変数の組があると仮定しよう．つまり，添字 m と n は $-\infty$ から ∞ までのすべての整数をとる．さてこれらの離散的変数を，式 (4.15) および (4.16) でフーリエ級数に対して行ったように，連続変数で置き換えよう．それによって "場の変数"

$$Q(x)=(2\pi)^{-1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}q_m\,e^{imx} \tag{4.116}$$

および

$$P(y)=(2\pi)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_n\,e^{-iny} \tag{4.117}$$

をつくったことになる．これらの交換子は

$$[\,Q(x),P(y)\,]=\frac{i\hbar}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(x-y)} \tag{4.118}$$

となって，これは，式 (4.108) によって，

$$[\,Q(x),P(y)\,]=i\hbar\,\delta(x-y) \tag{4.119}$$

と書くこともできる．

この特異性をもつ結果は，量子場変数 $Q(x)$ と $P(y)$ が普通の演算子ではないことを示している．それは，和 (4.116) と (4.117) によって定義されたが，それらの和は**収束しない**．これらの量子場変数は専門的には "演算子値の超関数" として知られている．

いままで，交換子 (4.119) の特異性はただ形式的定義の結果だけであって，何ら真の困難を起こさなかった．しかしながら，**相互作用している**場を含む自明でない問題に拡張して考察するとき，時空の**同じ点における**場の積に遭遇する．たとえば，荷電粒子に対するディラック方程式には，項 $\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$ がある．その方程式を "第二量

子化" すると，場の演算子 $A_\mu(x)$ と $\psi(x)$ の積はきちんと定義されていない．これは，もし結合定数 $e^2/\hbar c$ のべき級数展開で解を得ようとすると，発散積分をもたらす．この特定な理論 (量子電磁力学) と，同じくいくつかの他の理論では，その困難を**繰り込み**とよばれる洗練された方法によって回避することができる．しかしながら，繰り込みは本書の範疇を超えている．

演習問題 4.31 古典場の理論でも，ポアソン括弧はデルタ関数である．なぜ古典場の理論が，量子場の理論のように発散によって煩わされないのか？ ★

4.8 参 考 文 献

この章の目的は，導入用の教科書では通常無視される，量子論のいくつかの数学的局面にスポットを当てることであった．選択した少数の話題だけを扱ったにすぎない．より完全な論議は次の文献を参照せよ．

T. F. Jordan, *Linear Operators for Quantum Mechanics*, Wiley, New York (1969) [リプリント版が Krieger より刊行].

この本は特に量子力学の教科書と一緒に使うように書かれた．その簡潔な体裁は明らかに量子論の数学的な構造の論理と単純さを示している．長くない場合は厳密な証明が与えられている．長くて難しい証明は次のようなより完全な論文を参照するよう指示されている．

F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York (1955) [リプリント版が Dover より刊行].

P. Roman, *Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders*, Pergamon, New York (1975). Vol. I: Algebra, topology, and measure theory; Vol. II: Functional analysis with applications.

この著者は，以前素粒子物理学と量子論の有名な教科書を書いたことで知られているが，序文で次のように書いている.「··· この本は多くの理論物理学者 (特に量子論，高エネルギー物理学，相対論，現代統計物理学に興味をもつ人) の必要を満たすかもしれない ····. これは数学の本ではあるが，根気よく読みこなした学生は，より程度の高い知識を得るのに必要な現代数学の資料を理解できよう.」

M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, New York. Vol. I: Functional analysis (1980); Vol. II: Fourier analysis, self-adjointness (1975); Vol. III: Scattering theory (1979); Vol. IV: Analysis of operators (1978).

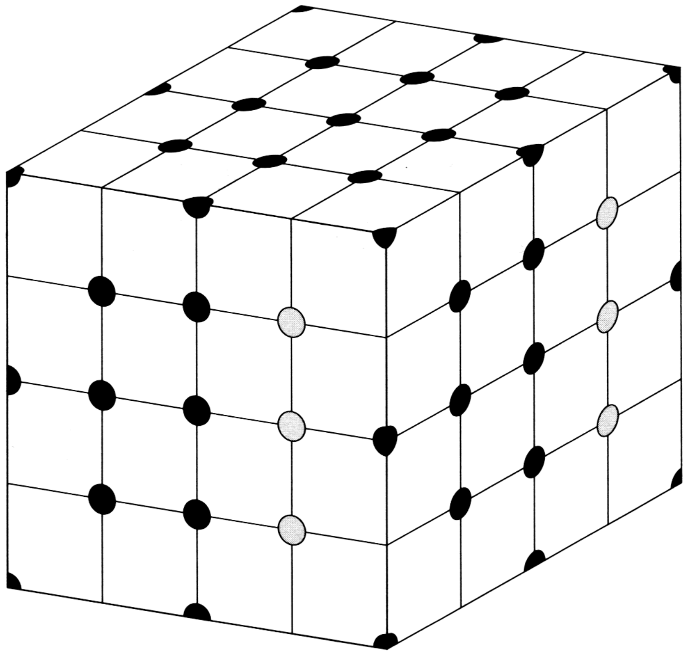
この全 4 巻の百科事典は，量子論の理論家が必要なほぼすべての数学的局面をカバーしている．

数学的パラドックス

C. Zhu and J. R. Klauder, "Classical symptoms of quantum illnesses," *Am. J. Phys.* 61 (1993) 605.

O. E. Alon, N. Moiseyev, and A. Peres, "Infinite matrices may violate the associative law," *J. Phys. A* 28 (1995) 1765.

第II部
隠れた変数決定論と量子分割不可能性



図版 II　7 章で議論されるコッヘン–シュペッカー定理は量子論に対して基本的重要性をもっている．その最も "効率的な" 証明は 31 個の射線 [これは 17 個の直交トライアッドを構成している (212 ページの演習問題 7.20 を参照)] を利用している．これらの射線は，立方体の中心とその表面および縁上の黒点を結んで得られる．(6 個の灰色の点は証明では使われない.) この構成法と 199 ページの図 7.2 の立方体とを比較してみよ．

5 複合系

5.1 量子相関

複合系は (水素原子が陽子と電子から成り立っているように)，複数の量子対象を含む系である．ここにおける問題は，複合系の状態がその構成要素の状態を使って表されるような形式をつくることである．

もし電子と陽子が遠く離れているなら，ことは単純である．ひょっとして電子と陽子は，別々の実験室で，おのおの状態 u と v に準備されたかもしれない．(もちろん，これはいわゆる水素原子ではない.) ベクトル u と v は異なるヒルベルト空間に属する．それらを関数 $u(\mathbf{r}_e)$ および $v(\mathbf{r}_p)$ (ここで $\mathbf{r}_e$ と $\mathbf{r}_p$ はそれぞれ電子と陽子の状態の記述に使うデカルト座標である) によって表すことが可能である．しかし，この問題をまず良く知るためには，ギリシャ文字の添字をつけた電子状態のヒルベルト空間とローマ文字の添字をつけた陽子状態のヒルベルト空間で，u と v の成分を u_m と v_ν とする**離散的**基準系を用いた方がよいだろう[*1]．両方の粒子を一緒にした状態は，$\mathsf{w} = \mathsf{u} \otimes \mathsf{v}$ と書かれ，これらの二つのベクトルの**直積**(しばしば "テンソル積" とよばれる) として表すことができる．その式では，$m\nu$ を**一つ**のベクトル添字と考えなくてはならない．その値はアルファベット順に $m\nu = a\alpha, a\beta, a\gamma, \cdots, b\alpha, b\beta, b\gamma, \cdots$ とリストアップするのが便利だろう．

直積は，**独立**に準備された二つ (あるいはそれ以上) の系の状態を表すことができる．しかし，本当にしらべたい問題は，**相互作用している**粒子の記述である．たとえば，本物の水素原子の記述である．暫定的に，複合系が "単独" 系と本質的には違わない，そして特にそれらが重ね合せの原理 G (49 ページを参照) に従うと仮定しよう．すなわち，もし u_1 と u_2 が電子の可能な状態，v_1 と v_2 が陽子の可能な状態であるなら，式 $\mathsf{w} = \alpha\,(\mathsf{u}_1 \otimes \mathsf{v}_1) + \beta\,(\mathsf{u}_2 \otimes \mathsf{v}_2)$ は電子–陽子系の実現可能な状態である．

この結合された状態 w では，電子と陽子のいずれも純粋量子状態にないということに注目しよう．電子のみの，あるいは陽子のみの結果が確実に予言できるという完全検証がないのである．ただ粒子の**対**だけが，電子と陽子が**相関**をもつ形で明確な純粋状態をもつのである．本章以降の章でこのような状況の多くの例に遭遇する．

相関のある状態が見られる簡単な例は，光子が方解石結晶を通過するときである．

[*1] ここでは，違ったアルファベット文字の添字は，異なるベクトル空間を認識するために使われている．前の章では，それらは同じベクトル空間で異なった基底を意味していた．

光子には，関係する自由度として，偏極と光子がたどる経路 (光線の位置) という二つの自由度がある．これらの二つの自由度は同じ光子に属しているが，形式的には，複合系の二つの構成要素のように取り扱うことができる[*2]．光子の状態を記述しているヒルベルト空間は偏極と位置の空間の直積である．x と y が結晶軸方向によって定義される二つの直交した偏極状態を表し，そして u と v が，それぞれ正常光および異常光の位置を表すとしよう．そこで，この記述のレベルにおいては，光子状態に対する完全基底系は，$x \otimes u$，$x \otimes v$，$y \otimes u$ および $y \otimes v$ と書ける．たとえば，もし光子状態が $x \otimes u$ であるとすると，これは次のことを意味している．つまり，光子が偏極 x に対する検証を受けて，かつその検証が正常光線上 u で行われるなら，光子は確実に検証を通ると予言できる．さらにまた，その光子は (どんな偏極の場合も) 異常光線上 v に置かれている検出器を鳴らすことはないであろうし，(どの位置においても) 偏極 y に対する検証には通らないであろう．これらの予言は “光子は状態 $x \otimes u$ をもっている” という語句のもつ意味にすぎない．

いま，結晶通過前の光子の初期状態が，$(\alpha x + \beta y) \otimes w$ であるとする．ここで，α と β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす既知の二つの複素数で，w が入射光の位置を表す．この状態は直積である．光子は入射光内でのみ見いだすことができ，**確実に**偏極状態 $\alpha x + \beta y$ に対する検証に通り，また，**確実に**直交した偏極 $(\bar{\beta} x - \bar{\alpha} y)$ に対する検証には通らないだろう．しかしながら，いまの実験の方解石結晶は，これらの二つの直交した楕円偏光は検証せず，ただ x 対 y を検証する．それゆえ，いまできる唯一の予言は**統計的**となる．ある光子が結晶を通過した後，正常光線上 u で偏極 x，異常光線上 v で偏極 y で光子を見いだす**確率**がそれぞれ $|\alpha|^2$ と $|\beta|^2$ である．しかしながら，ただ確率だけがすべてを伝えているわけではない．量子論によれば，結晶通過後の光子の状態は

$$\Psi = \alpha x \otimes u + \beta y \otimes v \tag{5.1}$$

と書くことができる．ただし，任意の位相因子は除かれている．(基底ベクトルの定義に含められる.) これは，**相関のある**(あるいは “絡み合った”) 状態とよばれている．対応する過程は図 5.1 に描かれている．

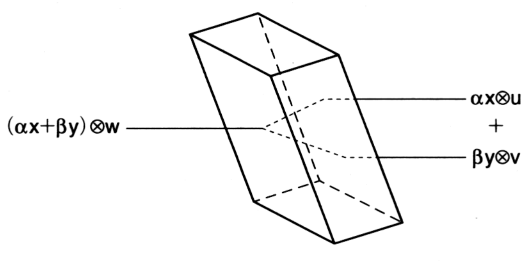


図 5.1　相関のある (“絡み合った”) 状態に光子を準備

*2　古典物理学でも，ハミルトニアン $H = (p_1{}^2 + p_2{}^2)/2m + V(x_1, x_2)$ は，平面上の 1 粒子の場合でも，相互作用している直線上の 2 粒子の場合でも表すことができる．

絡み合った状態の相関の消滅

重ね合せの原理は，式 (5.1) の Ψ が**純粋状態**であることを保証している．このことは，状態 Ψ に準備された 1 光子に対して，常に同じ予言可能な結果をもたらすような**最大**検証 (四つの異なる結果をもつ) が存在することを意味する．今からみるように，このような検証は結晶を通る光子を反射する鏡か，あるいは最初の結晶の鏡像で，2 本のビームを再結合する 2 番目の結晶のどちらかを含んでいよう．光子の状態はその検証によって相関が切られており (再び直積となる)，その偏極は通常のように検証することができる．

絡み合った状態 (5.1) を固有ベクトルの一つとしてもつような最大検証を具体的に設計することは有益である．他の三つの固有ベクトルは，それらすべてが直交している限り，勝手に選べる．それらとして，同じく絡み合った状態 $\bar{\beta}\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}-\bar{\alpha}\mathsf{y}\otimes\mathsf{v}$ と直積 $\mathsf{x}\otimes\mathsf{v}$ と $\mathsf{y}\otimes\mathsf{u}$ を選ぼう．可能な実験設定が図 5.2 に描かれている．

検証装置の最初の要素は方解石結晶であり，それは図 5.1 の結晶の鏡像で，したがってその効果を反転する．理想的には，

$$\alpha\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}+\beta\mathsf{y}\otimes\mathsf{v}\to(\alpha\mathsf{x}+\beta\mathsf{y})\otimes\mathsf{w} \tag{5.2}$$

が得られる．しかしながら，この初期状態を完璧に再現するには，二つの結晶が完全に対称的である必要がある．もしその対称性が近似的にすぎないなら，層厚の差異がどのようなものであれ，それぞれ正常光と異常光で，余分の位相のずれ ξ と η が生ずる．そのときは，式 (5.2) のかわりに，

$$\alpha\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}+\beta\mathsf{y}\otimes\mathsf{v}\to(\alpha\,e^{i\xi}\,\mathsf{x}+\beta\,e^{i\eta}\,\mathsf{y})\otimes\mathsf{w} \tag{5.3}$$

が得られる．式 (5.3) の右辺は依然として**純粋**状態であることに注意しよう．

他の三つの入射状態一つ一つに準備された光子に何が起こるかもしらべなくてはならない．最初に，式 (5.3) が任意の α と β に対して成り立つことに注目しよう．その右辺で，w，ξ および η は結晶の性質には依存するが，光子の準備と関連ある α と β

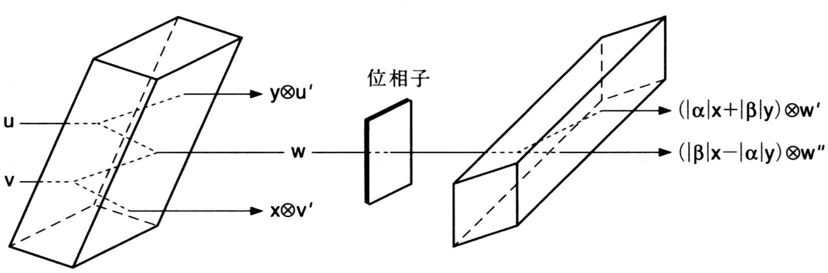


図 5.2 四つの異なる結果をもつ最大検証．その結果の一つは，入射光子が式 (5.1) によって表される相関のある状態に準備されたことを証明する．

には依存しない．したがって，別々に

$$\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}\ \rightarrow\ e^{i\xi}\,\mathsf{x}\otimes\mathsf{w} \qquad \text{および} \qquad \mathsf{y}\otimes\mathsf{v}\ \rightarrow\ e^{i\eta}\,\mathsf{y}\otimes\mathsf{w} \tag{5.4}$$

となるので

$$\bar{\beta}\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}-\bar{\alpha}\mathsf{y}\otimes\mathsf{v}\ \rightarrow\ (\bar{\beta}\,e^{i\xi}\,\mathsf{x}-\bar{\alpha}\,e^{i\eta}\,\mathsf{y})\otimes\mathsf{w} \tag{5.5}$$

が得られよう．この結果は，$\alpha\rightarrow\bar{\beta}$ と $\beta\rightarrow-\bar{\alpha}$ と代入することによって直接，式 (5.3) からも導かれる．これはまた，8 章で議論する，量子力学における時間発展の線形性により，式 (5.4) からも導くことができるはずである．

式 (5.3) と (5.5) の左辺の二つの直交した相関状態が同じビーム w に導かれていることに注意しよう．結果としてできた状態は，もはや絡み合っていない．それらは，位置の状態 w と，$(\alpha e^{i\xi}\mathsf{x}+\beta e^{i\eta}\mathsf{y})$ あるいは $(\bar{\beta}e^{i\xi}\mathsf{x}-\bar{\alpha}e^{i\eta}\mathsf{y})$ のいずれかの楕円偏光状態との直積である．

検証装置の次の要素は，お互いに直交した楕円偏光状態を直線偏光に変換する，位相子である．円偏光という特別な場合には，この位相子は 1/4 波長板である．一般的な場合では，その効果は結晶の余分な厚さの効果と同じである．位相シフトは

$$\mathsf{x}\ \rightarrow\ \mathsf{x}\,e^{i(\theta-\xi)}\sqrt{\bar{\alpha}/\alpha} \qquad \text{および} \qquad \mathsf{y}\ \rightarrow\ \mathsf{y}\,e^{i(\theta-\eta)}\sqrt{\bar{\beta}/\beta} \tag{5.6}$$

という具合に調整されていなければならない．ここで θ は α，β，ξ と η の関数であって，いまの目的には具体的にわかっている必要はない[*3]．こうして直線偏光

$$\alpha\,e^{i\xi}\,\mathsf{x}+\beta\,e^{i\eta}\,\mathsf{y}\ \rightarrow\ e^{i\theta}\,(|\alpha|\mathsf{x}+|\beta|\mathsf{y}) \tag{5.7}$$

と

$$\bar{\beta}\,e^{i\xi}\,\mathsf{x}-\bar{\alpha}\,e^{i\eta}\,\mathsf{y}\ \rightarrow\ e^{i\theta}\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}/\alpha\beta}\,(|\beta|\mathsf{x}-|\alpha|\mathsf{y}) \tag{5.8}$$

が得られる．

演習問題 5.1　最後の 2 式をチェックし，結果としてできる直線偏光が直交していることを確かめよ．

このようにして検証の最終段階は，図 5.2 に示されるように，もう一つの方解石結晶の光学軸をこれらの二つの直線偏光を区別するのに適当な方向に向けることによって行うことができる．

光子の初期状態が残り二つの直交ベクトル $\mathsf{x}\otimes\mathsf{v}$ あるいは $\mathsf{y}\otimes\mathsf{u}$ の一つである場合についても，この検証の結果をしらべなければならない．すでに式 (5.4) で，図 5.2 の最初の結晶が x 方向に偏極した入射光子を下方へ (u から w へ)，そして y 方向に偏

[*3] 唯一の調整可能なパラメーターは位相子の光路長 (すなわち厚さ) である．式 (5.6) の余分な位相はその厚さに比例している．しかし，以下の計算に関係するのはこれらの位相の (和ではなく) 差だけであることがわかり，この差はパラメーター θ には依存しない．

極した入射光子を上方へ (v から w へ) 曲げることを見た．これは図 5.1 の対称的な結晶の効果と正反対である．したがって，

$$\mathsf{x}\otimes\mathsf{v} \;\rightarrow\; \mathsf{x}\otimes\mathsf{v}' \qquad \text{かつ} \qquad \mathsf{y}\otimes\mathsf{u} \;\rightarrow\; \mathsf{y}\otimes\mathsf{u}' \tag{5.9}$$

のように，すべての余分な位相因子をそれぞれ新しい正常光と異常光の位置を表すベクトル v′ と u′ の定義に，吸収して書くことができる．これらの光線は，図 5.2 に示されるように，w 光線の下と上に位置していて，w からのそれらの距離はもともとの u と v 光線間の距離に等しい．こうして，その固有状態の一つとして**絡み合った**状態 (5.1) をもつ完全な (最大) 検証の構築が完成する．

さらなる代数的性質

複合系は，構成要素の単なる組合せではないオブザーバブルをもつ．一般に，N 個の状態をもつ系は N^2-1 個の一次独立なオブザーバブル (と単位行列によって表される自明なオブザーバブル $\mathbb{1}$) をもつ．なぜなら N 次のエルミート行列が N^2 個の実パラメーターをもっているからである．他のどんなオブザーバブルも，それらの一次結合である．いま，もしそれぞれ M 個と N 個の状態をもつ系が，一つの複合系に結合されるなら，その複合系は MN 個の状態，それゆえに M^2N^2-1 個の非自明で一次独立なオブザーバブルをもっている．これらは，M^2+N^2-2 個しかない別々の部分系を考えたときのオブザーバブルより明らかに数が多い．したがって，複合系はその部分の合計より多くの情報に関連している．**量子相関**に存在するこの新たな情報は，**位相**に関係し，古典物理学には対応するものがない．

複合系のオブザーバブルのいくつかは通常の和であってもよい．たとえば，もし A と B がそれぞれ電子と陽子のオブザーバブルであるなら，それらの和 (古典的には $A+B$) は

$$(\mathsf{A}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathsf{B})_{m\mu,n\nu} \equiv A_{mn}\,\delta_{\mu\nu}+\delta_{mn}\,B_{\mu\nu} \tag{5.10}$$

である．この式は行列の**直積**(普通の積と混同しないように) を含んでいる．これらの直積は，$m\mu$ が一つの添字であることに注意すれば，行列代数の普通の規則に従う．たとえば，

$$(\mathsf{A}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathsf{B})\,(\mathsf{u}\otimes\mathsf{v}) = (\mathsf{Au}\otimes\mathsf{v})+(\mathsf{u}\otimes\mathsf{Bv}) \tag{5.11}$$

である．なぜなら

$$\sum_{n\nu}(A_{mn}\,\delta_{\mu\nu}+\delta_{mn}\,B_{\mu\nu})\,u_n\,v_\nu = \sum_n A_{mn}\,u_n\,v_\mu+\sum_\nu u_m\,B_{\mu\nu}\,v_\nu \tag{5.12}$$

だからである．同様にして，

$$\sum_{n\nu}(\mathsf{A}\otimes\mathsf{B})_{m\mu,n\nu}\,(\mathsf{u}\otimes\mathsf{v})_{n\nu} = [(\mathsf{Au})\otimes(\mathsf{Bv})]_{m\mu} \tag{5.13}$$

である．混乱が起こりそうにないときには，たいてい記号 $\otimes$ や $\mathbb{1}$ を省略して，$(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{uv}=(\mathsf{Au})\mathsf{v}+\mathsf{u}(\mathsf{Bv})$ などと書く．

演習問題 5.2

$$\mathsf{s}_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \mathsf{s}_y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \mathsf{s}_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を電子のオブザーバブル，同様に

$$\mathsf{S}_x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad \mathsf{S}_y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\qquad \mathsf{S}_z=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

を陽子のオブザーバブル (異なる線形空間に属することをはっきりさせるために，後者には，丸括弧ではなく，角括弧で書く) としよう．両方の粒子の結合した 4 次元空間で，15 個の行列 $\mathsf{s}_j\otimes\mathbb{1}$, $\mathbb{1}\otimes\mathsf{S}_k$ と $\mathsf{s}_j\otimes\mathsf{S}_k$ を具体的に書き下せ． ⋆

演習問題 5.3 前の演習問題で定義された s_j と S_k を用いて，

$$\mathsf{J}_x=\sqrt{3}\,\mathbb{1}\otimes\mathsf{S}_x+2\,(\mathsf{s}_x\otimes\mathsf{S}_x+\mathsf{s}_y\otimes\mathsf{S}_y)$$
$$\mathsf{J}_y=\sqrt{3}\,\mathbb{1}\otimes\mathsf{S}_y+2\,(\mathsf{s}_y\otimes\mathsf{S}_x-\mathsf{s}_x\otimes\mathsf{S}_y)$$
$$\mathsf{J}_z=\mathbb{1}\otimes\mathsf{S}_z+2\,\mathsf{s}_z\otimes\mathbb{1}$$

としよう．これらの行列の固有値はどうなるか? これらの固有値はいずれも縮退しておらず，その結果これらのオブザーバブルのどれ一つを測定しても，最大検証となることを確認せよ． **ヒント：** $\mathsf{J}_x\,\mathsf{J}_y-\mathsf{J}_y\,\mathsf{J}_x=i\mathsf{J}_z$ (およびこの循環置換) であることと，${\mathsf{J}_x}^2+{\mathsf{J}_y}^2+{\mathsf{J}_z}^2=\frac{15}{4}$ を示せ． ⋆

演習問題 5.4 演習問題 5.2 と同じ表記法で，一重項状態

$$\Psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

を考えよう．$\langle\mathsf{s}_j\rangle=\langle\mathsf{S}_k\rangle=0$，そして $\langle\mathsf{s}_j\otimes\mathsf{S}_k\rangle=-\frac{1}{4}\,\delta_{jk}$ であることを示せ．

5.2 不完全検証と部分トレース

再び "絡み合った" 純粋状態 (5.1) を考える．今度は光子がどこにあるかは問題にせず，その光子の偏極状態を測定したいとしよう．その性質は 2 次のエルミート行列 A で表される．その行列は，二つの直交した偏極状態に対応するベクトル x と y で張られる線形空間に作用する．たとえば，もし x と y が直線偏光の状態を表すなら，オブザーバブル $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ は二つの円偏光の状態に対して ±1 という値をとる．さて，光子状態の完全な記述 (外に出ていく二つの光線を識別するラベル u と v を含めて) には，上に説明されているように，4 次元ベクトル空間を必要とする．もし光子の

位置が検証されないなら，この“非検証”は形式的にはベクトル u と v によって張られる部分空間における自明なオブザーバブル $\mathbb{1}$ (単位行列) によって表すことができる．これは,「光子がビームの一方にあるか?」という質問には常に yes と答えられるからである．したがって実質的にはオブザーバブル $\mathsf{A}\otimes\mathbb{1}$ を測定していることになる．$\mathbb{1}$ は縮退した行列なので，これは最大検証でなく，4 個ではなく 2 個の異なる結果しかない．

この不完全検証に期待される A (あるいは，書きたければ，$\mathsf{A}\otimes\mathbb{1}$) の平均値は，式 (3.41) の通常の規則によって与えられる．

$$\langle \mathsf{A}\rangle = \Psi^\dagger \mathsf{A}\Psi = (\alpha\,\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}+\beta\,\mathsf{y}\otimes\mathsf{v})^\dagger\,(\mathsf{A}\otimes\mathbb{1})\,(\alpha\,\mathsf{x}\otimes\mathsf{u}+\beta\,\mathsf{y}\otimes\mathsf{v}) \tag{5.14}$$

これは

$$\langle \mathsf{A}\rangle = |\alpha|^2\,\mathsf{x}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{x} + |\beta|^2\,\mathsf{y}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{y} \tag{5.15}$$

と書き直すことができる．光子が単に状態 x にある確率 $|\alpha|^2$，状態 y にある確率 $|\beta|^2$ をもつとしても，この結果は変わらないであろう．これらの確率は測定されるオブザーバブル A の選択によらない．言い換えれば，もしその実験が多数回繰り返されるなら，すべては，光子の普通の混合状態，光子の一部は状態 x に，一部は状態 y に準備されたかのように起こる．x と y の相対的な位相は無関係である．

この結果は，状態が $(\alpha\mathsf{x}+\beta\mathsf{y})\otimes\mathsf{w}$ という**無相関**の直積である**入射**ビームに対して A (すなわち，$\mathsf{A}\otimes\mathbb{1}$) を測定すれば得られるであろう結果とは根本的に異なる．その場合には，

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{A}\rangle_{\rm in} &= (\alpha\mathsf{x}+\beta\mathsf{y})^\dagger\,\mathsf{A}\,(\alpha\mathsf{x}+\beta\mathsf{y})\\ &= |\alpha|^2\,\mathsf{x}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{x}+|\beta|^2\,\mathsf{y}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{y}+\bar{\alpha}\beta\,\mathsf{x}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{y}+\alpha\bar{\beta}\,\mathsf{y}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{x}\end{aligned} \tag{5.16}$$

となるであろう．最後の 2 項は行列 A の非対角要素を含んで，α と β の相対的位相による．その位相は式 (5.15) には現れなかった．なぜなら，式 (5.1) の絡み合った状態 Ψ において，状態 x と y はそれぞれビーム u および v に関係しており，単位行列 $\mathbb{1}$ は u と v を結ぶ非対角要素をもたないからである．

具体的に行列要素で式 (5.15) を書き直すのが便利である．

$$\langle \mathsf{A}\rangle = \sum_{mn}\left(|\alpha|^2\,x_m\,\overline{x_n}+|\beta|^2\,y_m\,\overline{y_n}\right)A_{nm} = \sum_{mn}\rho_{mn}\,A_{nm} \tag{5.17}$$

これは，ρ が

$$\rho = |\alpha|^2\,\mathsf{x}\mathsf{x}^\dagger + |\beta|^2\,\mathsf{y}\mathsf{y}^\dagger \tag{5.18}$$

で与えられるとすれば，式 (3.77) と同じ形 $\mathrm{Tr}\,(\rho\mathsf{A})$ をしている．$\mathsf{x}\mathsf{x}^\dagger$ と $\mathsf{y}\mathsf{y}^\dagger$ が，それぞれ確率 $|\alpha|^2$ ならびに $|\beta|^2$ で検出される状態 x と y への射影演算子であることに注意しよう．

無関係な自由度

式 (5.17) のかわりに式 (5.14) を使って，u と v によって張られた部分空間を具体的に考えることはもちろん可能であるが，そこでは単位行列を “測定する” ことになる．しかし，関係のない自由度を無視して直接，式 (5.17) を用いる方がずっと便利である．さらに，関係のないデータがあまりにも多いとか，あるいは得られないため，式 (5.17) を使う以外現実の選択肢がないことが多い．たとえば，白熱光源から出てくる光子は，光源の熱的運動している微視的変数のすべての相関を把握できないから，“偏極していない” といわれる．

さらにいろいろと考えると，73 ページの式 (3.77) とここでの式 (5.17) の導出の間に本質的な差はないことが納得できよう．前者では，準備手順が不完全にしか指定されない状況を考えた．それは確率過程を含んでいた．ここでは，光子が見いだされるはずのビームは検証せず，ただ光子の偏極だけを検証することによって，利用可能な情報の一部を故意に無視することを選んでいる．最終結果は類似した式によって与えられる．“無関係な” データの無視が自発的であったかどうかに結果がよるはずはないので，これは当然のことである．

一般に，複合系の密度行列を $\rho_{m\mu,n\nu}$ としよう．ここで，通常のように，ローマ文字の添字は部分系の一つに，ギリシャ文字の添字は残りの部分系に関係している．ただ $A_{mn}\delta_{\mu\nu}$ タイプのオブザーバブルだけを測定する (ローマ文字の部分系だけを観測して，ギリシャ文字の部分系を無視する) なら，式 (5.17) のように，

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \sum_{mn\mu\nu} \rho_{n\nu,m\mu}\, A_{mn}\delta_{\mu\nu} = \sum_{mn} \left(\sum_{\mu} \rho_{n\mu,m\mu} \right) A_{mn} \tag{5.19}$$

が得られる．ギリシャ文字の添字に関して部分トレースをとることによって得られる行列

$$\rho_{nm} := \sum_{\mu} \rho_{n\mu,m\mu} \tag{5.20}$$

は**縮約された密度行列**とよばれる．

演習問題 5.5　演習問題 5.2 と同じ表記法で，

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

としよう．Ψ が規格化されていることを示せ．15 個のオブザーバブル，$\mathsf{s}_j \otimes \mathbb{1}$，$\mathbb{1} \otimes \mathsf{S}_k$ および $\mathsf{s}_j \otimes \mathsf{S}_k$ の平均値を計算せよ．もし 2 個の粒子の 1 個を無視するなら，他の 1 個の粒子の縮約された密度行列はどうなるか?　　★

5.3 シュミット分解

式 (5.21) で，ベクトル Ψ は 2 項の和として書かれている．その 2 項は，$\binom{1}{1}$ と $\binom{1}{-1}$ が直交するので，直交する．他方，$\begin{bmatrix}0.3\\0.4\end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix}0.4\\0.3\end{bmatrix}$ と直交しない．いま，もし 1 対の相関のある量子系が純粋状態 Ψ にあれば，Ψ が**双直交**項の和になるように，いつでも望ましい基底を見いだせることが示される．双直交項の和の簡単な例は，式 (5.1) で見ることができる．そこでは $\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle = 0$ と $\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = 0$ が成り立っている．

双直交項の和による Ψ の表現は，Ψ のシュミット分解とよばれる．適切な基底は次のようにして構成できる．u と v を 1 番目と 2 番目の部分系に関する単位ベクトルとして，

$$M := \langle \mathsf{u} \otimes \mathsf{v},\, \Psi \rangle \tag{5.22}$$

とする．$|M|^2$ は負でなく，有界なので，何らかの u と v を選択すれば最大値となる．この選択は，位相の自由度と場合によっては存在する縮退のために一意的ではないが，この非一意性が以下に与えられる構成を妨げることはない．

$|M|^2$ を最大にするように u と v を選択しよう．u' は 1 番目の系で u と直交する任意の状態であるとしよう．ϵ は任意に小さい複素数とする．このとき

$$\|\mathsf{u} + \epsilon \mathsf{u}'\|^2 = 1 + O(\epsilon^2) \tag{5.23}$$

となり，$\mathsf{u} + \epsilon \mathsf{u}'$ は，ϵ^2 のオーダーを無視すれば，ちょうど u のように単位ベクトルである．すると，

$$\langle (\mathsf{u} + \epsilon \mathsf{u}') \otimes \mathsf{v},\, \Psi \rangle = M + \epsilon \langle \mathsf{u}' \otimes \mathsf{v},\, \Psi \rangle \tag{5.24}$$

となり，これから

$$|\langle (\mathsf{u} + \epsilon \mathsf{u}') \otimes \mathsf{v},\, \Psi \rangle|^2 = |M|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\epsilon\, \langle \mathsf{u}' \otimes \mathsf{v},\, \Psi \rangle) + O(\epsilon^2) \tag{5.25}$$

が得られる．左辺の値は， u の定義から，u の任意の変分に対して定常的である．v の位相が任意だから，式 (5.25) の右辺で次式が導かれる．

$$\langle \mathsf{u}' \otimes \mathsf{v},\, \Psi \rangle = 0, \qquad \forall\ \mathsf{u}' \in \mathcal{H}'_{\mathbf{u}} \tag{5.26}$$

ここで，$\mathcal{H}'_{\mathbf{u}}$ は u と直交する 1 番目の部分系のすべての状態の集合を表している．同様に，v' が v と直交する 2 番目の部分系状態なら，似た表記法を用いて，

$$\langle \mathsf{u} \otimes \mathsf{v}',\, \Psi \rangle = 0, \qquad \forall\ \mathsf{v}' \in \mathcal{H}'_{\mathbf{v}} \tag{5.27}$$

となる．

さてベクトル

$$\Psi' = \Psi - M\, \mathsf{u} \otimes \mathsf{v} \tag{5.28}$$

を考えよう．Ψ' が，式 (5.26) と (5.27) で Ψ が満たしたのと同じ関係式を満たすことが容易にわかる．さらに，それはまた，M の定義によって，

$$\langle \mathsf{u} \otimes \mathsf{v},\, \Psi' \rangle = 0 \tag{5.29}$$

も満足する．したがって，二つの部分系に対して選ばれた基底がその単位ベクトルの中に u と v を含むなら，これら二つの単位ベクトルに関する Ψ' のすべての成分は 0 にならなければならない．それで

$$\Psi' \in \mathcal{H}'_{\mathbf{u}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathbf{v}} \tag{5.30}$$

が導かれる．そこで，より小さい空間 $\mathcal{H}'_{\mathbf{u}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathbf{v}}$ で同じ手順を繰り返し，同様な方法で必要な回数行うと，最終的に

$$\Psi = \sum_j M_j\, \mathsf{u}_j \otimes \mathsf{v}_j \tag{5.31}$$

が得られる．ここで，単位ベクトル u_j と v_j は，それぞれ 1 番目と 2 番目の部分系に属して，

$$\langle \mathsf{u}_i\, , \mathsf{u}_j \rangle = \langle \mathsf{v}_i\, , \mathsf{v}_j \rangle = 0 \tag{5.32}$$

を満たしている．0 でない係数 M_j の数はたかだか，二つの部分系の次元数のうちの小さい方の数と等しいことに注意しよう．M_j の位相は任意である．なぜなら u_j と v_j の位相が任意だからである．さらに，もしいくつかの $|M_j|$ が等しければ，それらに対応する $(\mathsf{u}_j \otimes \mathsf{v}_j)$ は，縮退があるとき通常行われるように，それらお互いどうしの一次結合で置き換えられる．たとえば，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子対の一重項状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{8}}\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\otimes\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}-\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right\} \tag{5.33}$$

と無限通りある他の同等な双直交形式で書くことができる．

演習問題 5.6　式 (5.33) を確認し，一重項状態のさらに二つの同等な形を書き下せ．

演習問題 5.7　一重項状態 (5.33) の密度行列が

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - \sum_m \sigma_m \otimes \sigma_m\right) \tag{5.34}$$

であることを示せ．　　**ヒント**：$\mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}\otimes\mathsf{B}) \equiv (\mathrm{Tr}\,\mathsf{A})\,(\mathrm{Tr}\,\mathsf{B})$ であること，この ρ が純粋状態であること，そしてスピン一重項が $(\mathbb{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1})\,\Psi = 0$ を満たすことを示せ．

演習問題 5.8　演習問題 5.5 の Ψ のシュミット分解を見つけよ．

演習問題 5.9　シュミット分解は，一般的には 3 個以上の部分系には拡張できないことを示せ．

純粋状態 Ψ の密度行列は，シュミット基底で，

$$\rho = \Psi\Psi^\dagger = \sum_{ij} M_i\,\overline{M_j}\;\mathsf{u}_i\mathsf{u}_j^\dagger \otimes \mathsf{v}_i\mathsf{v}_j^\dagger \tag{5.35}$$

である．したがって，二つの部分系の縮約された密度行列は

$$\rho_1 = \sum_j |M_j|^2\;\mathsf{u}_j\mathsf{u}_j^\dagger \qquad \text{および} \qquad \rho_2 = \sum_j |M_j|^2\;\mathsf{v}_j\mathsf{v}_j^\dagger \tag{5.36}$$

である．これらの二つの行列は (ゼロ固有値の多重度が異なることはありえるという点を除いて) 明らかに同じ固有値をもっており，そしてそれらの固有ベクトルはシュミット分解 (5.31) で使われるもの，そのものである．この性質のおかげで，ある純粋状態が勝手な基底で与えられているとき，その純粋状態に対応するシュミット基底を決定することは簡単な問題である．

演習問題 5.10 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の中に勝手な密度行列 ρ が与えられたとき，$\mathcal{H}$ に縮約された密度行列 ρ が $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$ では**純粋状態**となるように，いつでも新たなヒルベルト空間 $\mathcal{H}'$ を導入できることを示せ．

演習問題 5.11 一重項状態 (5.33) にある 2 粒子の縮約された密度行列はどうなるか?

演習問題 5.12 それぞれ二つの状態をもつ量子系が二つ結合し，ベクトル成分 0.1, $0.3+0.4i$, $0.5i$, -0.7 で表される，相関のある状態 Ψ に準備されている．(この 4 次元ベクトルは，この章のはじめに説明したように $a\alpha$, $a\beta$, $b\alpha$, $b\beta$ とラベルされる基準系で書かれている.) Ψ のシュミット分解を見つけよ． ⋆

演習問題 5.13 それぞれ二つと三つの状態をもつ二つの量子系が結合して，ベクトル成分 0.1, $0.3+0.4i$, -0.4, 0.7, $0.3i$, 0 で表される，相関のある状態 Ψ に準備されている．(前の演習問題と同じように，このベクトルは $a\alpha$, $\cdots$, $b\gamma$ とラベルされる基準系で書かれている.) Ψ のシュミット分解を見つけよ． ⋆⋆

$\Psi = \sum A_{\mu\nu}\,\mathsf{x}_\nu \otimes \mathsf{y}_\mu$ を，任意の基底 x_ν および y_μ からシュミット基底に変換するもう一つの方法は，ユニタリー変換によってエルミート行列 $A^\dagger A$ と $AA^\dagger$ を対角化することである．すなわち，$UA^\dagger AU^\dagger = D'$ ならびに $VAA^\dagger V^\dagger = D''$．このとき，$VAU^\dagger D' = D''VAU^\dagger$ が得られ，その結果 $VAU^\dagger$ も “対角的” である．つまり，$\sum V_{i\mu}\,A_{\mu\nu}\,\overline{U_{j\nu}} = \delta_{ij}\,\alpha_j$ である．$\mathsf{u}_j = \sum U_{j\nu}\,\mathsf{x}_\nu$ と $\mathsf{v}_j = \sum \overline{V_{j\mu}}\,\mathsf{y}_\mu$ とおけば，$\Psi = \sum \alpha_j\,\mathsf{u}_j \otimes \mathsf{v}_j$ が導かれる．

5.4 区別できない粒子

量子系は，同じ性質をもつ物理的に**区別できない**部分系をいくつか含むことがある．量子系にどんな検証を行っても，これらすべての部分系は同じように扱われ，計算す

るために同じ性質の部分系に与えるラベルを置換しても検証には無関係である．たとえば，原子の電子に勝手に $1, 2, \cdots$（あるいはジョン，ピーターなど）のラベルを付けられるが，その原子のいかなる観測可能な性質も，これらのラベルを単に交換するだけで影響されることはない．同じことが原子核内の陽子，そして別に中性子にも当てはまる[*4]．

簡単な例としてヘリウム原子を考えよう．2 個の電子間の距離 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ は，原理的に観測可能である．しかし，“最初の” 電子の位置 $\mathbf{r}_1$ は物理的に無意味な概念である．これは，たとえヘリウム原子が部分的にイオン化されて，その 1 個の電子が遠くに取り去られたとしても，当てはまる．核に最も近い電子について，あるいは最も遠くの電子についての質問をすることは意味が**ある**が，1 あるいは 2 というラベルの付けられた電子について質問をすることは意味がない．

量子検証の実現性には，**基本的制限**がある．戯れに個別の電子にのみ感ずる “個人的” 検証を考案するというアイデアを考えてもよい（このような検証に対応するベクトル基底を書き下すことは，実に容易である）が，この空想は実験室で実現できない．**必ずしもすべての純粋状態が実現可能なわけではない**（純粋状態が最大検証という手段によって定義されたことを思い起こそう．30 ページの仮定 A を参照）という結論を出さざるをえなくなる．次に，区別できない部分系をいくつか含む量子系の実現可能な状態の特徴をしらべてみる．

ボソンとフェルミオン

はじめに，2 個の同種粒子だけが関係する簡単な場合を考えよう．それらの一つが単独で存在するとき，その直交状態の完全系を u_m と表そう．もう一つの粒子の**同じ**状態を v_m とよぼう．そのとき，もしこれらの 2 個の粒子が本当に区別できないなら，それらからつくられる対の状態のいくつかは実現できない．たとえば，状態 $\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n$ ($m \neq n$ に対して) は，状態 $\mathsf{v}_m \otimes \mathsf{u}_n$ と**異なっている**ので，2 個の粒子のラベルをただ付け替えるだけでは得られない．（これらの 2 個の状態は実際には直交している．）他方，区別不能によって禁止されない状態は

$$\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_m \qquad \text{および} \qquad (\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n + \mathsf{u}_n \otimes \mathsf{v}_m)/\sqrt{2} \qquad (m \neq n) \tag{5.37}$$

と

$$(\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n - \mathsf{u}_n \otimes \mathsf{v}_m)/\sqrt{2} \qquad (m \neq n) \tag{5.38}$$

である．タイプ (5.37) のベクトルは，粒子のラベルの付け替えに対して明らかに不変である．タイプ (5.38) のベクトルは付け替えに対して符号を変えるだけで，したがって依然として**同じ**物理的状態を表している．

[*4] この問題は古典の物理学では起こらない．なぜなら古典的対象物はいくらでも属性を割り当てることができるるので，常に識別可能であるからである．

ここで，しかしながら，重ね合せの原理 G (49 ページ参照) と矛盾してしまう．なぜなら式 (5.37) と (5.38) の次のような一次結合

$$\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n = \tfrac{1}{2}\left[(\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n + \mathsf{u}_n \otimes \mathsf{v}_m) + (\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n - \mathsf{u}_n \otimes \mathsf{v}_m)\right] \tag{5.39}$$

は，いま見たように，非物理的である．線形性を回復する唯一の方法は，与えられた任意の粒子のタイプに対して，粒子対に許される状態ベクトルが式 (5.38) のように常に対称的であるか，あるいは式 (5.39) のように常に反対称的であると要求することである．常に対称状態ベクトルをもつ粒子は**ボソン**とよばれる．常に反対称状態ベクトルをもつ粒子は**フェルミオン**とよばれる．ここで見たように，たとえ，たった 2 個だけの粒子が関係していて，本物の統計物理学の領域から遠く離れているとしても，習慣的にこれらの粒子はボース–アインシュタインあるいはフェルミ–ディラック**統計**に従うといわれる．

相対論的局所量子場の理論の基礎仮定から，ボソンは整数スピンを，フェルミオンは半整数スピンをもっていることが示せる．その詳細な証明とこの定理の基礎となっている仮定は本書の範疇を越えている．

「ただ 1 個のフェルミオンが一つの量子状態を占有することができる」と慣習的にいうが，この文章は正確ではない．式 (5.38) のようなベクトルにおいて，**両方**の粒子はその二つの状態の**どちらか一つ**に存在する．これは，実際それらが区別不能であることの当然の帰結である．しかしながら，フェルミオンとボソンは状態を占有する仕方が異なっており，その違いは実験的に見られる．2 個の同種粒子を含むオブザーバブル A の平均値は

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{A}\rangle &= \tfrac{1}{2}\left\langle (\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n \pm \mathsf{u}_n \otimes \mathsf{v}_m),\ \mathsf{A}\,(\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n \pm \mathsf{u}_n \otimes \mathsf{v}_m)\right\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\left(A_{mn,mn} + A_{nm,nm} \pm A_{mn,nm} \pm A_{nm,mn}\right)\end{aligned} \tag{5.40}$$

であり，いろいろな行列要素は

$$A_{mn,rs} := \langle \mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n\,,\ \mathsf{A}\,\mathsf{u}_r \otimes \mathsf{v}_s\rangle \tag{5.41}$$

と定義されている．それらの粒子が区別できないので，オブザーバブル A は粒子ラベルのどんな置換に対しても無関係でなければならない．それゆえに，(5.41) の値は，それぞれ "1 番目" と "2 番目" を示すのに使うラベル u と v の交換の下で不変である．ゆえに，

$$A_{mn,rs} = A_{nm,sr} \tag{5.42}$$

で，式 (5.40) は

$$\langle \mathsf{A}\rangle = A_{mn,mn} \pm A_{mn,nm} \tag{5.43}$$

となる．オブザーバブルの平均値における符号 ± は，ボソンとフェルミオンを区別している．

演習問題 5.14　2 個の相互作用していない同種粒子が 1 次元の 2 次ポテンシャル $V = \frac{1}{2}kx^2$ の下から数えて最も低い二つのエネルギー準位を占めている．これらの粒子がボソンであるとき，またフェルミオンであるとき，x_1x_2 の平均値を求めよ．区別可能な粒子に対して結果はどうなるか？　⋆

同じく，もし 3 個の区別できないボソンあるいはフェルミオンがあれば，三つの直交状態に関するベクトルは，ディラックの表記法 $|mns\rangle := \mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_n \otimes \mathsf{w}_s$ (Ψ の対称的構造をはっきりさせるもう一つの表記法は，${}_m\overset{n}{\triangle}_s$ であろう) を用いて，

$$\Psi = [(|mns\rangle + |nsm\rangle + |smn\rangle) \pm (|nms\rangle + |snm\rangle + |msn\rangle)]/\sqrt{6} \tag{5.44}$$

である．式 (5.42) のように，オブザーバブル A の行列要素はそれらを組み合わせた添字の内部置換の下で不変である．

$$A_{mns,xyz} = A_{nsm,yzx} = A_{nms,yxz} = \cdots \tag{5.45}$$

したがって，A の平均値は，式 (5.43) のように，

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{A} \rangle = (&A_{mns,mns} + A_{mns,nsm} + A_{mns,smn}) \\ &\pm \ (A_{mns,nms} + A_{mns,snm} + A_{mns,msn})\end{aligned} \tag{5.46}$$

で与えられる．

演習問題 5.15　3 個の相互作用していない同種粒子が 1 次元の 2 次ポテンシャル $V = \frac{1}{2}kx^2$ の下から数えて最も低い三つのエネルギー準位を占めている．これらの粒子がボソンであるときと，フェルミオンであるときの $(x_1 + x_2 + x_3)^2$ の平均値を求めよ．区別可能な粒子に対して結果はどうなるか？　⋆

クラスター分割性

式 (5.37) と (5.38) からただちに出てくる帰結は，同種の 2 粒子は，たとえお互いに独立に遠く離れた異なる実験室で準備させても，常に絡み合っているということである．ここで，この絡み合いは心配する必要がないことを納得しておかなければならない．つまり，私たちの実験室にある原子に対するどんな量子予言も宇宙の遠いところに同種原子が存在するからという理由だけで影響を受けることはない．

この主張を証明するために，まず "遠隔であること" を定義しなければならない．現実には，あまりにも遠くにあるから，実行しないとする実験がある．たとえば，もし 1 メートルを超えない装置で行うことができる量子検証だけを考えるなら，1 メートル以上離れて局所的に存在する状態 w は "遠隔" である．一般に，近くの量子検証に対応するどんな演算子 A に対しても $\|\mathsf{Aw}\|$ が限りなく小さければ，状態 w は遠隔であるとよばれる．そのときシュワルツの不等式 (3.18) から，$\langle \mathsf{u}, \mathsf{Aw} \rangle = \langle \mathsf{Au}, \mathsf{w} \rangle$ のような

w に関係するどの行列要素も限りなく小さいことが証明される．($\langle \mathsf{w}, \mathbb{1}\mathsf{w}\rangle \equiv 1$ に関して矛盾はない．なぜなら単位演算子 $\mathbb{1}$ は近くの位置に限られていないからである.)

ところで，局所量子系が (上で定義されるような) 遠隔状態にあるもう一つの系と絡み合っても，観測可能な効果はないことが示せる．もし，ある量子系が状態 u に準備され，その系のオブザーバブル A を測定するなら，量子論によって予言される結果の平均値は $\langle \mathsf{A}\rangle = \langle \mathsf{u}, \mathsf{Au}\rangle$ であることを思い起こそう．ここでもう一つのまったく同種量子系が，遠隔状態 w にあるとしよう．これらの対の状態は絡み合っている．

$$\Psi = (\mathsf{u} \otimes \mathsf{w} \pm \mathsf{w} \otimes \mathsf{u})/\sqrt{2} \tag{5.47}$$

± の符号はそれぞれボソンとフェルミオンに対応している．“1 番目” の系に関連して使われた演算子 A はここでは新しい演算子，$\mathsf{A} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathsf{A}$ に置き換えなければならない．これは二つの系を (それらが区別できないので) まったく区別しない．それでも，前と同じように，

$$\langle \Psi, (\mathsf{A} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathsf{A})\, \Psi\rangle = \langle \mathsf{u}, \mathsf{Au}\rangle \tag{5.48}$$

という結果が得られる．なぜなら A と遠隔状態 w に関連する行列要素はどれもゼロでなければならないからである．近くの量子検証に対する予言は，遠く離れている 2 番目の粒子の存在にすべて無関係であるという結論が出てくる．

こうした考察は，さらに粒子を追加した場合にも拡張できる．2 個の粒子が近くにあり，そして遠く離れて 3 番目の粒子が存在するとしよう．これはボソンでもフェルミオンでも，次の演習問題で見られるように，何ら不都合はない．

演習問題 5.16 もし式 (5.46) の状態 $|s\rangle$ が状態 $|m\rangle$ と $|n\rangle$ から遠く離れて局所的に存在するなら，$\langle \mathsf{A}\rangle$ の値は，式 (5.43) によって与えられる結果と一致することを示せ．

しかしながら，3 個以上の同種粒子があるとき，新しい可能性が開かれ，ボソンあるいはフェルミオンの対称性よりいっそう複雑な対称性が区別不能性原理と両立できるようになる．これらの対称性は 5.5 節で論じよう．そこでは，それらの新しい対称性がクラスター分割性と両立できないことが示される．こうして，唯一の合理的な選択肢として，ボース–アインシュタインとフェルミ–ディラック統計が残されるのである．

複合ボソンと複合フェルミオン

液体ヘリウムは注目すべき性質をもつ．それは，He^4 原子が偶数個のフェルミオン (2 個の電子，2 個の陽子，そして 2 個の中性子) を含んでいて，それゆえに，内部の構造が探られない限り，ボソン素粒子のようにふるまうことである．同じく超伝導は，クーパー対としてゆるく束縛された 2 個の電子が，ある局面ではボソンとしてふるまって起こるのである．もっと深い微視的レベルにおいては，3 個のクォークからつくら

れている陽子が，その内部の構造を探らない限り，素粒子フェルミオンとしてふるまう．これ以上他にも似た例はすぐに思い浮かぶであろう．

なぜこれらの複合粒子が，近似的に，構造のないボソンあるいはフェルミオンのようにふるまうのか見てみよう．簡単な例として，点状の陽子 (質量 M，位置 $\mathbf{R}$) と点状の電子 (質量 m，位置 $\mathbf{r}$) から成り立っているという水素原子の粗い模型を考えよう．全体の波動関数は次のような積と仮定する．

$$\psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = u(M\mathbf{R} + m\mathbf{r})\, v(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \tag{5.49}$$

ここで u はただ原子の重心のみに関係し，v がその内部の構造を記述している．すべての波動関数がこの形をもっているわけではないが，これは，基底状態，あるいははっきり決められる励起状態の原子を選ぶよう適切に準備された場合である．

そこでもし，このような原子が 2 個あって，勝手に 1 と 2 というラベルを付けるなら，それらの全体の波動関数は，電子のあるいは陽子のラベルを交換するときはいつでも，符号を変える．したがって，もし原子全体を交換するなら，不変のままである．これから次のようなパズルが導かれる．もし原子が構造のないボソンであるとしたら，両方とも同じ状態にいることができよう．これらのボソンが同じ状態にいることができないフェルミオンからつくられているとき，何が起きるか? この問題点を明確にするために，全体の波動関数を (規格化因子を別として) 次のように書き直そう．

$$\Psi = \psi_{11}\,\psi_{22} - \psi_{12}\,\psi_{21} \tag{5.50}$$

ここで

$$\psi_{jk} := u(M\mathbf{R}_j + m\mathbf{r}_k)\, v(\mathbf{R}_j - \mathbf{r}_k) \tag{5.51}$$

である．波動関数 (5.50) は，フェルミオンの陽子と電子という属性から要求されるすべての対称性をもっている．特に，$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ あるいは $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ のとき，$\Psi = 0$ である．しかしながら，Ψ は明らかに一般的には 0 ではない！

さらにこの波動関数を見ていくと，もし内部状態 $v(\mathbf{R}-\mathbf{r})$ がきわめて局所的であれば，右辺の最初の項が，$\mathbf{R}_1 \simeq \mathbf{r}_1$，そして $\mathbf{R}_2 \simeq \mathbf{r}_2$ のとき大きくなり，一方，第 2 項が，$\mathbf{R}_1 \simeq \mathbf{r}_2$，そして $\mathbf{R}_2 \simeq \mathbf{r}_1$ のとき大きくなることがわかる．これら 2 項は，2 原子が重なり合わなければ，すなわち $\mathbf{R}_1 \simeq \mathbf{R}_2 \simeq \mathbf{r}_1 \simeq \mathbf{r}_2$ でないなら，干渉しない．2 原子のそうした重なり合いは，もし v が局所的であって，u が広がった波動関数なら，それらの配位空間 (配置空間) の非常に小さい領域 で起こる．(v と u が実際にこうした性質をもっている場合のみ，この 4 粒子を “2 原子” とよぶことができる.)

式 (5.50) から，オブザーバブルの平均値は

$$\langle \mathsf{A} \rangle = 2\int (\overline{\psi_{11}\,\psi_{22}}\ \mathsf{A}\ \psi_{11}\,\psi_{22} - \overline{\psi_{11}\,\psi_{22}}\ \mathsf{A}\ \psi_{12}\,\psi_{21})\, d\mathbf{R}_1\, d\mathbf{R}_2\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 \tag{5.52}$$

である．被積分関数の初項は，ちょうどともに同じ状態 ψ にある 1 対の構造のないボソンに対して予想するところのものである．第 2 項は，もし u の広がり (重心の位置

での "不確定さ") が v の広がり (各粒子の "大きさ") よりずっと大きいなら，限りなく小さい．このことは，2 個の水素原子は，それらが顕著に重なり合わない限り，だいたい構造のないボソンとしてふるまうことを意味する．

演習問題 5.17 2 個の相互作用をしていない同種粒子が，区間 $0 \leq x \leq 1$ に閉じ込められている．両方とも同じ状態 $\psi = e^{ikx}$ にある．$(x_1 - x_2)^2$ の平均値はいくらか?

解答：1/6.

この演習問題で，**同じ**状態にある 2 粒子は平均的にみてお互いに遠く離れていられることがわかる．

2 個の同種粒子の架空の**ラベル**を交換することは，実際にそれらの位置や他の物理的性質を交換することと同じではないことに注意しよう．前者は，**受動的**変換，つまり同じ物理的な事態を記述するのに異なった座標系を使うような，言語の単なる変更である．後者は，対象が実際に動かされる**能動的**変換である．たとえ最終状態が最初の状態と同じように見えるとしても，交換過程は**位相のずれ**(ベリー位相とよばれる[*5])を引き起こしうる．そしてそれは実験的に観測可能である．粒子対の位置が交換されるとき，その波動関数に自明でない位相が掛けられるような場合，その粒子対は**エニオン**(anyon) とよばれている[*6].

5.5 パ ラ 統 計

式 (5.44) の右辺の対称化された表式は，区別できない 3 個の粒子が三つの直交した 1 粒子状態 $|m\rangle$，$|n\rangle$，$|s\rangle$ を占めるさいに可能な二つの配位を表している．しかしながら，これらの二つの配位がこの三つの状態の組を使って可能な配位のすべてを尽くしているわけではない．はじめに直交した六つの 3 粒子状態があるので，他の 4 通りの直交した組合せがあるはずである．その四つも，計算を行うために勝手に付けた架空のラベルの置換の下で単純な性質をもつように選ぶことができる．これから，これらの別の可能性は，数学的には明確だが，自然界では実現されないことが示されよう．ボソンとフェルミオンのみが受容できるタイプの粒子であるということである．他のタイプの粒子の性質についての思索に興味ない読者はこの節の残りを読み飛ばしても構わない．

すべての可能な対称化された状態を完全に分類するのは群論の仕事である．これは区別できない対象の置換をしらべるのに適した数学的手段である．n 個の対象に関する置換の群は**対称群**とよばれ，S_n と表される．以下では，読者が群の表現論に精通していないとして，すべての必要な概念と技術は必要に応じて説明しよう．群論の教科書を参考文献にいくつかあげておいた．

[*5] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. A* 392 (1984) 45.
[*6] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 957.

隠れた量子数

はじめは，ボソンとフェルミオンの対称化規則を破るような自明な方法は考えないことにしよう．もしいくつかの物理的性質が量子検証では識別できないという理由で無視されるなら，これらの不完全な検証の結果として生ずる状態は純粋ではない．こうした状態は1より大きい位数の密度行列によって表され，式 (5.44) で使われた初等的対称化法は適用可能ではない．しかしながらこの場合，たとえ (たぶん一時的であろうが) 実験で達成できなくとも，新しい量子数を導入することによって通常の対称化規則を復活させることは常に可能である．

たとえば，クォーク模型が素粒子物理学で最初に導入されたとき，それは3個のスピン $\frac{1}{2}$ をもつ同種の u クォークが，スピン $\frac{3}{2}$ をもつ1個の Δ^{++} 粒子をつくるのに使われるという好ましくない特徴をもっていた．これはスピン $\frac{1}{2}$ 粒子は**フェルミオン**としたいとするスピン–統計定理に反して，3個の u クォークが**同じ**スピン状態をもっていることを意味した．同じく，3個の d クォークが1個の Δ^- を，3個の s クォークが1個の Ω^- をつくったが，いずれもスピン $\frac{3}{2}$ をもつ．この難問は，“カラー” とよばれる新しい性質をクォークに付与することによって解決された．カラーは3個の可能な値をとり，バリオンをつくっている3個のクォークが常に完全反対称なカラー状態にあると仮定する．(そして，それゆえにそれらのスピン状態は対称でなければならなくなる.) しかしながら，カラーをもつクォークという概念が一般的に受け入れられるまでは，ボソンやフェルミオンと異なる置換規則である**パラ統計**にクォークが従うという可能性が真剣に考察された．3個の区別できない粒子の場合，このような規則の最も簡単な例が，以下で論じられる．

3個の区別できない粒子

式 (5.44) のボソン状態は粒子のラベルを任意に交換しても不変である．フェルミオン状態はラベルの巡回置換の下で不変であり，もし2個のラベルが交換されとき，符号を変える．これらの種々の置換は架空のラベルを正三角形の頂点に置くことで視覚化ができる．巡回置換はその中心のまわりの角 $\pm 2\pi/3$ の**回転**になり，ラベルの付け替えはその3本の中線の1本に関する**鏡映**である．次に，式 (5.44) のほかに，これらの回転と鏡映の下で単純な変換性をもつ量子状態を見いだそう．次の表記法を導入する．

$$\begin{aligned}\omega &= e^{2\pi i/3} = (-1+i\sqrt{3})/2 \\ \bar{\omega} &= \omega^2 = \omega^{-1} = (-1-i\sqrt{3})/2\end{aligned} \tag{5.53}$$

$1+\omega+\bar{\omega} \equiv 0$ であることに注意しよう．

単純な変換性をもつ便利な状態の対は，

$$\begin{aligned}\Psi_+ &= (|mns\rangle + \omega\,|nsm\rangle + \bar{\omega}\,|smn\rangle)/\sqrt{3} \\ \Psi_- &= (|nms\rangle + \omega\,|snm\rangle + \bar{\omega}\,|msn\rangle)/\sqrt{3}\end{aligned} \tag{5.54}$$

である.

演習問題 5.18　Ψ_+ と Ψ_- がお互いに直交すること，式 (5.44) のボソンとフェルミオン状態に直交すること，そして規格化されていることを示せ.

巡回置換 $|abc\rangle \to |cab\rangle$ の下で，$\Psi_+ \to \Psi'_+ = \omega\Psi_+$ および $\Psi_- \to \Psi'_- = \bar{\omega}\Psi_-$ が得られる．これらの変換は，Ψ_+ と Ψ_- を成分にもつ行ベクトル Ψ を用いて，

$$\Psi \to \Psi' = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix} \Psi \tag{5.55}$$

と書くことができる．他方，最初の二つのラベルの交換 $|abc\rangle \to |bac\rangle$ は $\Psi_+ \leftrightarrow \Psi_-$，すなわち

$$\Psi \to \Psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi \tag{5.56}$$

を与える．他のすべての粒子ラベルの置換はこれら二つの操作を組み合わせて得られ，したがってこれらの二つの行列の積によって表される.

これらすべての置換 (恒等変換に対する単位行列を含めて) に対応する**行列の組**は，対称群の**表現**とよばれる．これらの行列が**ユニタリー**で，それらのすべてと交換する唯一の行列は単位行列 (あるいはそれのスカラー倍) であることに注意しよう．最後の性質は，群の**既約**表現であることを特徴づける．(反対に，**可約**表現はブロック対角行列から成り立っていて，各ブロックは同じ大きさの部分行列で構成されており，結果としてそれぞれの部分行列の集合それ自身が群の表現であるようなものである.)

ボソンは対称群の自明表現に対応する．変換行列は 1 次元であり，それらのすべてが 1 と等しい．この表現は $\mathbf{D}^{(0)}$ とよばれる．(ここで使われた表記法は，章末の参考文献にあげたウィグナーの本によるものである.) フェルミオンも同じく，$\overline{\mathbf{D}}^{(0)}$ とよばれる 1 次元表現に対応する．偶置換に対応している行列は 1 と等しく，奇置換に対応している行列は -1 である．対称群に他の 1 次元表現は存在しない．その他のすべての表現は多次元であることが示せる．さらに，すべての有限群に対して，すべての非同値既約表現の次元の 2 乗の和は群の元の数と等しい (対称群 S_n に対して，それは $n!$ である) ことが示せる.

ここでしらべている S_3 という特別な場合には，まさに式 (5.55) と (5.56) の行列とこれらの行列のすべての積から成り立つ 2 次元表現を見いだしたことになる．この既約表現は $\mathbf{D}^{(1)}$ とよばれる．その他の (非同値) 表現はありえない，なぜなら $1+1+2^2 = 3!$ で，これは群の元の数である．他方，これまでのところただ四つの正規直交状態だけを使った．すなわち式 (5.44) によって与えられるボソンとフェルミオン，そしてすべての置換の下で閉じた組をなす Ψ_+ と Ψ_- 状態である．それゆえに，もう 1 対の正規直交状態がなければならないが，それは置換の下で $\mathbf{D}^{(1)}$ 表現の行列によって変換をする．(しかし $\Psi_\pm$ とは混ざり合わない.)

二つの見つかっていない状態を見いだすことは難しくない．それらを

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= (|nms\rangle + \bar{\omega}\,|snm\rangle + \omega\,|msn\rangle)/\sqrt{3}\\ \Phi_- &= (|mns\rangle + \bar{\omega}\,|nsm\rangle + \omega\,|smn\rangle)/\sqrt{3}\end{aligned} \tag{5.57}$$

ととることができる．

演習問題 5.19　Φ_+ と Φ_- がボソン，フェルミオンそして $\Psi_\pm$ 状態と直交していること，そしてそれらが粒子ラベルの置換の下で Ψ_+，Ψ_- と正確に同じようにふるまうことを確認せよ．

演習問題 5.20　任意の実数 α と β に対して，四つの状態

$$\Xi_\pm = \cos\alpha\,\Psi_\pm - e^{i\beta}\sin\alpha\,\Phi_\pm \tag{5.58}$$

と

$$\Upsilon_\pm = e^{i\beta}\sin\alpha\,\Phi_\pm + \cos\alpha\,\Psi_\pm \tag{5.59}$$

が相互に直交して，各対 $\Xi_\pm$ と $\Upsilon_\pm$ は，粒子ラベルの置換の下で $\Psi_\pm$ や $\Phi_\pm$ と同じ変換性をもつことを示せ．

演習問題 5.21　正規直交状態の対

$$\Lambda_+ = (\Psi_+ + \Psi_-)/\sqrt{2} \qquad \text{および} \qquad \Lambda_- = i\,(\Psi_+ - \Psi_-)/\sqrt{2} \tag{5.60}$$

が

$$\Lambda \to \Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda \qquad (|abc\rangle \to |bac\rangle \text{ のとき}) \tag{5.61}$$

そして

$$\Lambda \to \Lambda' = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Lambda \qquad (|abc\rangle \to |cab\rangle \text{ のとき}) \tag{5.62}$$

に従って変換することを示せ．　　⋆

最後の演習問題は，$\mathbf{D}^{(1)}$ 表現の六つの行列すべてを基準系の**ユニタリー**変換によって実現できることを示している．(基準系をユニタリー変換することによって関係づけられる同じ群の異なった表現は，同値といわれる.) 新しい $\mathbf{D}^{(1)}$ 行列はもはや虚数 i を含まないので，ベクトル $\Lambda_\pm$ の i と $-i$ の前の係数はこれらの行列によって混ざり合うことはない．それゆえにそれらは独立に変換する．その 2 対のベクトル

$$\left\{\begin{aligned}&(2\,|mns\rangle - |nsm\rangle - |smn\rangle + 2\,|nms\rangle - |snm\rangle - |msn\rangle)/\sqrt{12}\\ &(\qquad - |nsm\rangle + |smn\rangle \qquad + |snm\rangle - |msn\rangle)/2\end{aligned}\right. \tag{5.63}$$

と

$$\begin{cases} (\qquad\qquad |nsm\rangle - |smn\rangle \qquad\qquad + |snm\rangle - |msn\rangle)/2 \\ (2\,|mns\rangle - |nsm\rangle - |smn\rangle - 2\,|nms\rangle + |snm\rangle + |msn\rangle)/\sqrt{12} \end{cases} \tag{5.64}$$

がお互い直交し，各対が式 (5.61) と (5.62) のように，お互いに混ざり合うことなく変換することを確かめるとよい．

非同値基底は実験的に区別できる

同値な $\mathbf{D}^{(1)}$ 表現がこのように豊富なことからは，基本的な疑問が生じる．粒子を個々に識別できないとすれば，種々の状態 $\Psi_\pm$，$\Phi_\pm$，$\Xi_\pm$ などをお互いに区別できる量子検証はあるのか? Ψ_+ と Ψ_-，およびそれらの任意の一次結合 (たとえば $\Lambda_\pm$) のように，粒子ラベルを付け替えることによってお互いどうし変換できる状態はどんな検証によっても区別できないことは明白である．実際，任意のオブザーバブル A の平均値は同じである．

$$\langle \Psi_- \,, \mathsf{A}\,\Psi_- \rangle = \langle \Psi_+ \,, \mathsf{A}\,\Psi_+ \rangle \tag{5.65}$$

なぜなら粒子ラベルの付け替えはユニタリー変換，$\Psi_\pm \to \mathsf{U}\,\Psi_\pm$ によって表され，その変換の下で A は不変，つまり $\mathsf{A} = \mathsf{UAU}^\dagger$ である．

他方，$\Psi_\pm$ や $\Phi_\pm$ のように，粒子ラベルの付け替えによっては移れない基底は，実験的に区別可能である．たとえば，演算子

$$\mathsf{P}_\Psi - \mathsf{P}_\Phi = \Psi_+\,\Psi_+^\dagger + \Psi_-\,\Psi_-^\dagger - \Phi_+\,\Phi_+^\dagger - \Phi_-\,\Phi_-^\dagger \tag{5.66}$$

はラベルの付け替えの下で不変である．$\Psi_\pm$ 状態のすべての一次結合はこの演算子の固有ベクトルである (固有値 $+1$) であり，$\Phi_\pm$ 状態のすべての一次結合も固有ベクトルである (固有値 -1)．そして式 (5.44) のボソンとフェルミオン状態も固有ベクトルである (固有値 0)．したがって式 (5.66) の演算子を物理的に実現すれば，同種粒子三つ組がタイプ Ψ，あるいは Φ であるのか，あるいはこれらのいずれでもないかどうか確かめることができるであろう．

具体例として，対称的な表式を考えよう．

$$\mathsf{A} = x\,y\,(z\,p_z + p_z\,z) + z\,x\,(y\,p_y + p_y\,y) + y\,z\,(x\,p_x + p_x\,x) \tag{5.67}$$

ここで x，y，z は 3 個の同種粒子の座標で，p_x，p_y，p_z はその共役運動量である．三つの状態 $|m\rangle$，$|n\rangle$，$|s\rangle$ を調和振動子の基底状態とし，その基底状態には添字 0 (1 ではなく) を付けよう．このとき，($\hbar = 1$ を含む自然単位系で)

$$\begin{aligned} x_{mn} &= (\sqrt{m}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{n,m+1})/\sqrt{2} \\ p_{mn} &= (\sqrt{m}\,\delta_{m,n+1} - \sqrt{n}\,\delta_{n,m+1})\,i/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{5.68}$$

となる．これから良く知られた $(x\,p-p\,x)_{mn}=i\,\delta_{mn}$ と

$$(x\,p+p\,x)_{mn}=i\,(\sqrt{m(n+1)}\,\delta_{m,n+2}-\sqrt{n(m+1)}\,\delta_{n,m+2}) \tag{5.69}$$

が導かれる．それゆえ，式 (5.67) で与えられた演算子 A は，もし状態 $|m\rangle$，$|n\rangle$，$|s\rangle$ が (どんな順序ででも) 三つの**連続した**レベルに対応するなら，0 でない平均値をもつ．たとえば，$|0\rangle$，$|1\rangle$，$|2\rangle$ をとろう．すると

$$x_{01}=1/\sqrt{2}, \qquad x_{12}=1, \qquad (x\,p_x+p_x\,x)_{02}=-i\,\sqrt{2} \tag{5.70}$$

となる．ボソンやフェルミオン状態の場合には $\langle \mathsf{A}\rangle=0$ である一方で，

$$\langle\Psi_\pm\,,\mathsf{A}\Psi_\pm\rangle=-3\sqrt{3}, \qquad \langle\Phi_\pm\,,\mathsf{A}\Phi_\pm\rangle=+3\sqrt{3} \tag{5.71}$$

となることを確かめるとよい．

演習問題 5.22　前の演習問題で定義されている状態 $\Xi_\pm$，$\Upsilon_\pm$ および $\Lambda_\pm$ の場合，式 (5.67) で与えられた演算子 A の期待値を求めよ．　★

これらの結果によって確実に明らかになるのは，パラ統計則に従う粒子ならば，その性質は観測可能な結果をもたらすということである．

いま $\Psi_\pm$ タイプの 3 個の粒子があると考えよう．すなわち，それらが，$\Phi_\pm$，$\Upsilon_\pm$ などのいずれでもないと実験的に決定されているとする．他方，粒子は区別できないから，Ψ_- から (あるいは $\Lambda_\pm$ のようなそれらの一次結合から) Ψ_+ を区別する実験的な方法はまったくない．これらの状態は粒子ラベルを付け替えることによってお互いに変換されるし，また $\langle\mathsf{A}\rangle$ のような平均値はすべて同じである．3 粒子系の物理的状態は，$\Psi_+\Psi_+^\dagger$ と $\Psi_-\Psi_-^\dagger$ の**等しい重みの混合状態**であるという結論が出てくる．この混合状態は (Ψ_+ と Ψ_- で張られる部分空間で) 単位行列に比例している密度行列によって表され，それゆえ，粒子の置換に対応しているユニタリー変換の下で不変である．いくつかのデータ (区別できない粒子に付けられた概念上のラベル) を手に入れられないために，純粋状態ではなく混合状態となっている．

クラスター分割不可能性

上記の考察は $n>3$ の S_n の多次元既約表現に一般化できる．その多次元既約表現は，S_n から部分群 S_{n-1} に下げる[*7]とき (たとえば，もし粒子の 1 個がとても遠くにあって，それを無視して，残りの $n-1$ 個の粒子のラベルだけを考えるとき)，S_n のすべての既約表現は S_{n-1} の**可約**表現になるという性質をもっている．これも観測可能な帰結をもたらすが，それをいまから論じよう．

3 個の粒子の場合に戻って，$|m\rangle$ と $|n\rangle$ 状態が実験室に局所化されて存在し，一方 $|s\rangle$ 状態は遠く離れた，たとえば月に局所化されて存在しているとしよう．ここで次の

[*7] H. Weyl, *Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Methuen, London (1931) [Dover よりリプリント版が刊行] p. 390.

疑問が提起されよう．もし 3 個の粒子が $\mathbf{D}^{(1)}$ 対称性に従うなら，2 個だけの同種粒子のラベルを交換するとき，何が起きるか? (より一般的には，もし n 個の粒子が S_n の特定の既約表現に属するなら，$n-1$ 個の粒子の部分集合の表現は何であるか?) 3 個の**ボソンあるいはフェルミオン**の場合にはすでに似たような疑問をしらべた (演習問題 5.16 を参照)．そこでは，もし 3 個の粒子の一つが遠く離れて存在するなら，他の 2 個の粒子は依然としてそれぞれボソンあるいはフェルミオンとしてふるまうという直観的に明白な結果を得た．

しかしながら，$\mathbf{D}^{(1)}$ 対称性に従う 3 個の粒子では，事態はずっと複雑である．たとえば，もしそれらが $\Psi_\pm$ タイプなら，式 (5.46) のかわりに，

$$\langle \mathsf{A} \rangle = A_{mns,mns} + \omega\, A_{mns,nsm} + \bar{\omega}\, A_{mns,smn} \tag{5.72}$$

が得られる．

演習問題 5.23 式 (5.54) から，行列要素 $A_{mns,nsm}$ および $A_{mns,smn}$ は複素共役であることを示し，式 (5.72) を確かめよ．

他方，タイプ $\Phi_\pm$ の 3 個の粒子の場合，異なった結果が得られる．それは式 (5.72) のように見えるが，$\omega \leftrightarrow \bar{\omega}$ となっている．同じ $\mathbf{D}^{(1)}$ 表現あるいはユニタリー同値な表現に帰着する他の基底をとると，やはりオブザーバブルの平均値 $\langle \mathsf{A} \rangle$ は異なる結果となる．これらの結果はいずれも，三つの占有された状態の一つが遠隔で，残りの二つの状態だけが手に届くなら，ボソンあるいはフェルミオン対称性則に帰着するような望ましい性質をもたない．

これは，逆説的事態をもたらす．2 個の区別できない粒子はボソンとして，あるいはフェルミオンとしてふるまうことはわかっている．他方，もしここでこうした粒子の対があるとしても，他のところに (たとえば，月の上に) 同種の 3 番目の粒子がないことは決して確信できない．その 3 番目の粒子が単に存在するだけで，3 個の組を $\mathbf{D}^{(1)}$ 統計に従わせてしまう．それは，ボソンあるいはフェルミオンに対して成り立った式 (5.43) とは違って，実験室の 2 個の粒子に，不適当に対称化された $\langle \mathsf{A} \rangle$ をとることを意味している．実験室の粒子の観測可能な性質が，同種のもう一つの粒子が月面上に存在する可能性によって影響を与えられるということはほとんど信じられないので，ボース–アインシュタインあるいはフェルミ–ディラック統計だけが区別できない系に許されるという結論をとらざるをえない．

5.6 フォック空間

完全対称あるいは完全反対称状態ベクトルを書く有効な方法は，フォック空間を利用することである．これは，粒子の**数**が一定でないような状態を導入できる新しい表記法である．このような状態は当然，粒子がつくり出されたり，あるいは吸収可能なときは，いつでも起こる．たとえば，もし原子が光子の放出によって崩壊できる励起エ

ネルギー状態で準備されているなら，有限時間後のその量子状態は，励起エネルギー状態と自由な光子を伴う基底状態を表す二つの成分の**線形重ね合せ**であろう．その量子系に存在する光子の数は**不定である**．そこで，このような状況を表すことが可能であり，また永久不変な粒子しか記述できない普通の量子力学よりいっそう強力な，数学的形式を必要とする．

上昇および下降演算子

簡単のために，ただ1種類の粒子だけがあり，その物理系は縮退のない**真空状態**(粒子がまったく存在しない) をもつとする[*8]．その状態は Ψ_0 (あるいはディラック表記法で $|0\rangle$) で表される．これは系の**規格化された基底状態**であって，物理的な状態を表してはいないゼロベクトル 0 と混同してはいけない．

さて，**上昇**演算子 a_μ^+ を，ベクトル $\mathsf{a}_\mu^+\Psi_0$ が規格化されていて，状態 e_μ の1粒子を表すという性質で定義する．(**生成演算子**という用語と表記法 $\mathsf{a}_\mu^\dagger$ も一般に使われている.) a_μ^+ に共役な演算子は a_μ^- と書かれ，**下降**演算子である．なぜなら

$$\langle\Psi_0\,,\mathsf{a}_\mu^-\,\mathsf{a}_\mu^+\Psi_0\rangle=\langle\mathsf{a}_\mu^+\,\Psi_0\,,\mathsf{a}_\mu^+\Psi_0\rangle=1 \tag{5.73}$$

であり，したがって

$$\mathsf{a}_\mu^-\,\mathsf{a}_\mu^+\,\Psi_0=\Psi_0 \tag{5.74}$$

である．すなわち a_μ^- は1粒子状態 e_μ を真空状態に移す．(**消滅**演算子という用語と上付き添字のない表記法 a_μ も，a_μ^- に対して一般的に使われている.)

これからは (規格化を除いて) 演算子 a_μ^+ が (真空状態だけではなく) **任意の**状態に状態 e_μ の1粒子を追加し，したがってその共役 a_μ^- が1粒子を取り去ると見なせると仮定しよう．特に，

$$\mathsf{a}_\mu^-\,\Psi_0=0 \tag{5.75}$$

はゼロベクトルである．なぜなら粒子を真空から取り除くことは非物理的状態をつくり出すからである．

フェルミオン

2個のフェルミオンは同じ状態を占有できない．したがって $(\mathsf{a}_\mu^+)^2\,\Psi_0=0$ と書ける．なぜならこの表式は非物理的だからである．より一般に，たとえこの演算子が真空でない状態に作用するときでも，

$$(\mathsf{a}_\mu^+)^2=\mathsf{O} \tag{5.76}$$

[*8] この仮定は見かけほど明白ではない．量子場の理論は無限自由度に関係していて，ある場合には，縮退した真空の存在を許す．ここで論じられているフォック空間形式は，こうした状況では適用できない．

である．

同じく e_μ に直交する任意の e_ν に対して $(\mathsf{a}_\nu^+)^2 = \mathsf{O}$ が得られる．そしてさらに，単位ベクトル $(\mathsf{e}_\mu + \mathsf{e}_\nu)/\sqrt{2}$ によって表される状態に対して，$(\mathsf{a}_\mu^+ + \mathsf{a}_\nu^+)^2 = \mathsf{O}$ となる．これらすべての式を一緒にして，式 (5.76) を一般化すると

$$\mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\nu^+ + \mathsf{a}_\nu^+ \mathsf{a}_\mu^+ = \mathsf{O} \tag{5.77}$$

が得られる．上昇演算子 a_μ^+ と a_ν^+ は**反交換する**といわれる．それらに共役である下降演算子も反交換する．

$$\mathsf{a}_\mu^- \mathsf{a}_\nu^- + \mathsf{a}_\nu^- \mathsf{a}_\mu^- = \mathsf{O} \tag{5.78}$$

状態ベクトル

$$\mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\nu^+ \Psi_0 = -\mathsf{a}_\nu^+ \mathsf{a}_\mu^+ \Psi_0 \tag{5.79}$$

は，直交した状態 e_μ と e_ν を占める 2 個のフェルミオンを表している．この新しい表記法では，架空のラベルを 2 個の粒子に付ける必要はまったくない．しかしながら，なお**占有された状態**のラベル μ と ν は付け替えることができて，ベクトル全体は，式 (5.79) で見られるように，その符号を変える．この性質は容易に 3 個以上のフェルミオンに一般化される．状態ベクトルを完全反対称に整えることは自動的にフォック形式に含まれている．

個数演算子

$$\mathsf{N}_\mu = \mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\mu^- \tag{5.80}$$

を定義すると便利である．式 (5.75) と (5.74) からそれぞれ，N_μ の固有値は 0 と 1 ということが導かれる．これは

$$\mathsf{N}_\mu \Psi_0 = 0 \qquad \text{および} \qquad \mathsf{N}_\mu \mathsf{a}_\mu^+ \Psi_0 = \mathsf{a}_\mu^+ \Psi_0 \tag{5.81}$$

による．

演習問題 5.24　演算子 $\mathsf{a}_\mu^- \mathsf{a}_\mu^+$ は N_μ と同じ固有ベクトルをもつが，固有値はそれぞれ 1 と 0 なので，

$$\mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\mu^- + \mathsf{a}_\mu^- \mathsf{a}_\mu^+ = \mathbb{1} \tag{5.82}$$

となることを示せ．さらにまた，

$$\mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\nu^- + \mathsf{a}_\nu^- \mathsf{a}_\mu^+ = \delta_{\mu\nu} \mathbb{1} \tag{5.83}$$

であることを示せ．　**ヒント**：任意の混合角 θ を用いて，規格化された状態 e_θ に対する上昇および下降演算子 $\mathsf{a}_\theta^\pm = \cos\theta\, \mathsf{a}_\mu^\pm + \sin\theta\, \mathsf{a}_\nu^\pm$ を考えよ．

式 (5.83) から，

$$[\mathsf{N}_\mu\,,\,\mathsf{N}_\nu] = \mathsf{a}_\mu^+\,\mathsf{a}_\mu^-\,\mathsf{a}_\nu^+\,\mathsf{a}_\nu^- - \mathsf{a}_\nu^+\,\mathsf{a}_\nu^-\,\mathsf{a}_\mu^+\,\mathsf{a}_\mu^- = \mathsf{O} \tag{5.84}$$

が導かれる．なぜなら反可換演算子を二つ交換すれば 2 回符号を変えるので，反可換演算子 2 個の積どうしは交換するからである．

ボ　ソ　ン

ボソンの取扱いは，フェルミオンに比べてある面ではより単純だが，別の面ではより複雑である．まず，占められた状態が交換されるとき，状態ベクトルの符号が変化しないので，より単純である．他方，各状態を任意個の粒子が占めることができる．完全正規直交系は，e_μ 状態の粒子数である n_μ を使って，$|n_\alpha\,n_\beta\cdots n_\mu\cdots\rangle$ と書ける．その状態に対して，個数演算子 N_μ を

$$\mathsf{N}_\mu\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle = n_\mu\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle \tag{5.85}$$

で定義できよう．ボソンの上昇および下降演算子の定義から

$$\mathsf{N}_\mu\,\mathsf{a}_\mu^\pm\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle = (n_\mu \pm 1)\,\mathsf{a}_\mu^\pm\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle \tag{5.86}$$

が，そしてより一般的に，

$$\mathsf{N}_\mu\,\mathsf{a}_\nu^\pm\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle = (n_\mu \pm \delta_{\mu\nu})\,\mathsf{a}_\nu^\pm\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle \tag{5.87}$$

が導かれる．ボソンの上昇および下降演算子は，フェルミオンのように反交換するかわりに，

$$[\mathsf{a}_\mu^+\,,\,\mathsf{a}_\nu^+] = [\mathsf{a}_\mu^-\,,\,\mathsf{a}_\nu^-] = \mathsf{O} \tag{5.88}$$

のように**交換する**が，それはボソン状態ベクトルがラベルの付け替えにさいして符号を変えないからである．

式 (5.87) は

$$[\mathsf{N}_\mu\,,\,\mathsf{a}_\nu^\pm]\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle = \pm\,\delta_{\mu\nu}\,\mathsf{a}_\nu^\pm\,|\cdots n_\mu\cdots\rangle \tag{5.89}$$

とも書ける．基底 $|\cdots n_\mu\cdots\rangle$ には完全性があるので，これは演算子方程式

$$[\mathsf{N}_\mu\,,\,\mathsf{a}_\nu^\pm] = \pm\,\delta_{\mu\nu}\,\mathsf{a}_\nu^\pm \tag{5.90}$$

を与える．この式から，$[\mathsf{N}_\mu\,,\,\mathsf{a}_\nu^+\,\mathsf{a}_\nu^-] = \mathsf{O}$ が容易に示せる．

まだ上昇および下降演算子を規格化していない．これまでの関係式はただ，N_μ が対角となる基底で，行列 $\mathsf{a}_\mu^\pm$ が対角線の隣にゼロでない要素をもつといっているだけである．

$$(\mathsf{a}_\mu^+)_{mn} = \lambda_m\,\delta_{m,n+1}, \qquad (\mathsf{a}_\mu^-)_{mn} = \bar{\lambda}_n\,\delta_{n,m+1} \tag{5.91}$$

したがって，$(\mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\mu^-)_{mn} = |\lambda_m|^2 \delta_{mn}$ である．$\lambda_n = \sqrt{n}$ と選んで，

$$\mathsf{N}_\mu = \mathsf{a}_\mu^+ \mathsf{a}_\mu^- \tag{5.92}$$

がフェルミオンの個数演算子と同じ形をもっているようにすると便利である．また前の式から $\mathsf{a}_\mu^- \mathsf{a}_\mu^+ = \mathsf{N}_\mu + 1$ であり，したがって任意の直交状態の対に対して

$$[\mathsf{a}_\mu^-, \mathsf{a}_\nu^+] = \delta_{\mu\nu} \mathbb{1} \tag{5.93}$$

となることが出てくる．これは，フェルミオンの上昇および下降演算子に成り立った**反交換関係**(5.83) にかわる，**交換関係**である．

$\lambda_n = \sqrt{n}$ で，(5.90) と (5.91) から，

$$\begin{aligned} \mathsf{a}_\mu^+ |\cdots n_\mu \cdots\rangle &= \sqrt{n_\mu + 1}\, |\cdots (n_\mu + 1) \cdots\rangle \\ \mathsf{a}_\mu^- |\cdots n_\mu \cdots\rangle &= \sqrt{n_\mu}\, |\cdots (n_\mu - 1) \cdots\rangle \end{aligned} \tag{5.94}$$

が導かれる．それゆえに，フォック空間での**規格化された**基準状態は

$$|\cdots n_\mu \cdots\rangle = \prod_\mu (n_\mu!)^{-1/2} (\mathsf{a}_\mu^+)^{n_\mu} \Psi_0 \tag{5.95}$$

である．

演習問題 5.25 次式を示せ．

$$[\mathsf{a}_\mu^-, (\mathsf{a}_\nu^+)^n] = \delta_{\mu\nu}\, n\, (\mathsf{a}_\nu^+)^{n-1} \tag{5.96}$$

演習問題 5.26

$$\mathsf{q}_\mu = (\mathsf{a}_\mu^+ + \mathsf{a}_\mu^-)/\sqrt{2} \qquad \text{と} \qquad \mathsf{p}_\mu = i\,(\mathsf{a}_\mu^+ - \mathsf{a}_\mu^-)/\sqrt{2} \tag{5.97}$$

が，正準交換関係 $[\mathsf{q}_\mu, \mathsf{p}_\nu] = i\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}$ を満たすことを示せ．

演習問題 5.27 フォック空間法を用いて演習問題 2.20(46 ページ) を再度解いてみよ．**ヒント：** a^+ と b^+ をそれぞれ x 軸ならびに y 軸方向に偏極した光子の生成演算子であるとせよ．角 θ だけ回転させられた軸に対応している演算子は $\mathsf{a}^+ \cos\theta + \mathsf{b}^+ \sin\theta$ と $-\mathsf{a}^+ \sin\theta + \mathsf{b}^+ \cos\theta$ である．それゆえに，θ に沿って偏極した N 個の光子と $\theta + \pi$ に沿って偏極した N 個の光子をもつ状態は

$$\Phi_\theta = [(\mathsf{a}^+ \cos\theta + \mathsf{b}^+ \sin\theta)\,(-\,\mathsf{a}^+ \sin\theta + \mathsf{b}^+ \cos\theta)]^N\, \Psi_0/N! \tag{5.98}$$

である．もし $|\theta' - \theta|$ が小さく，N が大きいなら，$|\langle\Phi_\theta, \Phi_{\theta'}\rangle|^2 \simeq e^{-4N(\theta-\theta')^2}$ となり，その結果，理想的測定によって達成可能な角度の分解能はおよそ $1/\sqrt{4N}$ であることを示せ． ★

パラフェルミオン

フォック空間形式は，固有値が $0, \cdots, M$ の個数演算子をもつ仮想的な粒子を表すのに適用できる (通常のフェルミオンは $M=1$ に対応している)．実際，式 (5.91) で与えられるような 0 でない要素をもつ，$M+1$ 次元の行列はいずれも

$$(\mathsf{a}_\mu^+)^{M+1} = \mathsf{O} \tag{5.99}$$

を満たす上昇演算子 a_μ^+ である．たとえば，フェルミオン ($M=1$) と準ボソン ($M \to \infty$) の間を滑らかにつなぐものは

$$(\mathsf{a}_\mu^+)_{mn} = (\mathsf{a}_\mu^-)_{nm} = \delta_{m,n+1}\,[\,m\,(M-n)/M\,]^{1/2} \tag{5.100}$$

から得られる．

演習問題 5.28　式 (5.100) が式 (5.99) を満たすこと，さらに $(\mathsf{a}_\mu^+\,\mathsf{a}_\mu^-)_{mn} = \delta_{mn}\,m\,(M-m+1)/M$，$(\mathsf{a}_\mu^-\,\mathsf{a}_\mu^+)_{mn} = \delta_{mn}\,(m+1)\,(M-m)/M$ で，したがって

$$\tfrac{1}{2}\,M\,(\mathsf{a}_\mu^+\,\mathsf{a}_\mu^- - \mathsf{a}_\mu^-\,\mathsf{a}_\mu^+ + \mathbb{1})_{mn} = \delta_{mn}\,n \tag{5.101}$$

であることを示せ．

この式の左辺の表式は，固有値 $0, \cdots, M$ をもつ個数演算子 N_μ である．

別の正規直交基準系への変換を考えれば，式 (5.99) を異なる状態に属している上昇演算子の積に一般化できる．変換則 (3.2) から，$C_{\mu m}$ を任意のユニタリー行列として

$$\mathsf{a}_\mu^+ = \sum_m C_{\mu m}\,\mathsf{a}_m^+ \tag{5.102}$$

が与えられる．この任意性のため，一般には，

$$\sum \mathsf{a}_m^+\,\mathsf{a}_n^+\,\cdots\,\mathsf{a}_s^+ = 0 \tag{5.103}$$

となるが，この各項は $M+1$ 個の上昇演算子の積であり，和は添字 $mn\cdots s$ のすべての置換を含む．この関係は，もっぱら式 (5.99) で仮定された a_μ^+ の性質によるもので，その要請を満たすためにとった式 (5.100) の特定な表示には依存していないが，M 個より多くの粒子があるとき，状態ベクトルに反対称性を課す．しかしながら，この反対称性はもっと少ない粒子の数に対しては制限とならない．

これはパラ統計へのもう一つのアプローチであるが，単にすでに前節で述べた困難を別の方法で示したものとなっている．

5.7　第 二 量 子 化

複合量子系の中には**多数個**の区別できない粒子を含んでいるものがある．重い原子核，固体，中性子星は典型的な例である．**第二量子化**とよばれる方法は，元来，量子

場の理論で使用するために考案されたものだが，何個の粒子が実際に関連しているかを指定することなく，多数個の粒子の集まりを扱える．これは，式 (5.95) で与えられるフォック基底を使うことによって可能となる．これから運動エネルギーあるいは位置エネルギーのような普通の演算子を，その新しい基準で書き下す方法を学ぼう．

1 粒子演算子

運動エネルギーあるいは角運動量のように，1 粒子の量子力学で演算子 $\mathsf{A}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ によって表される**加算的**力学変数を考えよう．もし N 個の区別できない粒子が存在するなら，その変数の**合計値**は

$$\mathcal{A} := \sum_{k=1}^{N} \mathsf{A}(\mathbf{q}_k\,,\mathbf{p}_k) \tag{5.104}$$

である．私たちはフォック状態で挟まれた $\mathcal{A}$ の行列要素に興味があるが，その状態は占有数 n_μ でラベル付された完全正規直交系である．

粒子が現れたり，あるいは消えたり (量子場の理論では可能なこと) することが許されない普通の量子力学では，状態ベクトルに作用する演算子は個別の基準状態の占有数 n_μ は変えても，$\sum n_\mu$ を変えることはできない．特に，$\mathcal{A}$ は粒子の総数を変えない．粒子数の異なる状態は直交しているので，オブザーバブル $\mathcal{A}$ は，粒子総数の同じフォック状態間でのみ 0 でない行列要素をもっている．

さて $\mathsf{A}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ が対角的となる 1 粒子の基準系を選択しよう．その基準系では，対角化された演算子 A がフォック状態に作用するとき，個別の占有数 n_μ さえ変化しないで，

$$\mathcal{A}\,|\cdots\, n_\mu\, \cdots\rangle = \sum_{\mu} A_{\mu\mu}\, n_\mu\, |\cdots\, n_\mu\, \cdots\rangle \tag{5.105}$$

となる．これは，$\mathcal{A} = \sum\limits_{\mu} A_{\mu\mu}\, \mathsf{N}_\mu = \sum\limits_{\mu} A_{\mu\mu}\, \mathsf{a}_\mu^+\, \mathsf{a}_\mu^-$ という演算子の式で書くこともできる．この式は A が対角的である基準系でのみ成り立つことを憶えておこう．他の任意の基準系 (たいていローマ文字の添字で表されている) での表式は，変換則 (5.102) とそのエルミート共役

$$\mathsf{a}_\mu^- = \sum_{n} \overline{C_{\mu n}}\, \mathsf{a}_n^- \tag{5.106}$$

から得られ，その形は

$$\mathcal{A} = \sum_{mn} \left(\sum_{\mu} C_{\mu m}\, A_{\mu\mu}\, \overline{C_{\mu n}} \right) \mathsf{a}_m^+\, \mathsf{a}_n^- \tag{5.107}$$

である．A がギリシャ文字の添字の基準系で対角的なので，式 (5.107) の右辺の括弧は，行列の変換則 (3.46) を使って，また

$$\sum_{\mu\nu} C_{\mu m}\, A_{\mu\nu}\, \overline{C_{\nu n}} = A_{mn} = \langle \mathsf{e}_m\,, \mathsf{A}\, \mathsf{e}_n \rangle \tag{5.108}$$

とも書くことができる．それで，最終的に，

$$\mathcal{A} = \sum_{mn} A_{mn}\, \mathsf{a}_m^+ \, \mathsf{a}_n^- \tag{5.109}$$

となる．$\mathcal{A}$ に対するこの式の特筆すべき性質は，式 (5.104) を書き下すのには粒子の総数が必要だったのに対して，ここではその情報に一切あからさまにはふれられていないことである．これが，普通の "第一量子化" 表記法に対する，"第二量子化" 表記法の利点である．

演習問題 5.29　式 (5.105) の $\mathsf{A}_{\mu\nu}$ が対角的ではない一般的な基準系への一般化は

$$\mathcal{A}\,|\cdots n_\mu \cdots\rangle = \sum_\mu \Big(A_{\mu\mu}\, n_\mu\, |\cdots n_\mu \cdots\rangle + \sum_{\nu\neq\mu} A_{\mu\nu} \sqrt{(n_\mu+1)\, n_\nu}\, |\cdots (n_\mu+1) \cdots (n_\nu-1) \cdots\rangle \Big) \tag{5.110}$$

であることを示せ．

式 (5.110) が第一量子化形式で真面目に得られる結果と一致していることを確認するのはためになる．単純のため，ただ二つの状態 e_μ と e_ν だけが占められていると仮定しよう．$N = n_\mu + n_\nu$ とする．状態ベクトル Ψ は，N 個の粒子を e_μ と e_ν の状態に非同値な方法で分配して得られるに $N!/n_\mu! n_\nu!$ 個の異なる項の対称化された和である．これらすべての項は直交しているので，規格化因子は $(n_\mu! n_\nu!/N!)^{1/2}$ である．行列要素の定義 $\mathsf{A}\mathsf{e}_\nu = (A_{\nu\nu}\mathsf{e}_\nu + A_{\mu\nu}\mathsf{e}_\mu +$ 無関係な項$)$ から，ベクトル $\mathcal{A}\Psi$ が次のものを含むことがわかる．

1) 占有数の変わらない，Ψ と同じ項，ただし $(A_{\mu\mu}\, n_\mu + A_{\nu\nu}\, n_\nu)$ という係数が掛かっている．
2) 1 個の粒子が e_ν から e_μ に移った，係数 $A_{\mu\nu}$ をもつ項．こうした項の数は

$$n_\nu\, [N!/n_\mu! n_\nu!] = (n_\mu+1)\, [N!/(n_\mu+1)!(n_\nu-1)!] \tag{5.111}$$

であり，そのためこうした新しい項の対称化された組は $(n_\mu+1)$ 回現れる．新しい規格化因子は $[(n_\mu+1)!(n_\nu-1)!/N!]^{1/2}$ である．以前の規格化とこの新しい規格化を比較すると，余計な係数 $\sqrt{n_\nu/(n_\mu+1)}$ が掛かっている．これは，式 (5.111) の右辺の係数 $(n_\mu+1)$ と一緒になって，正確に式 (5.110) における平方根を与えている．
3) そして $\mu \leftrightarrow \nu$ に対して同様．

2 粒子演算子

似たような扱いは，2 物体間のクーロン相互作用のような加算的 2 粒子演算子に当てはまる．普通の (第一量子化) 表記法では，

$$\mathcal{B} := \sum_{i<j} \mathsf{B}\,(\mathbf{q}_i\,, \mathbf{p}_i\,, \mathbf{q}_j\,, \mathbf{p}_j) \tag{5.112}$$

である．この演算子がフォック状態に作用するとき，それはせいぜい二つの 1 粒子状態の占有数を変えるだけであり，したがって

$$\mathcal{B} = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\kappa\lambda\mu\nu} B_{\kappa\lambda,\mu\nu}\, \mathsf{a}_\kappa^+\, \mathsf{a}_\lambda^+\, \mathsf{a}_\mu^-\, \mathsf{a}_\nu^- \tag{5.113}$$

と書ける．上昇演算子が下降演算子の左側にあることに注意しよう．これは**正規順序**とよばれている．他のいかなる順序も (反) 交換関係 (5.83) または (5.93) を使うことで得られる．結果は式 (5.113) とは，ただ 1 個の上昇と 1 個の下降演算子 (あるいはまったくない) 項だけ，すなわち，1 粒子の演算子 (あるいはスカラー) だけ違う．この順序の任意性は 2 粒子の演算子の定義にさいしての自明なあいまいさと関係がある．$\mathsf{B}\,(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j\,, \mathbf{p}_j)$ のような式は，それに 2 個の 1 粒子の演算子の和を加えても，2 粒子の演算子のままである．

ここで，(5.113) の係数 $B_{\kappa\lambda,\mu\nu}$ は，普通の 2 粒子の行列要素

$$B_{\kappa\lambda,\mu\nu} = \pm\,\langle \mathsf{e}_{\kappa\lambda}\,,\, \mathsf{B}\,\mathsf{e}_{\mu\nu}\rangle \tag{5.114}$$

であることを示そう．ここでマイナス符号はフェルミオンに対してであり，また

$$\mathsf{e}_{\mu\mu} := \mathsf{u}_\mu \otimes \mathsf{v}_\mu \tag{5.115}$$

と

$$\mathsf{e}_{\mu\nu} := (\mathsf{u}_\mu \otimes \mathsf{v}_\nu \pm \mathsf{u}_\nu \otimes \mathsf{v}_\mu)/\sqrt{2} \qquad (\mu \neq \nu) \tag{5.116}$$

は式 (5.37) および (5.38) によって与えられる (反) 対称化された状態ベクトルである．たとえば 2 粒子状態 $\mathsf{e}_{\rho\sigma}$ $(\rho \neq \sigma)$ に対する $\mathcal{B}$ の効果を考えよう．

$$\mathcal{B}\,\mathsf{a}_\rho^+\,\mathsf{a}_\sigma^+\,\Psi_0 = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\kappa\lambda\mu\nu} B_{\kappa\lambda,\mu\nu}\, \mathsf{a}_\kappa^+\, \mathsf{a}_\lambda^+\, \mathsf{a}_\mu^-\, \mathsf{a}_\nu^-\, \mathsf{a}_\rho^+\, \mathsf{a}_\sigma^+\, \Psi_0 \tag{5.117}$$

であるから，$\mathsf{a}_\tau^-\Psi_0 \equiv 0$ とともに，(反) 交換関係式 (5.83) と (5.93) を繰り返し使うと，

$$\mathsf{a}_\mu^-\, \mathsf{a}_\nu^-\, \mathsf{a}_\rho^+\, \mathsf{a}_\sigma^+\, \Psi_0 = (\delta_{\mu\sigma}\,\delta_{\nu\rho} \pm \delta_{\mu\rho}\,\delta_{\nu\sigma})\,\Psi_0 \tag{5.118}$$

が出て，それから

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\,\mathsf{a}_\rho^+\,\mathsf{a}_\sigma^+\,\Psi_0 &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\kappa\lambda} (B_{\kappa\lambda,\sigma\rho} \pm B_{\kappa\lambda,\rho\sigma})\, \mathsf{a}_\kappa^+\, \mathsf{a}_\lambda^+\, \Psi_0, \\ &= \pm \sum_{\kappa\lambda} B_{\kappa\lambda,\rho\sigma}\, \mathsf{a}_\kappa^+\, \mathsf{a}_\lambda^+\, \Psi_0 \end{aligned} \tag{5.119}$$

となる．これは，まさに式 (5.114) の別の表現である．

演習問題 5.30 具体的に $\mathcal{B}\,(n_\sigma!)^{-1/2}\,(\mathsf{a}_\sigma^+)^{n_\sigma}\,\Psi_0$ を計算せよ． ヒント：交換関係 (5.96) を使え．

演習問題 5.31 具体的に $\mathcal{B}\prod_\sigma (n_\sigma!)^{-1/2}\,(\mathsf{a}_\sigma^+)^{n_\sigma}\,\Psi_0$ を計算せよ． ⋆

量 子 場

抽象的なヒルベルト空間のベクトル e_μ が，正規直交性

$$\int \overline{u_\mu(\mathbf{r},t)}\,u_\nu(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r} = \delta_{\mu\nu} \tag{5.120}$$

および完全性関係

$$\sum_\mu u_\mu(\mathbf{r}',t)\,\overline{u_\mu(\mathbf{r}'',t)} = \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') \tag{5.121}$$

を満たす関数 $u_\mu(\mathbf{r},t)$ で表されるとしよう．パラメーター t が，$\mathbf{r}'$ と $\mathbf{r}''$ 両者でも同じであることに注意しよう．

式 (3.2) によって与えられる基準系 e_μ のユニタリー変換の下で，

$$u_\mu(\mathbf{r},t) = \sum_m C_{\mu m}\,u_m(\mathbf{r},t) \tag{5.122}$$

である．そのとき変換則 (5.106) から，演算子

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t) = \sum_\mu u_\mu(\mathbf{r},t)\,\mathsf{a}_\mu^- \qquad \text{および} \qquad \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{r},t) = \sum_\mu \overline{u_\mu(\mathbf{r},t)}\,\mathsf{a}_\mu^+ \tag{5.123}$$

は，行列 $C_{\mu m}$ によってつくられる基準系のユニタリー変換の下で不変である．それらは，もし同じ物理的状態 e_μ を表すのに別の正規直交系 $u_\mu(\mathbf{r},t)$ を選べば，もちろん不変でない．

もしすべての関数 $u_\mu(\mathbf{r},t)$ がある偏微分方程式 (すべての μ に対して同じ方程式) を満足することがあれば，演算子 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t)$ は同じくその偏微分方程式を満たす．この観点からすると，それは古典物理学の場のようにふるまい，それゆえに "量子場" とよばれている．特に，もし関数 $u_\mu(\mathbf{r},t)$ がシュレーディンガー方程式に従うなら，場 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t)$ もその方程式に従う．これが "第二量子化" という用語の由来である．もとの量子波動関数 (1 個の粒子に対する) は演算子になり，(不定の粒子数に対する) 新しい状態ベクトルはフォック状態を結合したもので与えられる．

量子場 $\boldsymbol{\psi}$ と $\boldsymbol{\psi}^*$ は，式 (5.83), (5.93), (5.121) のため，(反) 交換関係[*9]

$$[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}',t), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}'',t)]_\pm = [\boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{r}',t), \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{r}'',t)]_\pm = \mathsf{O} \tag{5.124}$$

と

$$[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}',t), \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{r}'',t)]_\pm = \sum_{\mu\nu} u_\mu(\mathbf{r}',t)\,\overline{u_\nu(\mathbf{r}'',t)}\,[\mathsf{a}_\mu^-\,,\,\mathsf{a}_\nu^+]_\pm = \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') \tag{5.125}$$

---

*9 記号 $[\mathsf{A},\mathsf{B}]_\pm$ は $\mathsf{A}\,\mathsf{B} \pm \mathsf{B}\,\mathsf{A}$ という意味である．

に従う．この (反) 交換子の特異的ふるまいは，場自身の特異性と関係がある．式 (5.123) の和は収束せず，量子場 ψ と ψ^* は実際には，4 章末で説明したような**演算子値の超関数**である．

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ のような，フォック空間で定義された演算子は，

$$\mathcal{A} = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}\, \mathsf{a}^+_\mu\, \mathsf{a}^-_\nu = \sum_{\mu\nu} \int \overline{u_\mu(\mathbf{r},t)}\, \mathsf{A}\, u_\nu(\mathbf{r},t)\; d\mathbf{r}\; \mathsf{a}^+_\mu\, \mathsf{a}^-_\nu$$
$$= \int \psi^*(\mathbf{r},t)\; \mathsf{A}(\mathbf{r})\; \psi(\mathbf{r},t)\, d\mathbf{r} \tag{5.126}$$

と量子場を用いて書ける．同様に，

$$\mathcal{B} = \tfrac{1}{2} \iint \psi^*(\mathbf{r}',t)\, \psi^*(\mathbf{r}'',t)\, \mathsf{B}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\, \psi(\mathbf{r}'',t)\, \psi(\mathbf{r}',t)\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{r}'' \tag{5.127}$$

となる．

演習問題 5.32 式 (5.127) の因子の順序がフェルミオンに対して (それがボソンに対してはもちろん無関係である) 正しいことを確かめよ． ⋆

5.8 参 考 文 献

群 論

群の表現論は，量子力学の多くの応用で不可欠な数学的道具である．まだこの問題に精通していない読者には，この有力な技術を知ることを強く勧める．古典的文献を以下にあげる．

E. P. Wigner, *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York (1959).

この本は，*Gruppentheorie und ihre Anwendung auf Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg, Braunschweig (1931) から翻訳，拡張されたものである．分子や固体物理への応用を含む最近の導入教科書は次のものである．

M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).

シュミットの定理

E. Schmidt, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen," *Math. Ann.* 63 (1907) 433.

A. Peres, "Higher order Schmidt decompositions," *Phys. Letters A* 202 (1995) 16.

3 個以上の部分空間が関係するシュミット分解の存在に対する必要十分条件が与えられている．

多 体 問 題

A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. Ye. Dzyaloshinskii, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics*, Pergamon, Oxford (1965) [ロシア語からの英訳].

A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York (1971).

6
ベルの定理

6.1 アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンのジレンマ

5章で導入された絡み合い状態は量子力学における基本的問題を提起することになった．それはアインシュタイン，ポドルスキー，ローゼン (以下 EPR と略す) による歴史的論文[*1]「量子力学による物理的実在の記述は完全と見なすことができるか?」で明らかにされた．この論文では，“物理的実在の要素” が次の条件を満たすものとして定義されている．**もし，いかなる方法においても系を乱さずに，ある物理量の値を ⋯ 確実に予言できるならば，このとき，この物理量に対応した物理的実在の要素が存在する．**EPR はこの条件を，波動関数が

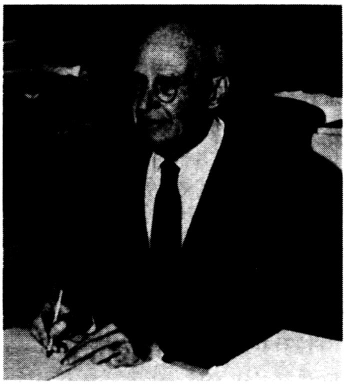
$$\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\,\delta(p_1 + p_2) \tag{6.1}$$

で与えられるような，十分に離れた2粒子からなる複合量子系に適用した．もちろんここで，記号 δ はデルタ関数ではなく，いくらでも狭い幅と高いピークをもった規格化可能な関数を，L は長距離，つまり粒子1と2の間の相互作用範囲よりずっと長い距離を表している．この波動関数は，粒子間の相対距離がいくらでも L に近く，またその全運動量がいくらでも0に近い状態に系が準備されていることを物語っている．ここで演算子 $x_1 - x_2$ と $p_1 + p_2$ は互いに可換であることに注意しておこう．

状態 ψ においては，(わかっているのは互いの距離だけで) 個々の粒子の位置については何もわからない．また (全運動量だけがわかっており) 個々の粒子の運動量についても何もわからない．しかし，もし x_1 を測定すれば，粒子2をまったく乱すことなく，確実に x_2 の値を予言できるだろう．ここで EPR は「**測定時において二つの系はもはや相互作用していないから，第一の系になされた測定操作は，それがどんなものであるにせよ，第二の系に対していかなる実際的変化も引き起こさない**」と論じた．したがって，上の定義から，x_2 は “物理的実在の要素” に対応しているといえる．

一方，もし x_1 ではなく p_1 の測定をしたとすれば，やはりまったく粒子2を乱すことなく p_2 の値を確実に予言できるだろう．したがって，上と同じ論理から p_2 は “物理的実在の要素” に対応していることになる．しかし，演算子 x_2 と p_2 とは互いに可換でないから，量子力学によれば同時にこれらの量に正確な値を賦与することは不可

[*1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* 47 (1935) 777.



有名な EPR 共著論文から 55 年後，テクニオン (Technion) のオフィスで仕事中のナタン・ローゼン (Nathan Rosen)

能である．こうして，EPR は「**波動関数による物理的実在の量子論的記述は不完全であると結論せざるをえない**」のであった．ただし，完全な記述なるものが存在するかどうかに関しては，賢明にも未解決の問題として残している．

ボーアの反論

EPR の論文は出版されると間もなく，ボーア*2の批判にさらされることになった．その論点をしらべてみよう．ボーアは反実証論的推論の有効性を争うことはしなかった．彼はこう書いている．「**測定装置をどう取り扱うかという自由度は，正に実験という考えそのものの特徴であり ... これらの量のうちどれを決定しようとするかに関しては，われわれに完全な選択の自由がある ...**」このように，ボーアもまた，反実証論的選択肢を考えることはまったく正当なことであると観ていたのである．観測者が自由な意志をもち，好きなように実験ができるということに関しては，何の疑いももっていなかった．

その一方でボーアは，EPR による局所性の解釈には同意しなかった．彼は，[空間的に離れたもう一つの系に対する測定による]「**当該の系への機械的擾乱はありようがない**」ことはただちに認めたが，次のように付け加えた．「**そこには，系のその後のふるまいに関してどんなタイプの予言が考えられるかを限定する条件，それ自身を左右する本質的な問題がある．**」

ボーアは彼の観点を“相補性の原理”とよんだ．それは，予言の中には相互に相いれない検証で関係していて，予言不可能なタイプがあるということを意味している．たとえば EPR が記述した系の場合，第一の系でどんな実験を行うかによって，第二の系での実験結果のうち予言可能なタイプが決ってしまうのである．一方，このような事情を知らない観測者が第二の系で行う実験では，この系への“擾乱”の発生を明らか

*2 N. Bohr, *Phys. Rev.* 48 (1935) 696.

にはできないだろうし，その結果，第一の実験として何が選ばれたかは見抜けないだろう．

ボーアによれば，おのおのの実験の設定は別々に考えられなければならない．特に，相互に相いれない実験(すなわち，一方を実行することによって，他方の実行が妨げられるような性格をもった実験)のどんな結果を比較しても，いかなる結論も導き出すことはできない．しかし，アインシュタインはボーアの議論に納得できなかった．彼は後年，自伝[*3]の中でこう書いている．

> … そのパラドックスは，明らかに次の二つの主張のうち，どちらか一つをあきらめるようにわれわれに迫っていた．
>
> (1) ψ 関数による記述は完全である，
>
> (2) 真に空間的に分離された状態は互いに独立である．

この 2 番目の主張はアインシュタインにとっては議論の余地がなかった．彼はこう書いている[*4]．「**絶対に譲れない私の考えでは，系 S2 の真実の状態は，S2 から空間的に離れた系 S1 になされたこととは無関係である．**」この物理原理はアインシュタインの局所性とよばれることになった．

スピン系

同じジレンマは，離散的な変数のみを含んだより簡単な例としてボーム[*5]によって提案され，多くの場合，それ以降のいわゆる "EPR パラドックス" とよばれる議論での基礎となった．たとえば $\pi^0 \to e^+ e^-$ (π^0 のこの崩壊モードは，まれではあるが実際に起こる)のように，スピンをもたない系が 1 対のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に崩壊する場合を考えよう．崩壊によって生成された粒子が分離し，十分遠くに離れてしまってから，片方の粒子のスピンのある成分を測定するのである．いま，電子 (e^-) の S_x を測定してそれが $\hbar/2$ に等しかったとする．このとき私たちは，もし測定すれば陽電子 (e^+) の S_x は $-\hbar/2$ となるに違いないと思う．すなわち，陽電子は $S_x = -\hbar/2$ となる状態にあるとわかっているのである．さらに，陽電子は自由になった正にその瞬間から，他の粒子とは相互作用していなかったのであるから，この状態にあったはずである．

一方，私たちは電子の S_y を測定することも**できた**のであり，同じ議論から，陽電子の S_y は決まっていた**はずである**．同じことが S_z に対してもいえる．したがって，も**しもう一方の**粒子の対応するスピン成分を測定すれば，決まった値が確実に予言可能なのであるから，スピンの 3 成分はすべて，EPR が定義した "実在の要素" に対応していることになる．しかし，この主張は，各粒子のスピン成分で確実な値をとりうるのはたかだか**一つ**に過ぎないと断定する量子力学と矛盾している．

[*3] A. Einstein, in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, ed. by P. A. Schilpp, Library of Living Philosophers, Evanston (1949) p. 682.

[*4] A. Einstein, *ibid.*, p. 85.

[*5] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New York (1951) p. 614.

帰納的な実在の要素

さらに，**可換**な演算子に対応する実在の要素は代数的に結合することができ，それによって新たな実在の要素を帰納的に生み出すことができると仮定を推し進めれば，“パラドックス”はいっそう顕著になる．演算子 A と B が交換する場合，量子力学では両者の，そしてその任意の代数関数 $f(\mathsf{A},\mathsf{B})$ は原理的に同時測定可能であり，それらの測定結果は演算子自身と同じ関数関係を満たしている (以下の演習問題 6.2 を参照)，ということがこの仮定に対する論理的根拠である．したがって，もし可換な演算子 A と B が，おのおの α および β という数値をもった実在の要素に対応しているならば，任意の代数関数 $f(\mathsf{A},\mathsf{B})$ もまた数値 $f(\alpha,\beta)$ をもった実在の要素に対応していると言いたくなる．これが，言葉に表されていないにせよ，EPR 規準の精神である．私たちは (空間的に離れた系を観測することで得られる) **第一義的な**実在の要素と (帰納的に得られる) **第二義的な**実在の要素を区別できるかもしれないが，ここでの議論では両者は同等と見なされている．この帰納的定義は，“実在”に対する直観的意味から強く示唆されたものである．

さて，スピン一重項状態にある，互いに離れた二つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子をもう一度考えよう．私たちは，S_{1x} と S_{2x} の観測値は**反対の**値をとるはずであることを知っている．この値をおのおの m_{1x}, m_{2x} とする．同様に，S_{1y} と S_{2y} を観測すれば，**反対の**値 $m_{1y} = -m_{2y}$ が得られるはずである．さらに，S_{1x} と S_{2y} は可換でいずれも実在の要素に対応しているから，その積 $\mathsf{S}_{1x}\mathsf{S}_{2y}$ もまた (上で説明したような，帰納的に定義された) 実在の要素に対応している．積 $\mathsf{S}_{1x}\mathsf{S}_{2y}$ に割り当てられる数値は個々の数値の積 $m_{1x}m_{2y}$ である．同様に，$\mathsf{S}_{1y}\mathsf{S}_{2x}$ の数値は積 $m_{1y}m_{2x}$ となる．これらの積は，$m_{1x} = -m_{2x}$ かつ $m_{1y} = -m_{2y}$ であるから，**等しく**なければならない．しかし，その一方で，量子論の主張によれば，一重項状態は

$$(\mathsf{S}_{1x}\mathsf{S}_{2y} + \mathsf{S}_{1y}\mathsf{S}_{2x})\,\psi = 0 \tag{6.2}$$

を満足するから，これらの積は**反対の**値となるはずである．これはもはやパラドックスではなく代数的矛盾である[*6]．こうして私たちは，ほとんど自明のように見えていても，実在の要素の帰納的定義と量子論とは相いれないという結論に到達せざるをえない．

演習問題 6.1 演算子 $\mathsf{S}_{1x}\mathsf{S}_{2y}$ と $\mathsf{S}_{1y}\mathsf{S}_{2x}$ とが交換することを示し，式 (6.2) を証明せよ．

演習問題 6.2 状態 ψ が $\mathsf{A}\psi = \alpha\psi$ と $\mathsf{B}\psi = \beta\psi$ を満たすとき $f(\mathsf{A},\mathsf{B})\psi = f(\alpha,\beta)\psi$ となることを示せ．この結果は，A と B が交換しなくても単に共通の固有ベクトル ψ をもっていれば成立していることに注意せよ．

[*6] A. Peres, *Phys. Letters A*151 (1990) 107.

3 粒子模型

マーミン[*7]は，議論の余地の残されたEPRの規準の拡張を用いることなく，同様の矛盾を3粒子系に対して導いた．(マーミンの議論は，グリーンバーガー，ホーン，ツァイリンガー[*8]による4粒子系に対する議論を簡略化したものである.)

三つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子は絡み合いの状態

$$\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)\,(\mathsf{u}_1\,\mathsf{u}_2\,\mathsf{u}_3 - \mathsf{v}_1\,\mathsf{v}_2\,\mathsf{v}_3) \tag{6.3}$$

にあり，座標波動関数 $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ は各粒子が空間的に十分離れていることを保証するような形であるとする．スピン状態 u と v は σ_z の固有状態であり，

$$\begin{aligned} &\sigma_x \mathsf{u} = \mathsf{v}, \qquad &\sigma_y \mathsf{u} = i\mathsf{v}, \qquad &\sigma_z \mathsf{u} = \mathsf{u} \\ &\sigma_x \mathsf{v} = \mathsf{u}, \qquad &\sigma_y \mathsf{v} = -i\mathsf{u}, \qquad &\sigma_z \mathsf{v} = -\mathsf{v} \end{aligned} \tag{6.4}$$

を満たしている．ψ がいくつかの演算子の固有ベクトルになっていることは容易に確かめられる．

$$\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y}\,\psi = \sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y}\,\psi = \sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x}\,\psi = \psi \tag{6.5}$$

および

$$\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x}\,\psi = -\psi \tag{6.6}$$

演習問題 6.3　上の方程式を確かめるとともに，これら四つの演算子が交換することを示せ．さらに次の関係式を示せ．

$$(\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y})\,(\sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y})\,(\sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x}) \equiv -(\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x}) \tag{6.7}$$

すぐわかるように，決定的意味をもっているのは式(6.7)の負号である．

EPRの議論は次のようになる．私たちは，各粒子について，互いに相手を乱すことなく，σ_x あるいは σ_y を測定することができる．測定の結果をおのおの m_x あるいは m_y とよぼう．式(6.6)から，もし三つの σ_x を測定すれば，その結果は確実に次式

$$m_{1x}\,m_{2x}\,m_{3x} = -1 \tag{6.8}$$

を満たすと予言できる．したがって，各演算子 $\sigma_{1x}, \sigma_{2x}, \sigma_{3x}$ は，その値を他の空間的に離れた2粒子に対する観測によって確実に予言できるから，EPRのいう実在の要素が対応している．

しかし式(6.5)からは，σ_{2y} と σ_{3y} を測定すれば，(σ_{2x} と σ_{3x} ではなく)，σ_{1x} の値を確実に予言できることも導かれる．このとき次の関係式

$$m_{1x}\,m_{2y}\,m_{3y} = 1 \tag{6.9}$$

[*7] N. D. Mermin, *Physics Today* 43 (June 1990) 9 [「パリティ」, 5 (1990年12月号) 56に和訳あり (訳者)]; *Am. J. Phys.* 58 (1990)731.

[*8] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, ed. by M. Kafatos, Kluwer, Dordrecht (1989) p. 69.

および添字を循環的に置換した同様な関係式

$$m_{1y}\, m_{2x}\, m_{3y} = 1 \tag{6.10}$$

$$m_{1y}\, m_{2y}\, m_{3x} = 1 \tag{6.11}$$

が成り立つ．最後の四つの方程式の積からは，ただちに矛盾が導かれる．

上の議論には暗黙の仮定が含まれている．つまり，式 (6.8) の m_{1x} と式 (6.9) の m_{1x} は，その値を得るための二つの方法が**互いに排他的な**実験 (σ_{2x} と σ_{3x} の測定であるか，あるいは σ_{2y} と σ_{3y} の測定であるか) に関与しているという事実にもかかわらず，等しいとされているのである．この暗黙の仮定は**反実証論的な性格**をもっており，実験で確かめることはできない．明らかにこれは，EPR 論文の精神に密着したものであり，また私たちが "実在" という言葉の直観的意味から受け入れざるをえないと感じられるものであるが，アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンへの対応でボーアが示した批判の対象そのものである．

アインシュタインの局所性と他の相対論的考察

EPR の提案した一見合理的な規準に起因するパラドックス (もしくは代数的矛盾) は，私たちに彼らの議論をもっと慎重に再吟味することを促している．もし … **われわれが確実に予言できるならば** … "われわれ" とは誰なのか?

ボームの一重項模型では，S_{1x} を測定して $+\hbar/2$ を得た観測者は，もし他の観測者が S_{2x} を測定すれば (あるいは測定したとすれば，もしくは将来測定すれば)，彼女*9は反対の結果 $-\hbar/2$ を見いだすはずであるということを知っている．しかし，この知識は，二人の観測者が空間的に遠く離れているのであるから役に立たない (操作的意味に欠けている)．第一の観測者にできることは，2 番目の観測者にメッセージを送り，このメッセージを受け取る前に他のスピン成分を測定して粒子を乱していない限り，S_{2x} が $-\hbar/2$ であることは確認可能だと彼女に伝えることだけである．

さて，彼女が第一の観測者に気付かれないように S_{2y} を測定して，たとえば結果 $+\hbar/2$ を得たとしよう．ここに何らかのパラドックスが存在しうるのだろうか? 概念的困難は実際，一対の粒子系のような物理系が，いずれも各瞬間ごとによく定義された量子状態をとる (なかには全宇宙が一つの量子状態をとるとする人もいる) と要請したときに生ずる．この困難を例示するため，二人の観測者は図 6.1 に示されたように，**異なる**ローレンツ系に固定されているとしよう．両者は一定の相対速度で互いに後退している．したがって，各ローレンツ系では，その系に静止した観測者によって行われた検証の方が，運動している観測者によって行われた検証よりも**先**に起こるように見える．もし第一の観測者が悪い量子論の教育を受けていて，1 対の粒子系は各瞬間ごとにある定まった波動関数をもつと信じているとすると，彼は，$t_1 < 0$ に存在して

*9 二人以上の観測者が関与する場合，第二の観測者は "彼" ではなく "彼女" とよぶことにする (12 ページの脚注を参照)．

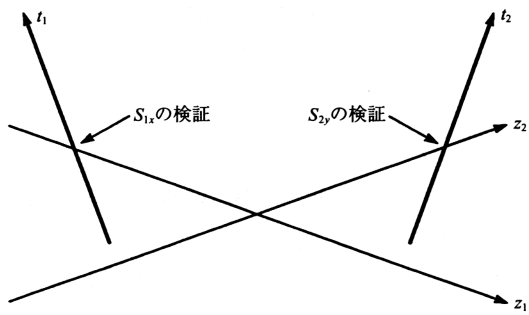


図 6.1　この時空図において，座標系の原点は二つの検証の行われた位置である．t_1 軸と t_2 軸は互いに後退しつつある観測者の世界線であり，各ローレンツ系において，z_1 軸と z_2 軸は同時刻線である．すなわち前者では $t_1 = 0$, 後者では $t_2 = 0$.

いた一重項状態は $t_1 > 0$ には S_{1x} と S_{2x} の固有状態に収縮したということになるだろう．同じ気分からすれば，第二の観測者も $t_2 < 0$ に存在していた一重項状態はその後彼女の行った検証の結果，S_{1y} と S_{2y} の固有状態に収縮したということができる．

仮想的な観測者が行ったこのような記述は，矛盾をはらんでいるだけでなく，まったく意味がないものである．実際に観測されたものに関しては何の不一致もないのだが，複数の観測者が関与するような状況を，相対論的変換法則に従う一つの波動関数で記述することは不可能である．一つの状態の共変的履歴だけですべての実験結果をうまく説明できるようなものは定義できないのである[10].

演習問題 6.4　二人の観測者が通信不可能で彼らの結果を比較できないとしたら，おのおのの観測は，統計的には，縮約された密度行列 $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ で表される乱雑な状態を準備したことと同じであることを示せ．

演習問題 6.5　第一の観測者が繰り返し可能な検証を行い，$\mathsf{S}_{1x} = \hbar/2$ であることを見いだした後の 1 対の粒子のスピン状態は，その検証で定義されたように，$\frac{1}{2}\binom{1}{1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ である．このスピン状態を，z 方向に相対速度をもって運動している第二の観測者のローレンツ系に変換せよ．　★

6.2　秘密の決定論

量子力学による物理的実在の記述は完全でないという EPR の主張は，(たぶん現在よりもずっと進んだ技術に関連して) すべての予言が確率的ではなく曖昧さの残らないような，自然に対するより詳細な記述の存在を連想させる．たとえば，シュテルン–ゲルラッハ磁石を通った特定の銀原子が上に曲げられるか下に曲げられるか，予言できるようになるかもしれない．このようなより詳細な記述には，たぶん，銀原子とシュテルン–ゲルラッハ磁石に関連する，さらには原子を生み出すオーブンに関しての付加

[10] Y. Aharonov and D. Z. Albert, *Phys. Rev. D* 24 (1981) 359.

的なデータが関与することになるだろう．これらの仮想的な付加データは "隠れた変数" とよばれている．隠れた変数理論の当面の目標は次のことである．隠れた変数に関する詳細な知識をもたない場合には，それらが従うとされる統計分布にもとづいた**アンサンブル平均**で計算を行うことができ，その結果は量子論の統計的予言をもたらす．こうして，量子論の確率的性格は，ちょうど古典統計力学でそうであったように，物理的データ指定の不完全さに帰せられる．量子論的期待値は，概念的には古典的正準期待値と同様な位置を占めることになる．

光　子　対

量子現象での乱雑さは単に幻想であって，無秩序な列のように見えても実際は完全に決定論的であるという手がかりが本当に存在する．このことを説明するために，励起 S 波初期状態にあった 1 個の原子が連続的に二つの電気双極子遷移 $(J=0)\to(J=1)\to(J=0)$ を行う場合を考えよう．この過程は原子 SPS カスケードとよばれている．もしこの過程で放出された光子が反対方向で検出されたとすると，それらは**同じ偏光状態**で現れることになる．これは，以下に述べるような対称性によっている．

原子の励起初期状態は球対称 $(J=0)$ である．その崩壊を引き起こすのは，回転変換不変な電磁相互作用である．したがって，**原子と光子対**からなる終状態もまた球対称である．この終状態は，原子および光子の様々な固有状態が互いに相関をもった**絡み合い**状態にある．この絡み合いは，コリメーターを使ってある与えられた方向へ運動する光子だけを選択することで，部分的に解くことができる．この方向を z 軸としよう．方向をそろえた後の状態には，依然としてこの軸のまわりの回転対称性が残っている．x と y をそれぞれ，z 軸と垂直な x 軸および y 軸方向の光子の直線偏光状態としよう．すると，光子対に対しては，$\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2$, $\mathsf{x}_1\mathsf{y}_2$, $\mathsf{y}_1\mathsf{x}_2$, $\mathsf{y}_1\mathsf{y}_2$ という四つの状態が完全系をなす．もちろん，z 軸のまわりの回転のもとで不変なのは，

$$\psi_+ = (\mathsf{x}_1\,\mathsf{x}_2 + \mathsf{y}_1\,\mathsf{y}_2)/\sqrt{2} \tag{6.12}$$

と

$$\psi_- = (\mathsf{x}_1\,\mathsf{y}_2 - \mathsf{y}_1\,\mathsf{x}_2)/\sqrt{2} \tag{6.13}$$

という二つの**絡み合った**組合せだけである．偏光状態 ψ_+ は空間反転対称であるのに対して，ψ_- は反対称である．電磁相互作用はパリティを保存するから，もし光子が原子 SPS カスケードに由来しているならば，光子対の終状態としてとりうるのは ψ_+ だけである．(一方，ポジトロニウムの消滅で生成されたガンマ線対は，ポジトロニウムの基底状態が負の固有パリティをもっているから，反対称状態 ψ_- になければならない[*11].)

[*11] J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Addison-Wesley, Cambridge (1955) pp. 275–282.

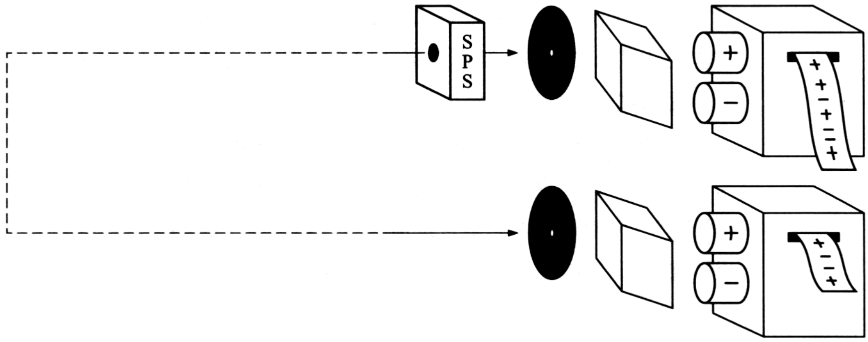


図 6.2　SPS カスケードで生成され反対方向に走る光子は，完全に相関をもった直線偏光状態にある．ここで，左側遠方に置かれた鏡 (ここには示されていない) によって反射された一方の光子の測定には遅れが生ずる．下側の測定装置は常に上側の装置に遅れて動作することになり，その出力は確実に予言可能である．

演習問題 6.6　ψ_+ と ψ_- をヘリシティの固有状態 (すなわち円偏光状態) で書き下せ．

さて，ψ_+ 状態の相関をもつ偏極光子対を得るために，図 1.3 (7 ページ) の実験を改良し，光子源 (白熱灯) を原子 SPS カスケードで置き換えよう．図 6.2 に示した新しい設定では偏光板がなくなり，各光子ビームに対して偏極分析器 (方解石の結晶)，二つの光子測定器，そして結果を記録するプリンターの備わった完全な測定装置が用意されている．

ここで，次のような状況に直面することになる．各プリンターの出力は，それらを別々に考えると，完全にランダムであるように見え，+ と − は等しい数だけ現れている．しかし，これらのプリンター出力を**比較する**と，そこには**相関のある**ことがわかる．特に図に示したように，二つの結晶が平行の場合，光子は同じ偏極状態にあるので，プリンターは常に同じ出力を記録することになる．上のプリンターの出力結果を見た観測者は，下のプリンターに出現する結果を確実に予言できる．2 番目のプリンター出力は，それ自身ランダム系列のように見えるが，その結果の一つ一つは実のところ完全に決まっているのである．

さらに，図 6.3 に示したように，二つのうち一つの測定装置を (全体として) 光子ビームに対して角度 θ だけ回転させて改善する可能性もある．**固定された**偏極分析器によって測られた直線偏光状態を x (これは光線の方向 z 軸に垂直な平面内で x 軸方向を定義しているにすぎない) としよう．このとき，**回転した**偏極分析器によって測られる直線偏光は $\mathsf{x}\cos\theta + \mathsf{y}\sin\theta$ となり，これに対応する検証は

$$\mathsf{P}_\theta := (\mathsf{x}\cos\theta + \mathsf{y}\sin\theta)\,(\mathsf{x}\cos\theta + \mathsf{y}\sin\theta)^\dagger \tag{6.14}$$

という射影演算子によって表される．これから先は，P_θ の固有値 1 と 0 に対応して，固有値 1 と −1 をとる別の演算子

$$\sigma_\theta := 2\,\mathsf{P}_\theta - \mathbb{1} = (\mathsf{x}\mathsf{x}^\dagger - \mathsf{y}\mathsf{y}^\dagger)\cos 2\theta + (\mathsf{x}\mathsf{y}^\dagger + \mathsf{y}\mathsf{x}^\dagger)\sin 2\theta \tag{6.15}$$

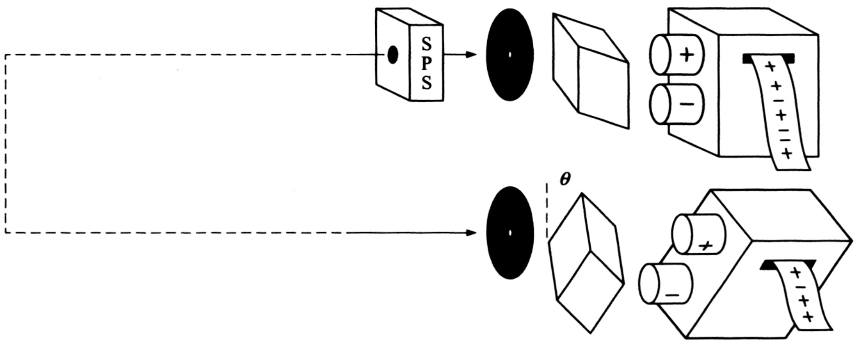


図 6.3　片方の測定装置が角度 θ だけ傾けられた場合の出力の相関は $\cos 2\theta$ である．

を考える方が便利である．(これは，形式的には $\sigma_z \cos 2\theta + \sigma_x \sin 2\theta$ に似た演算子である.)

この実験の光子**対**に対して，二つの偏極分析器に関する積 $\sigma_0 \otimes \sigma_\theta$ もまた固有値 1 と -1 をとる．これらの値はそれぞれ，二つの偏極分析器が同じ結果を示す場合と反対の結果を示す場合に対応している．オブザーバブル $\sigma_0 \otimes \sigma_\theta$ の平均値は，二つの偏極分析器の出力の**相関**を表している．この値は，平均値に対する標準的な量子論の規則，式 (3.41) によって予言可能である．

$$\langle \sigma_0 \otimes \sigma_\theta \rangle = \frac{1}{2} (\mathsf{x}_1 \mathsf{x}_2 + \mathsf{y}_1 \mathsf{y}_2)^\dagger (\sigma_0 \otimes \sigma_\theta) (\mathsf{x}_1 \mathsf{x}_2 + \mathsf{y}_1 \mathsf{y}_2) = \cos 2\theta \tag{6.16}$$

予想通り，$\theta = 0$ に対しては完全な相関が，$\theta = \pi/2$ に対しては完全な反相関が，そしてその他の角度に対してはマリュスの定理が得られた．

演習問題 6.7　図 6.3 に示された結果から，この実験で測られた相関を求めよ．

解答：$\langle \sigma_0 \otimes \sigma_\theta \rangle = 0.5$.

演習問題 6.8　二つの偏極分析器が，任意にとられた x 軸から α と β の角度の直線偏光を検証する場合，その出力の相関は

$$\langle \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \rangle = \cos 2(\alpha - \beta) \tag{6.17}$$

となることを式 (6.12) と (6.15) から示せ．

隠れた変数に対するベルの模型

図 6.2 に見られるように，空間的に離れた，見かけ上もランダムな事象間に完全な相関が存在することから，物理の基本法則は決定論的であり，量子現象が表面上確率的に見えるのは，単に物理系を準備する側の手段の不完全さによるものだという考えが思い浮かぶ．実際のところ，量子論の性質を未知のさらに下部の世界の決定論的性

質から導き出そうという試みは，量子論の初期の段階から存在していた．そしてその一方で，“隠れた変数”理論では量子論の統計的性質は再現できないことを証明しようという試みも無数に存在したのである．

特に，フォン・ノイマンの古典的名著[*12]には，量子論と“分散のないアンサンブル”の存在とは両立しないことが数学的に証明されている．つまり，物理系の**あらゆる**オブザーバブル A に対して $\langle \mathsf{A}^2\rangle = \langle \mathsf{A}\rangle^2$ が満足されるようなアンサンブルを用意することは不可能なのである．フォン・ノイマンの証明に必要な仮定は，オブザーバブル A が自己共役な演算子によって表現されている (これは量子論の本質である)，すなわち，もし A と B がオブザーバブルならばその和 A + B もそうであり，さらに

$$\langle \mathsf{A}+\mathsf{B}\rangle = \langle \mathsf{A}\rangle + \langle \mathsf{B}\rangle \tag{6.18}$$

を満たすということである．最後の方程式はトレース公式 (3.77) からの自明な帰結とも考えられるが，フォン・ノイマンはそれを証明の中で使わなかった．むしろ，もっと弱い仮定からそれを**導きたかった**のである．

フォン・ノイマン自身認めているように，難しいのは演算子 A と B が交換せず，両者を同時測定できない場合には，式 (6.18) が成立するとする何の物理的根拠もないということである．A, B, A + B を測定するために必要な三つの実験的設定は，根本的に異なっていることがありうるのである．(物理系の運動エネルギー，ポテンシャルエネルギー，全エネルギーの測定を考えてみよ.) したがって，通常の量子論的アンサンブルが出てくるような月並な状態準備では式 (6.18) 満たされるが，まだ私たちの考えつかないより手の込んだ方法によれば，条件 (6.18) を破るような分散のないアンサンブルがつくれるのではないか，と主張することができるかもしれない．

議論の余地を残したフォン・ノイマンの証明の後，異なる前提から“隠れた変数の非存在定理”を導こうという試みもあったが成功しなかった．ベル[*13]はこれらすべての努力を最終的に集約し，そこでの**平均値**が量子論の予言に一致するような**決定論的**模型を具体的に構成してみせた．

ベルの模型には，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子とオブザーバブル $\mathsf{A} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ が関与している．ここで $\mathbf{m}$ の 3 成分は任意の実数，$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリのスピン行列である．量子力学に従えば，A の測定は常にその固有値 $\pm m$ ($m = |\mathbf{m}|$) の一つをもたらし，測定のアンサンブル平均は $\langle \mathsf{A}\rangle = \psi^\dagger \mathsf{A}\psi$ で与えられる．しかし量子力学は一つ一つの検証に付随する結果を予言することはできない．ベルの模型では，$\mathbf{m}$ (測定装置のマクロなパラメーターであって制御可能) と ψ (準備された量子状態，これも制御可能) に加えて，λ とよばれる隠れた変数によってこの結果が決定されると仮定される．各物理系はある定まった λ をもつと考えられるが，私たちはその値を知ることができない．現在の実験技術は λ に対して常に -1 と 1 の間の一様分布をもたらすことになる．この一様分布こそ量

[*12] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) p. 171; E. T. Beyer による英訳: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1955) p. 324.
[*13] J. S. Bell, *Rev. Mod. Phys.* 38 (1966) 447.

子論の有効な領域を特徴づけるものにほかならない．さらにこの模型では，与えられた λ に対して，測定結果は次のようになると規定されている．

$-\psi^\dagger \mathsf{A}\psi/m < \lambda < +1$ ならば $(1+\psi^\dagger \mathsf{A}\psi/m)/2$ の確率で $+m$ となり，

$-1 < \lambda < -\psi^\dagger \mathsf{A}\psi/m$ ならば $(1-\psi^\dagger \mathsf{A}\psi/m)/2$ の確率で $-m$ となる．

したがって，その**平均的な**結果は $m(1+\psi^\dagger \mathsf{A}\psi/m)/2 - m(1-\psi^\dagger \mathsf{A}\psi/m)/2 = \psi^\dagger \mathsf{A}\psi$ となり，量子力学と一致するのである．

さて，A と同じ規則に従い，λ の値に応じて $\pm n$ の測定値が得られる別のオブザーバブル $\mathsf{B} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を考えよう．さらに，3 番目のオブザーバブルを $\mathsf{C} = \mathsf{A}+\mathsf{B} = (\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\sigma}$ と定義する．C の測定値は常に $\pm|\mathbf{m}+\mathbf{n}|$ となること，しかもこの結果は $m+n, m-n$ といった四つの組合せのいずれでも**ない**ことに注意しよう．したがって，式 (6.18) はある特定の λ に対して成り立たないばかりか，一般には勝手な λ 分布に対しても成立しえない．それにもかかわらず，式 (6.18) は**一様**分布した λ に対しては正しい．というのも，この場合にはベルの模型が量子力学との一致を保証しているからである．このようにして，量子論の統計的性質は決定論的隠れた変数模型によってすべて再現できることがわかる．

同じ論文 *13 の中でベルは，この模型がより高い次元のヒルベルト空間に拡張可能であることも示した．そして，次の基本的な疑問を新たに投げかけている．EPR 議論の場合のように，量子系がいくつかの切り離された部分系から構成されている場合，隠れた変数もまた切り離された部分集合に分かれることになるのだろうか? 量子系が絡み合いの状態にある場合，彼の模型はこの**分離可能性**条件を満足していないことが示されている．

> … この理論にはある因果的で明白な機構が存在していて，装置の一部の配置が遠く離れた部分で得られる結果に影響を及ぼしています．実際，アインシュタイン–ポドルスキー–ローゼンのパラドックスは，アインシュタインが最も好まなかっただろうという方法で解決されています *4．

最後に彼は「量子力学を隠れた変数によって説明するには**どんな**場合もこのような異常な性格をもたなければ**ならない**，ということを証明できるか?」という疑問を提起した．その答はこの論文の最後に加えられた次の脚注に見られる．「そのような証明はこの論文の完成後に見いだされた．」(編集上の手違いで，ベルの論文 *13 は，その証明に言及*14,*15してから 2 年後になってようやく出版された．これが隠れた**局所的**変数の非存在に関する**ベルの定理**であり，以下で議論する．)

---

*14 J. S. Bell, *Physics* 1 (1964) 195.
*15 M. Jammer, *Found. Phys.* 20 (1990) 1139.

6.3 ベルの不等式

“アインシュタイン–ポドルスキー–ローゼンのパラドックスに関して” というのがベルの第二論文の題名であったが，EPR 議論の場合とは反対に，ベルの議論は量子力学に関するものではなかった．むしろそれは，単純に**局所因果性の原理**を仮定した場合には，**離れた事象間の相関には上限**があることを，何ら特定の物理理論を仮定することなく，一般的に証明したものである．この原理 (**アインシュタインの局所性**ともよばれているが，アインシュタイン以前にもよく想定されていた) は，ある与えられた時空領域で起こる事象が，同じ時刻にそこから遠く離れた時空領域にいるものによって制御できるような外部パラメーターとは独立であることを主張している．局所因果性の原理が量子力学とは共存できないというベルの証明*14 は重大な意味合いをもっており，“最も深遠な科学的発見”*16として歓迎された．

局所因果性の原理は，その反実証論的性格からして，物理ではなくむしろ哲学に属するものではないかと異を唱えられるかもしれない．ある特定の事象の出現が何らかの外部パラメーターに依存しないという主張は，相互に排他的なシナリオ (そこではこれらの外部パラメーターは異なる値をとる) 間の比較を意味している．たとえば，図 6.3 で異なる角度 θ の実験を繰り返し行うとしよう．このとき，**上の**プリンターが表示する結果は，**下の**測定台を傾けた角度 θ には依存するはずがないというのはもっともらしい主張だろう．ベルの定理は，このような主張が (自明に見えるかもしれないが)，余弦相関法則 (6.17) とは相いれないことを断言している．以下で見るように，相関は**強すぎる**のである．

量子相関を議論する前に，SPS 光子カスケードに対する易しい古典対応*17を考えてみよう．最初静止していた一つの爆弾が，角運動量 $\mathbf{J}_1$ と $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$ をもつ二つの非対称な部分に爆発したとしよう (図 6.4)．ある観測者は第一の破片を検出し，力学変数 $\mathrm{sign}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}_1)$ を測定する．$\boldsymbol{\alpha}$ はその観測者によって選ばれた任意の方向の単位ベクトルである．この測定の結果を a とよぶと，そのとりうる値は ± 1 のみである．同様に，第二の観測者は残りの破片を検出し，この観測者が選んだ別の単位ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ で与えられる $\mathrm{sign}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J}_2)$ を測定する．その結果は $b = \pm 1$ となる．

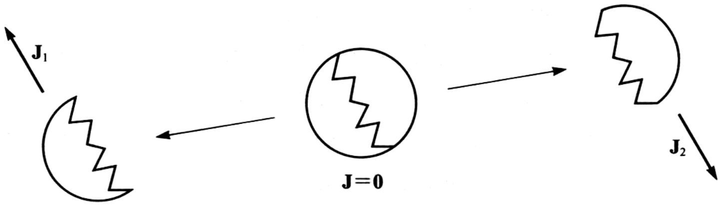


図 6.4　最初静止していた爆弾が分裂し，反対の角運動量をもった二つの破片になる．

*16 H. P. Stapp, *Nuovo Cimento B* 29 (1975) 270.
*17 A. Peres, *Am. J. Phys.* 46 (1978) 745.

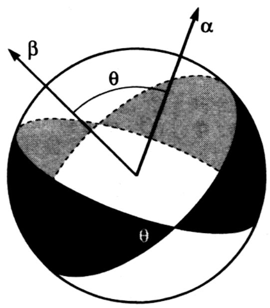


図 6.5 古典相関 (6.21) を得るための幾何学的構成．影のついた領域では $ab = 1$，影のついていない領域では $ab = -1$.

実験は N 回繰り返される．j 番目の爆弾に対して測定された結果を a_j と b_j としよう．もし $\mathbf{J}_1$ と $\mathbf{J}_2$ の方向がランダムに分布していたとすると，各観測者によって得られる平均値

$$\langle a\rangle = \sum_j a_j\,/N \qquad \text{と} \qquad \langle b\rangle = \sum_j b_j\,/N \tag{6.19}$$

は，ともに 0 に近く (典型的には $1/\sqrt{N}$ のオーダー) なる．しかし，もし観測者達が彼らの結果を**比較**したとすると，一般には 0 とならない**相関**

$$\langle ab\rangle = \sum_j a_j\,b_j\,/N \tag{6.20}$$

のあることがわかるだろう．たとえば，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ ならば常に $a_j = -b_j$ となるから $\langle ab\rangle = -1$ である．

任意の $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ に対して期待される相関 $\langle ab\rangle$ は，次のようにして計算することができる．図 6.5 に示されるように，$\boldsymbol{\alpha}$ に垂直な赤道面で分断された単位球を考えよう．すると，もし $\mathbf{J}_1$ が片方の半球を指していれば $a = 1$ であるし，もう片方の半球を指していれば $a = -1$ である．同じように，$\boldsymbol{\beta}$ に垂直な赤道面によって $b = \pm 1$ となる領域が決定される．このようにして，単位球はこれら二つの赤道面によって，積 ab の符号が交互する四つの領域に分割される．隣合った領域は，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ のなす角度を θ として θ と $\pi - \theta$ に比例した面積をもっているから，もし $\mathbf{J}_1$ が一様に分布していれば次の**古典相関**

$$\langle ab\rangle = [\theta - (\pi - \theta)]/\pi = -1 + 2\theta/\pi \tag{6.21}$$

が得られる．

量子力学の場合に戻ろう．ボームの模型 *5 のように，互いに十分離れた一重項状態にある二つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考えよう．このとき観測者は，二つの粒子に対するパウリのスピン行列を $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ として，オブザーバブル $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1$ と $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$ を測定する．ここで単位ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ は観測者によって勝手に選ばれる．前と同様，その結果を a

および b とよぶことにすると，そのとりうる値は ± 1 である．量子力学によれば，その平均値は $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$，相関は

$$\langle ab \rangle = \psi^\dagger \, (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \, (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \, \psi \tag{6.22}$$

と予言されている．一重項状態では $\boldsymbol{\sigma}_2 \psi = -\boldsymbol{\sigma}_1 \psi$ であるから，恒等式 $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + i \, (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ を使うと

$$\langle ab \rangle = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = -\cos\theta \tag{6.23}$$

が得られる．

図 6.6 は式 (6.21) と (6.23) とを表している．両者が 0 あるいは ± 1 という自明な場合を除けば，**量子相関は**古典相関よりも**常に強い**のである．読者の中に驚いた人がいたとすれば，それは量子論は古典論よりも“不確実さ”に悩まされているという根拠のない迷信にとらわれていた証拠である．真実はその正反対である．量子現象は古典現象よりも統制がとれているのだ．私たちはこのことを再び 11 章でしらべるが，そこでは量子カオスが古典カオスよりもずっと抑制的であることに気づく．

ベルの定理

ベルの定理は量子論に特有な性質ではない．それは二値変数 (その値を勝手に 1 と −1 とよぶことにする) をもった任意の物理系に適用されるものである．そこには離れた二人の観測者が関与し，その証明はちょうど EPR 論文 *1 のときと同じような反実証論的議論によって行われる．しかし，EPR が量子論の一つの性質 (それが彼らにとって不満足であったのだが) を単に指摘しただけであったのに対して，ベルは**任意の**局所理論に対して現実的な解釈ができるための**定量的基準**を導いたのである．

以下に紹介する代数論的な初等的証明には偏極光子対が関与する，というのもこれが実験的確認に最も適した例だからである．しかしその結果は，相関をもったスピン

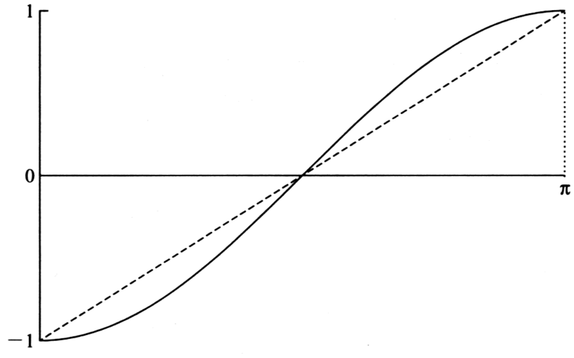


図 6.6　角度 θ の関数としてみたスピン対に対する量子相関 (実線) と古典相関 (破線)．

対，あるいは実のところ，古典系であろうと量子系であろうと相関をもった任意の系に等しく適用可能である．

SPS カスケードで反対方向に放出される光子対を考え，空間的に離れた 2 人の観測者がこれらの光子の偏極状態を検証するとしよう．第一の観測者は，彼の偏極分析器の方向として，勝手に選んだ軸から α と γ という角度をもった二つの異なった方向を**選択**することができる．そして実験すれば，それぞれの方向に対して二つの可能な(そして予言不可能な) 結果がもたらされる．私たちがしらべたいのは次のような仮定である．つまり，その性格は未知であるにしても，第一の観測者の装置と光子だけに関連する**局所的な**隠れた変数が実際の実験結果を因果的に決定しているのではないか? 仮に彼が α という角度を選んだ場合の結果を a とよぶことにすると，その可能な値は ± 1 である．測定されたオブザーバブルは式 (6.15) で σ_α とよばれたものである．同様に，角度 γ が選ばれた場合，彼が測定しているは σ_γ であり，その測定結果 $c = \pm 1$ は**同じ**隠れた変数によって決定されている．

アインシュタインの局所性は，これらの出力結果が遠く離れたものによって制御されるようなパラメーターには依存しえないことを主張している．特にこの場合，これらの結果は**第二の**観測者の用いる偏極分析器の方向には依存しないはずである．彼女もまた二つの方向，β あるいは γ (第一の観測者と同じ γ を選んでもよい) を選択することができる．彼女の結果は，おのおの $b = \pm 1$ あるいは $c = \pm 1$ であり，彼女の装置と光子でもって決定されているはずである*9．

もし双方の観測者が同じ方向 γ を選んだとしたら，すでに御存知のように，同じ結果 c を見いだすことだろう．いずれの場合にしても，これらの結果 a, b, c は恒等的に

$$a\,(b-c) \equiv \pm(1-bc) \tag{6.24}$$

を満たす．もし $b=c$ ならば両辺は 0 となるし，$b \neq c$ ならば ± 2 となって両辺は等しくなるからである．式 (6.24) に現れている様々な数学記号は三つの検証に関連しているが，このうち**任意の**二つ，しかも二つ**だけ**が実際に実行可能であることに注意すべきである．三つの検証のうち少なくとも一つは反実証論的である．

さて，次々にやって来る多数の光子対に対して，上のような同じ比較実験を何度も繰り返したとしよう．すると，j 番目の光子対に対する三つの結果は (実際に行われたかどうかにかかわらず)，前式と同様

$$a_j\, b_j - a_j\, c_j \equiv \pm(1 - b_j\, c_j) \tag{6.25}$$

を満たすことになる．隠れた変数は，私たちには制御不能なのだから，明らかにおのおのの j で異なっているはずである．こうして一連の番号 j は，未知の隠れた変数値に対する省略記号と理解できる．特に，これらの隠れた変数に関しての平均をとることは，j に関しての平均をとることと同じであるから

$$|\langle ab\rangle - \langle ac\rangle| \leq 1 - \langle bc\rangle \tag{6.26}$$

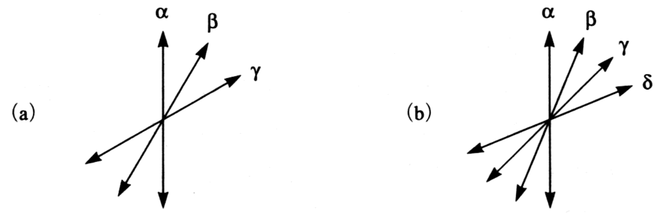


図 6.7　(a) ベルの不等式 (6.26) に対して，そして (b) CHSH 不等式 (6.30) に対して最大の破れをもたらす偏極方向.

となる．ここで $\langle ab\rangle$ はすべての積 $a_j b_j$ の和を光子対の数で割ったものである．すなわち，$\langle ab\rangle$ は実験結果 a と b との**相関**である．式 (6.26) がベルの不等式である．(図 6.4 に示すような負の完全相関をもった光子対に対して，不等式の右辺は $1+\langle bc\rangle$ となる*14.)

さてここからが議論の山場である．量子論は個々の数値 a_j, b_j, c_j を予想はできないが，その**平均値**，特に式 (6.26) に現れるような**相関**を予言することは得意である．さらに，これらの相関は，**理論とは何ら関係なく，実験的に測定もできる**のである．偏極光子の場合の相関は式 (6.17) で具体的に与えられるから，ベルの不等式 (6.26) は

$$|\cos 2(\alpha-\beta)-\cos 2(\alpha-\gamma)|+\cos 2(\beta-\gamma)\leq 1 \tag{6.27}$$

となる．たとえば，もし三つの角度 α, β, γ が図 6.7(a) に示すように 30° ずつ分離していたとすると，三つの余弦関数はおのおの $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ となり，式 (6.27) の左辺は $\frac{3}{2}$ となる．したがって，**量子論においてベルの不等式は破れている**(以下で議論するように，この破れは実験的にも確かめられている) のである．こうして皮肉にもベルの定理は，実験ではそうならないという事実から，“最も深遠な科学的発見”*16 とよばれることになった．

より一般的な不等式

上の議論では，双方の観測者に対して方向 γ は共通であった．より一般的には，第二の観測者の測定で，第一の観測者の検証方向 α あるいは γ とはいずれも異なる二つの方向，β，δ，が考えられる．δ 方向の検証が実行された場合の結果は $d=\pm 1$ である．すると，$a+c=0$ で $a-c=\pm 2$ となるか，あるいは $a-c=0$ で $a+c=\pm 2$ となるかのいずれかだから，恒等的に

$$(a+c)\,b+(a-c)\,d\equiv\pm 2 \tag{6.28}$$

となることがわかる．もし多数の光子対に対して検証が行われたとすると，j 番目の光子対に対して

$$a_j\,b_j+b_j\,c_j+c_j\,d_j-d_j\,a_j\equiv\pm 2 \tag{6.29}$$

となるから，平均では

$$|\langle ab\rangle + \langle bc\rangle + \langle cd\rangle - \langle da\rangle| \le 2 \tag{6.30}$$

となる．この結果は CHSH 不等式[18]とよばれている．ベルの不等式 (6.26) と同じく，この式も任意の二値変数の組に対して有効である．この式は，離れた事象間の相関に対して，局所因果性の原理から許される上限を与えている．特別な相関 (6.17) をもった光子の場合，この不等式は

$$|\cos 2(\alpha-\beta) + \cos 2(\beta-\gamma) + \cos 2(\gamma-\delta) - \cos 2(\delta-\alpha)| \le 2 \tag{6.31}$$

となる．たとえば，もし図 6.7(b) に示すように，これらの方向が角度 22.5° ずつ異なっていたとすると最初の三つの余弦関数は $1/\sqrt{2}$，4 番目の余弦関数は $-1/\sqrt{2}$ となる．したがって，式 (6.31) の左辺は $2\sqrt{2}$ となり，これは明らかに 2 よりも大きくなるから，再び矛盾にぶつかってしまった．恒等式 (6.30) に対する物理的解釈には何らかの誤りがあったに違いない．

この定理自身が間違っていないことはもちろんである．これは式 (6.29) にもとづいているが，この式の正しいことは自明である．困難はこの恒等式の背後にある概念的前提である．その物理的解釈は疑わしく，また論理的に微妙な点を含んでいる．これに関しては次の章で議論する．

演習問題 6.9 式 (6.21) に示されたような線形相関則 $1-2\theta/\pi$ は，ベルの不等式 (6.26) も CHSH 不等式 (6.30) もともに満足することを示せ．

演習問題 6.10 ベルの不等式 (6.26) は CHSH 不等式 (6.30) の特別な場合であることを示せ．

演習問題 6.11 ベルの不等式 (6.26) を最大に破るのは，偏極光子の場合，図 6.7 に示すように三つの角度が 30° となる場合に起こることを示せ．同じく，CHSH 不等式 (6.30) を最大限破るのは三つの角度が 22.5° となる場合であることを示せ．

実験結果

物理学は実験科学であり，式 (6.26) や (6.30) に見られるような予言は実験室で検証されなければならない．このことは，相関をもった光子に対しては，原子の状態と電磁相互作用に対する対称性から導かれた式 (6.12) の波動関数 ψ_+ が予言する余弦関数型相関 (6.17) の検証を意味している．フェルミオンの場合の相関は図 6.6 に示した余弦関数 (6.23) であり，これを検証しなければならない．これらは難しい実験であり，その解釈は複雑である．というのも現実世界では，角度に対する有限の広がりと有限の測定効率を考慮しなければならないからである[19]．

---

[18] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969) 880.
[19] J. F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* 41 (1978) 1881.

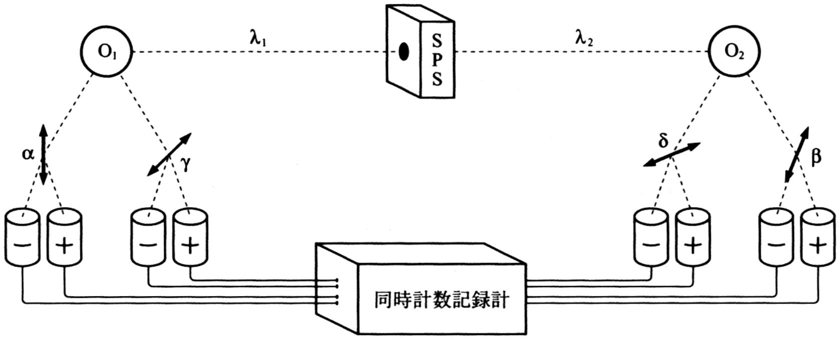


図 6.8　アスペの実験．SPS カスケードによって放出される光子対．これらの光子は光学スイッチ O_1 と O_2 によって，太い矢印で示された四つの偏極分析器にランダムに送り込まれる．各偏極分析器は図 6.7(b) に示された一つの方向の直線偏光を検証する．測定器の出力が一致しているかどうかをチェックすることで相関の有無がわかる．

図 6.3 に示すような，固定された (あるいはゆっくりと移動する) 測定器を用いた静的な検証ではベルの定理の前提のすべてを完全に取り込んだことになっていない．後者には互いに隔絶された二人の観測者が関与しており，彼らはそれぞれ相互には相いれない選択肢の中から好きな方向の実験を選ぶことができる．もちろん，これらの観測者が人間である必要もない．**ランダム**にそして互いに独立に機能する自動装置でさえあれば，自由意志をもった仮想的な観測者と同様，効率的に機能するのである．

図 6.8 にはこれらの条件を模した実験[*20]を示した．SPS カスケードで励起されたカルシウム原子から放出される光子の波長は $\lambda_1 = 422.7\,\mathrm{nm}$ と $\lambda_2 = 551.3\,\mathrm{nm}$ である．(したがってこれらの光子は，非線形結晶でのパラメトリックダウンコンバーターを利用した最近の実験状況[*21,*22]とは異なり，識別可能である.) コリメーター (図には示されていない) を通過した各光子は音響光学スイッチに衝突し，二つの偏極分析器のうちのいずれかの方向に “ランダム” に振り分けられる．二つのスイッチは急速に運動するミラーのように作用するが，もちろん本当にランダムであるわけではなく，むしろ準周期的である．これらのスイッチは異なった周波数の異なった発振器によって動作しており，それらが互いに相関をもたずに機能しているとするのはもっともらしい．両者の距離は 12 m であり，これは信号転送時間 40 ns に対応する．この時間は平均スイッチ開閉時間 (約 10 ns)，あるいはカルシウム原子の中間状態の平均寿命 (5 ns) に比べてずっと長い．したがって，ベル [*14] が “決定的” であると考えた特徴，すなわち「粒子の飛行している間に実験の設定状況を変更できる」状況が備わっている．

アスペの実験をこのように図式的に説明したが，完成させるまでに 6 年間もかかったこの技術的**大作**をこれでもって完全に描写しきっているわけではない．ある一つの物理過程が，これまでの実験で行われていたような**時間的に**分離された行為者ではなく，**空間的に**離れた独立な二つの行為者によって制御されたのは，科学史においてこ

[*20] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1804.
[*21] Y. H. Shih and C. O. Alley, *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 2921.
[*22] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2495.

れが最初であった．その結果は量子力学の予言 (6.17) と完全に一致していた．CHSH 不等式 (6.30) の破れは標準偏差の 5 倍にも達していたのである．

6.4 いくつかの基本的課題

さて，実験事実と矛盾する結論を導くことになった**恒等式**(6.29) はどこが間違っていたのだろうか? そこに反実証論的推論がかかわっていることは間違いない．同時に四つの数 a_j, b_j, c_j, d_j を知ることはできないのである．第一の観測者が測定できるのは a_j あるいは c_j であって，両者を同時には測れない．第二の観測者にとっては b_j あるいは d_j のいずれかである．したがって式 (6.29) には，いかなる実際の実験データとも対応しない数が少なくとも二つ含まれており，実験的に検証することは不可能である．

しかし通常は，方程式に現れる数がすべて実際の量に対応することは要求されないものである．古典物理においてさえ，そのような反例 (ベクトルポテンシャル A_μ とハミルトン–ヤコビ関数 S は二つのよく知られた例) には事欠かない．さらに，反実証論的推論はそれ自体が違法というわけではない．それを是認したのは EPR に応えたボーア*2 であった．これは，レストランでメニューをじっくり考えるさい，あるいは旅行代理店で飛行計画を練るさいには，表面上何ら不都合なく，日々実行されているのである．今の場合 (相関をもった光子対の場合) には，表 6.1 に示すような，実際に実行された実験結果と実験によって得られるであろう仮想的な実験結果の双方を含んだ一覧表を常に想起できる．この表では最後の 2 行の空白を埋める情報が欠けているが，欠けているデータ c_j と d_j の可能性としては 2^{2N} 通りしかない．つまり，私たちに想起できるのは 2^{2N} 通りの異なった一覧表だけである．ポイントは，それらのなかで相関が余弦関数 (6.17) となるものは**一つもない**ということである．(実験でも確認された) この相関は**強すぎて**表 6.1 とは相いれないのである．

なぜ強すぎる相関では c_j と d_j に矛盾なく数値を割り当てられないのか考えてみよう．図 6.7(b) に示したように，CHSH 不等式 (6.30) の実験的破れを最大とする角度を選ぼう．すると，b_j は $\sin^2(\pi/8) \simeq 1/7$ だけ対応する a_j と一致しないだろう．同様に，未知の c_j は b_j と 1/7 だけ，そして d_j は 1/7 だけ対応する c_j と異なっているだろう．こうして，もし上の検証で出力結果が一致しないすべての j を捨て去っても，d_j のうちの少なくとも $1 - 3\sin^2(\pi/8) \simeq 4/7$ は，対応する a_j と一致する部分が確

表 6.1 N 回の量子検証に対する実際のおよび仮想的出力結果

検証は		1	2	3	4	5	6	$\cdots$	N
実際に	a_j	+	+	−	+	−	−	$\cdots$	+
実行された	b_j	+	−	−	+	−	−	$\cdots$	+
単に想像されただけで	c_j	?	?	?	?	?	?	$\cdots$	?
実行されていない	d_j	?	?	?	?	?	?	$\cdots$	?

保されている．これに対して，式 (6.17) によって a_j と d_j とが一致すると予言されている確率は $\cos^2(3\pi/8) \simeq 1/7$ だけである．したがって，表 6.1 の列のうち少なくとも 3/7 (より正確には $\sqrt{2}-1 \simeq 0.4142$) は矛盾なく埋めることができない．この結論は，**行っていない実験に結果はない**[*17] と簡潔に表現することができる．

演習問題 6.12　もとのベルの不等式 (6.26) に対して同様の表を構成せよ．図 6.7(a) に示された方向の偏極が検証された場合，矛盾なく埋めることのできない列の割合はどのくらいか?

解答：1/4.

演習問題 6.13　表 6.1 のような表は，もっと弱い相関 $1-2\theta/\pi$ (これは CHSH 不等式を満足している) とは矛盾しないことを示せ．

表 6.1 に見られる 41% もの不一致は小さな効果ではなく，よく検討してみなければならない．そこでこの問題に関する意見のやりとりを紹介しよう[*23]．

サルヴィアティ:　これらの測定のとき，二人の観測者はお互いに気づいていない．実際，彼らは空間的に離れていて，情報のやりとりをする可能性はないさ．だから，EPR が仮定したように，一方の観測者の作用は，もう一方の観測者の行う実験結果に影響を及ぼさないとするのは理にかなっている．たとえば，第一の観測者が得た $a=1$ という結果は，第二の観測者が光子の β 方向の，あるいは δ 方向の偏極を測るか (あるいは測ったか，もしくは測ることになるか) ということには無関係のはずだ．

シンプリチオ:　当然さ．

サグレド:　君の言ったことが意味をもつのは，予言できない無秩序に見えるような事象でさえ，すべて因果的に決まっていると君が仮定した場合だけだよ．そうでなければ，互いに両立しない異なる外的条件の下で第一の観測者が得る結果の意味ある比較はできない．僕は，このような決定論的取組にはずいぶん危惧を抱いている．というのは，観測者自身もまた，様々な実験の中からどれを選ぶかという**自由な選択**が可能だと君が仮定しているからだ．観測者だって物理系じゃないか? そして，当然決定論的法則に従うはずじゃないか? この明白な矛盾を君がどう解決するのか見せてもらいたいね．

サルヴィアティ:　頼むから，僕の証明に難癖をつけないでくれ．ベルの議論で重要な点は，**個々の**結果は予言不可能であっても，それらの**相関**は平均値であって，量子論で計算することも，あるいは，**理論とは無関係に単に実験で測定できる**ことだ．ここで驚くべきことに，物理系を不等式 (6.30) が破れるように，つまり**恒等式**(6.29) が成立しないようにできるんだ．

シンプリチオ:　正しくない**恒等式**なんてあるのかい?

サルヴィアティ:　もちろん不可能だ．だから，この議論にはどこかに不備な点があったはずだ．誤っていたのは，観測者に実験の自由な選択権 (つまり，各粒子対に対し

[*23] A. Peres, *Found. Phys.* 14 (1984) 1131.

て，四つの実験の設定のうち一つだけが物理法則と適合し，その他は私たちの知らない理由のため両立しない) があると仮定したことか，**あるいは**，各光子は他の光子を乱すことなく観測できると仮定したことか，**どちらか**だ．選んでくれ．

シンプリチオ: どちらも気に入らないよ．僕は古典力学のほうが好きさ[*24]．

サルヴィアティ: もう一度言うけど，この困難は量子論の欠点じゃない．ここに関与しているのは実験事実だけさ[*20]．だから，パラドックスは実際あるのさ．

サグレド: パラドックスが生じるのは，単に君がこの物理系に分離された二つの光子という記述を**強制している**からだよ．そんな光子は君だけの想像だ．実際に用意できるのは，スピン 0 状態の光子対だけだ．**その対は，分離不可能な一つの非局所的対象なんだ**．さて，パラドックスがお好みならば，もっとずっとお手軽にもう一つご覧に入れることができるさ．アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンに頼る必要はないし，**二つの**光子も必要ない．**1 個の**光子を用いた標準的な二重スリット実験でいいさ．君はこう尋ねればいい．一方のスリットを通過した半分の光子は，いったいどうやって，もう半分の光子が通り抜けた他方のスリットの位置と形状を知り，干渉できるのかってね．

シンプリチオ: この質問は意味がない！半分の光子なんてないよ．光子は分離不可能な一つの非局所的物体だ．だからこそ十分に分離された二つのスリットを通過することができ，自分自身と干渉することができるのさ．

サルヴィアティ: 1 個の光子を二つの異なるレーザーからつくり出すことさえできる[*25]．僕らは非局所的な光子，電子などにずっと親しんできている．

サグレド: そして，それでもなお，EPR パラドックスにおいては，光子対のうちの (ここにある) 最初の半分が，(あそこの) 残りの半分と相互作用している装置によってどのような影響を受けるのかと聞いても，君には何の道徳的呵責もない．量子論によって各粒子はその古典的属性を剥がされてしまっている (確定した位置も運動量も，そしてスピン成分ももっていない) ということを理解しても，君は依然として，そこには独立な実体としてきちんと定義された “存在” が保持されていると信じているんだ．

サルヴィアティ: とすると，パラドックスはないのかい?

サグレド: 僕にとって唯一逆説的であると思われるのは，各瞬間に**あたかも**十分よく定義された位置と運動量をもった二つの異なる粒子が存在しているかのように，**ほとんど**すべてのことが起こっているということなんだ．しかし分離不可能な絡み合いになっているのはそれらの偏極状態だけだ．こういう訳で，君が何の道徳的呵責を感じなくてもよく，また EPR も許される．でも，パラドックスはない．

[*24] G. Galileo, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, Intorno à Due Nuove Scienze*, Elsevier, Leiden (1638).
[*25] R. L. Pfleegor and L. Mandel, *Phys. Rev.* 159 (1967) 1084.

非局所性と自由意志

サグレドは，冒頭で述べたように決定論的世界であるにもかかわらず，2 人の観測者に自由意志が当然のように与えられている事実に懸念をもっていた．そして対話の終りで，彼はアインシュタインの局所性の放棄を選択したが，自由意志の謎は未解決のものとして残したのであった．以下で見るように，これら二つの問題は密接に絡み合っている．

非局所性が何をもたらすかしらべてみよう．いま，第一の観測者によって得られる出力 a_j は，第二の観測者が光子に対してどの方向，つまり β 方向かそれとも δ 方向の偏極測定を選択するかに依存していると仮定しよう．より詳細な記号，$a_{j(\beta)}$ と $a_{j(\delta)}$，を使うことでこの二つの場合を区別しよう．もしアインシュタインの局所性が成り立たないのであれば，これら二つの数値は必ずしも等しくない．このとき，式 (6.29) の左辺は

$$a_{j(\beta)}\, b_{j(\alpha)} + b_{j(\gamma)}\, c_{j(\beta)} + c_{j(\delta)}\, d_{j(\gamma)} - d_{j(\alpha)}\, a_{j(\delta)} \tag{6.32}$$

となって 0 か ±2，あるいは ±4 となる．CHSH 不等式 (6.31) の右辺は 4 となるから，実験事実とは何の矛盾もないことになる．

しかし，ここには破滅的結末をもたらしかねない，新しい問題が存在しているかのように見える．測定は瞬時で (つまり，非常に短い時間で) あると仮定すれば，これらの非局所的効果を利用して離れた観測者に情報を瞬時に伝達できるのではないか? たとえば，第二の観測者は第一の観測者の用いた装置の方向がわかるのではないか? もしこんなことが可能であったとしたら，それこそアインシュタインの相対性理論の危機である．今の場合にはそのような危険はない．というのも，互いに連絡を取り合って結果を比較しない限り観測者達が見るのは + と − から成る不規則列だけであって，何の情報ももたらされていないからである．

演習問題 6.14　式 (6.12) の ψ_+ が相関をもった光子対の状態を表し，これに対応する密度行列を $\rho = \psi_+\psi_+^\dagger$ としよう．一方の光子の偏極状態に関しての部分トレースをとると，他方の光子は縮約された密度行列 $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ で記述されること，そしてこれは偏極状態のランダム混合に対応していることを示せ．

演習問題 6.15　もし，仮定 K (75 ページ) に反して，直交した直線偏光から成るランダム混合と，反対方向の円偏光から成る無秩序混合とを実験的に区別できるとすれば，EPR 相関を使うことによって，いくらでも遠く離れた観測者間で情報を (この距離間でこれらの EPR 相関が保持されている限り) 瞬時に伝達できることを示せ．

もっと精巧に相関をもった量子系を用意すれば，情報を瞬間的に伝達できるのではないかという疑問は依然として残るかもしれない．量子論それ自身は，相対論的不変性を課すものでも排除するものでもない．量子論は，もし力学法則が相対論的不変であれば (8 章を参照)，情報を担った粒子が (巨視的な射出器と測定器それ自身がある程

度局在している限り[*26])巨視的な距離を光速よりも早く伝わらないことを保証しているだけである．したがって，相対論的量子論の(唯一の予言であるところの)**統計的**予言のすべてはアインシュタインの局所性を必然的に満足しているのである[*27]．

これに対して，**個々の**事象を予言することになる隠れた変数の理論は，特殊相対性の規範を破らざるをえない．原因と結果の間に共変的区別は何もないのである．しかし，非局所的で非共変的な隠れた変数理論が，隠れた変数に関する平均を取った後では局所的かつ共変的結果のみが残るような具合に仕組まれていると考えられないこともない．これらの平均値が相対論的量子論の予言と一致するならば，実際そうなっていなければならない．

決定論的な隠れた変数が量子論の統計的性格を基礎づけているという仮定に，受け入れ難い点はまったくない．ボルツマンが原子の存在を仮定して古典統計力学をつくり上げたのは，個々の原子が(操作できるどころか)観測できるようになるはるか以前のことであった．彼の仕事は，原子の存在を認めず，すべての物理科学を巨視的エルギーだけを考慮して基礎づけようとした"エネルギー"学派(energeticists)から攻撃された．ボルツマンの仕事を完全に証明することになったのは，新しい実験技術による後年の発見だった．

同様に，将来の発見によっていつの日か，量子論を基礎づけているとされるこれらの仮想的な隠れた変数が記述する量子論の下のレベルまで到達可能になるのではないかと考えることもできよう．ベルの定理がSF(サイエンスフィクション)を凌駕しているのはこの点なのである．完全に決定論的な理論(そこでは必然的に非局所的にならざるをえない)では，**離れた世界が深くそしてあたかも申し合わせたごとく絡み合っており，私たちの一見自由な意志もそれらと絡み合っていることになってしまう**[*28]．(理論に"自由意志"を入れることに抵抗があるなら，観測者を，不規則で相関のないふるまいをするロボットで置き換えておけばよい．空の異なった方角を向き，あらかじめ決められた時間間隔に奇数個あるいは偶数個の光子が到達かしたかどうかを計測している，二つの望遠鏡を考えてみよ.)したがって，アインシュタインの局所性を，根本的に予言不可能な**個々の**現象に対しては捨て去り，予言可能で因果的に制御可能な量子論的**平均**に対して維持するというのが穏当な妥協である．

しかし，このような態度を認めたとすると，"自由意志"の存在に関する疑問が再燃する．なぜ1組の観測者は，不可分で非局所的な一つの要素になりえないのだろうか?一つの共同実験に協力して当たることに同意していたのだから，彼らの過去の履歴は間違いなく相関をもっている．これと似ていてもっと簡単な場合として，図6.2に示したような二つの光子の履歴が相関をもっている場合を考えてみよう．一方の記録にある情報を無視すれば，二つの記録は，いずれも"不規則"のように(各装置が"自由意志"をもっているように)見える．光子対は不可分で非局所的な一つの物体であるか

[*26] A. Peres, *Ann. Phys. (NY)* 37 (1966) 179.

[*27] より一般には，情報伝達には利用不可能な**弱い非局所性**と利用可能な**強い非局所性**を定義することができる．たとえば，量子相関は弱い意味で非局所的であり，剛体の運動法則は強い意味で非局所的である．

[*28] J. S. Bell, *J. Physique* 42 (1981) C2-41.

ら，この情報は決定的な意味をもっている．もし相関を無視すれば，出力結果は**いずれも**不規則に見えるのである．同様に，人間も個別に考え，他人や他の物体との過去の交わりを無視するならば，不規則にふるまい“自由意志”をもっているように見える[*29]のである．

一見自由な私たちの意志も未知の相関によって制限を受けるのだろうか? 同種の疑問は，不規則性を完全には取り去ることのできない (つまり最初のデータ列から第二のデータ列は予言可能であっても，最初のデータ列は予言できない) 図 6.2 の実験にも当てはまる．残された不規則性もさらなる相関を見つければ減らせるのだろうか? このためには SPS カスケードを放出した原子の履歴をたどる必要があるだろう．もしカスケードがコヒーレントな過程で生成されたのであれば，これらの光子対を他の観測可能な現象と相関付けることは可能かもしれない．これに対して，もし励起過程が熱的であったとすれば，これ以上の相関は**実際上**失われてしまっている．人間のようなきわめて複雑な系に目を向ければ，それらの間の如何なる EPR 相関も無数の不可逆過程によって圧倒されてしまっていることは明白である．その結果，**各人**のふるまいは，あたかも自由意志を授けられたかのように，予言不可能となる．私たちがあなたや私のような人間について語るとき，“各人”という表現を**使える**のはこのためである．

私たちにはすべてを知ることはできないので，物理学者としての日常的な仕事においても**不完全な**情報のみを使わざるをえない．物理学で用いられている方法とは次のようなものである．私たちは世界を三つの部分，すなわち，研究対象**系**，**観測者** (あるいは観測装置)，そしてこれら二つの部分からは影響を受けないと見なされている**残りの世界** (つまり，世界の大部分!) に分けている．さらに，見ている系が十分小さいとするとき，それが検証された際の観測者に起因する効果を除けば，他のすべてのものから完全に隔離可能[*30]であると仮定する．こうすることで，事態は単純に**見える**ようになる．物理学に厳密科学の霊気 (オーラ) を与えているのがこの方法である．たとえば，私たちは水素原子の性質を何桁までも計算することができるが，これは，これらの計算をするとき，私たちの概念的世界には 1 個の水素原子を除けば何も存在しないからである．

私たちは世界があたかも独立な部分に細分できるかのように考えているが，これは幻想である．世界全体は相互に依存しているのであり，ベルの不等式の破れの実験で私たちが目にしているのはこのことである．しかし，私たちにはこれ以外に方法がないのである．私たちが常に直面している実際上の疑問とは次のようなものである．有限量の情報が与えられたとして，私たちに用意できる曖昧さが残った実験で，可能な出力結果とはいかなるものか? 問題の性格からして，この答は必然的に確率的にならざるをえない．

[*29] A. Peres, *Found. Phys.* 16 (1986) 573.

[*30] もう少し正確には，微視系は，残りの世界に起因するいかなる**未知の**影響からも隔離可能であるということである．このような系も，外部磁場のように**完全に制御された**環境と相互作用するかもしれないが，そのような場合は系のハミルトニアンの既知の項として取り扱われる．

量子論は普遍的に正しいのか?

ベルの定理の証明は，観測される系が (観測者はそうではないが) 決定論的であることを要求している．観測者が決定論の法則から逃れる特権を享受する場合でも，やはり論理的に矛盾のない枠組は存在するが，それは普遍的な枠組ではない．(アナロジーの例として，天体力学は決定論的であり，惑星や小惑星の位置に対する私たちの測定能力に何の制限もつけないが，望遠鏡や写真乾板の機能を説明しないし，そのように意図されたものでもない[*31].)

その一方で私たちは，私たちの装置が原子からできており，その巨視的ふるまいは基本的構成要素のふるまいに還元できるものと信じている．量子論には，3 個の原子に適用可能で 10^{23} 個の原子には適用不可能であるとする理由は何もない．この点に関してはふつう次のように議論される．観測者 (あるいは測定装置) はきわめて巨大であって，それゆえに残りの世界に起因する制御不能で未知の影響から隔離することは不可能であるから，分子のような微視的な物理対象とは本質的に異なる．それは**開放系**である．しかし理想的量子論の世界と現実の実在との精神的境界は，ちょうど可逆的微視系と不可逆的巨視系の境界のごとく，恣意的でありファジーである．この問題は，本書の最後でもう一度ふれることにしよう．

量子論は，たとえ普遍的であったとしても，**閉じている**わけではない．そこでは，**対象物理**(endophysical) 系 (理論で記述される系) と，理論の適用領域の外側にある**外部物理**(exophysical) 系 (たとえば，天体力学の法則を確認するために天文学者が使う望遠鏡と写真乾板) とを区別しなければならない．量子論は原理的には**いかなるものでも**記述できるが，**あらゆるものすべて**を一つの量子論的記述に含ませることはできない．どんな物理的状況でも，分析されないまま残されるべき**何か**が存在する．これは量子論の欠点ではなく，自らの検証方法を記述している自己参照的な理論での論理的必然性である[*31]．この状況はゲーデルの非決定性理論[*32]を思い起こさせる．公理系の首尾一貫性は，理論の形式的規則では証明することも否定することもできない数学的命題が存在するから立証できない．しかし，それにもかかわらず数学的推論から確かめられる可能性はある．

結局，非局所性から逃れることはできないのである．ベルの不等式の破れが実験で確認された以上，残されているのは二つの論理的可能性だけである．(相関をもった光子対のような) 単純な物理系には本質的に非局所的なものが存在するか，**あるいは**，互いに排他的な実験の出力結果は，たとえその**いずれの**実験も現に実現可能であるにしろ，同時にその可能性を考えることが禁止されているか，**どちらか**である．後者は (自由意志を授けられた観測者はいうに及ばず) 不規則なふるまいをする外部物理的ロボットの導入を，実際上排除している．もしこのオプションを喜んで受け入れたいというのであれば，不可分で非局所的な実体とは**全宇宙**のことである．

[*31] A. Peres and W. H. Zurek, *Am. J. Phys.* 50 (1982) 807.

[*32] K. Gödel, *Monat. Math. Phys.* 38 (1931) 173 [英訳：*On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, Basic Books, New York (1962)].

6.5 その他の量子不等式

ベルの定理は人々を唖然とさせるほどの含みをもっており，この種の理論的研究を勃発させた．その中にはとても議論する気にならないような乱暴な憶測も含まれるが，真面目に見てもベルの仕事が契機となって，この他の普遍的不等式の体系的探究が始まったのである．

チレルソンの不等式

チレルソン[*33]は，量子論が空間的に離れた事象間の相関に上限 (もちろんベルの不等式で与えられる古典的な値よりも大きな上限) を課すことになるのかどうかという疑問を提出した．

アスペの実験 (図 6.8) での演算子と似た代数関係をもつ四つの演算子 σ_α, σ_β, σ_γ, σ_δ を考えよう．これらの演算子は ${\sigma_\alpha}^2 = {\sigma_\beta}^2 = {\sigma_\gamma}^2 = {\sigma_\delta}^2 = \mathbb{1}$ と

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = [\sigma_\beta, \sigma_\gamma] = [\sigma_\gamma, \sigma_\delta] = [\sigma_\delta, \sigma_\alpha] = \mathsf{O} \tag{6.33}$$

を満足している．ここで，CHSH 不等式 (6.30) の左辺に現れる組合せと同じ構造をもつ演算子

$$\mathsf{C} = \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\gamma + \sigma_\gamma \sigma_\delta - \sigma_\delta \sigma_\alpha \tag{6.34}$$

を定義しよう．このとき恒等的に[*34]

$$\mathsf{C}^2 = 4 + [\sigma_\alpha, \sigma_\gamma]\,[\sigma_\beta, \sigma_\delta] \tag{6.35}$$

となる．86 ページの恒等式 (4.27) は任意の二つの有界演算子 A と B に対して

$$\|\,[\mathsf{A}, \mathsf{B}]\,\| \le \|\mathsf{AB}\| + \|\mathsf{BA}\| \le 2\,\|\mathsf{A}\|\,\|\mathsf{B}\| \tag{6.36}$$

を与えるから，今の場合，$\|[\sigma_\alpha, \sigma_\gamma]\| \le 2$ そして $\|[\sigma_\beta, \sigma_\delta]\| \le 2$ となる．したがって，式 (6.35) から $\|\mathsf{C}^2\| \le 8$，すなわち

$$\|\mathsf{C}\| \le 2\sqrt{2} \tag{6.37}$$

となる．これがチレルソンの不等式である．この右辺は，CHSH 不等式 (6.30) の左辺によって達成可能な上限と正確に等しい．量子論は，アスペの実験ですでに確認されたものより強い CHSH 不等式の破れは許さないである．

この問題に関しては，$[\sigma_\alpha, \sigma_\gamma]$ と $[\sigma_\beta, \sigma_\delta]$ の双方を，それぞれ固有値 λ_n，Λ_μ をもつ基底を選んで対角化することで，さらに洞察を進めることができる[*35]．この基底では

[*33] B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.* 4 (1980) 93.
[*34] L. J. Landau, *Phys. Letters A* 120 (1987) 54.
[*35] S. L. Braunstein, A. Mann, and M. Revzen, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 3259.

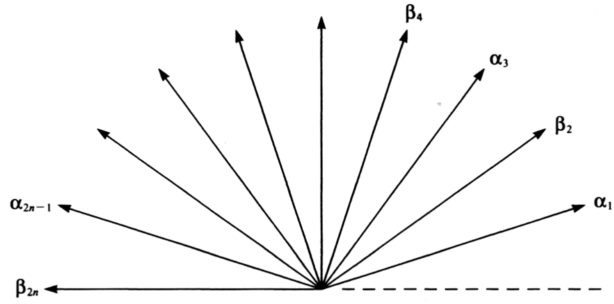


図 6.9 各観測者が測定することのできるスピンの射影方向に対する n 個の選択肢

C^2 も対角化され，その固有値は $4+\lambda_n\Lambda_\mu$ である．もしすべての λ_n(あるいはすべての Λ_μ) が 0 になったとすると，正確に $\|\mathsf{C}\|=2$ となり，CHSH 不等式 (6.30) との不一致は存在しない．少なくとも一人の観測者は両立しない検証に関与していないから，実際のところこのようなことは何も期待できないはずである．一般には 0 でない固有値 λ_n, Λ_μ が存在する．もし $\lambda_n\Lambda_\mu>0$ となるような対があれば，$\|\mathsf{C}\|=\sqrt{4+\lambda_n\Lambda_\mu}>2$ となるから，対応する固有ベクトルは CHSH 不等式を破る状態を表している．これらの破れは両方の符号で起こることを示すことができる[*35]．もし $\xi>2$ が C の固有値ならば，$-\xi$ もまた C の固有値である．

ベル不等式の連鎖

各観測者に二つ以上の実験の選択肢を与えることで一般化された CHSH 不等式が得られる[*36]．いつも通り，一重項状態にある一対のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考える．第一の観測者は $\alpha_1,\alpha_3,\cdots,\alpha_{2n-1}$ の中から，第二の観測者は $\beta_2,\beta_4,\cdots,\beta_{2n}$ の中からある一つの方向のスピン成分を測定することができる．これらの観測 (の実際の，あるいは仮想的な) 結果をそれぞれ a_r, b_s とよぶと，それらの値は ($\hbar/2$ を単位として)±1 である．このとき各粒子対に対して

$$|\,a_1b_2+b_2a_3+a_3b_4+\cdots+a_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}a_1\,|\le 2n-2 \tag{6.38}$$

となる，というのも和をとっている $2n$ 項がすべて同じ符号をもつことはありえないからである．多くの粒子対に関して平均をとれば一般化された CHSH 不等式

$$|\langle a_1b_2\rangle+\langle b_2a_3\rangle+\cdots+\langle a_{2n-1}b_{2n}\rangle-\langle b_{2n}\,a_1\rangle|\le 2n-2 \tag{6.39}$$

が得られる．

量子論はこの上限を，大きな n に対してはより大きく破っている．たとえば，$2n$ 個の観測方向が，図 6.9 に示したように $\pi/2n$ の間隔をもって選ばれたとしよう．この

[*36] S. L. Braunstein and C. M. Caves, *Ann. Phys. (NY)* 202 (1990) 22.

とき (6.39) における各相関 $\langle ab\rangle$ は $-\cos(\pi/2n)$ に等しく，これは $n\to\infty$ の極限で $-1+\pi^2/8n^2$ に近づく．したがって式 (6.39) の左辺の和はいくらでも $2n$ に近づけることができる．

より一般的な絡み合いの状態

二つの量子系の，積に分解できない**任意の**(絡み合った) 状態に対して，CHSH 不等式を破るような相関をもつオブザーバブル対は常に見いだすことができる[*37]．実際，任意の $\psi\in\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ はシュミットの二重直交和として $\psi=\sum_i c_i\,\mathsf{u}_i\otimes\mathsf{v}_i$ と書くことができる．ここで $\{\mathsf{u}_i\}$ と $\{\mathsf{v}_i\}$ はそれぞれ $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$ の直交基底である．これらの位相を適当に選べばすべての c_i を非負の実数とすることができるので，$c_1\ge c_2\ge\cdots\ge 0$ と番号づけする．ここで，0 でない c_j に対応する $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の N 次元部分空間に注目しよう．**積に分解できない状態では** $N>1$ である．

直交基底を上のように定義しておいたところで，Γ_x と Γ_z を，各ブロックがそれぞれ通常のパウリ行列 σ_x，σ_z であるようなブロック対角行列としよう．

$$\Gamma_x := \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_x & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_x & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_z := \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_z & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_z & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.40}$$

N が奇数の場合には (証明が少々面倒になるが) $(\Gamma_z)_{NN}=0$ とし，0 でない行列要素が $\Pi_{NN}=1$ だけであるような行列 Π をさらに定義する．N が偶数の場合，Π は 0 行列である．さらに数値 γ を

$$\gamma := {c_N}^2 \quad (\text{奇数の } N) \qquad \text{および} \qquad \gamma := 0 \quad (\text{偶数の } N) \tag{6.41}$$

と定義しておくと便利である．

これだけ準備しておいて，オブザーバブル

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(\alpha) &:= \Gamma_x\,\sin\alpha + \Gamma_z\,\cos\alpha + \Pi \\ \mathsf{B}(\beta) &:= \Gamma_x\,\sin\beta + \Gamma_z\,\cos\beta + \Pi \end{aligned} \tag{6.42}$$

を考えよう．$A(\alpha)$ と $B(\beta)$ の固有値 (おのおの a，b とする) は ±1 であり，これらのオブザーバブルの相関は

$$\langle ab\rangle = \langle\psi, \mathsf{A}(\alpha)\otimes\mathsf{B}(\beta)\,\psi\rangle = (1-\gamma)\cos\alpha\cos\beta + K\sin\alpha\sin\beta + \gamma \tag{6.43}$$

となる．ここで，積に分解できない状態に対しては，

$$K := 2\,(c_1\,c_2 + c_3\,c_4 + \cdots) \tag{6.44}$$

[*37] N. Gisin and A. Peres, *Phys. Letters A* 162 (1992) 15.

は常に正となる．特に，$\alpha=0,\ \alpha'=\pi/2$ かつ $\beta=-\beta'=\tan^{-1}[K/(1-\gamma)]$ と選ぶと

$$\langle ab\rangle+\langle ab'\rangle+\langle a'b\rangle-\langle a'b'\rangle=2\,[(1-\gamma)^2+K^2]^{1/2}+2\gamma \tag{6.45}$$

$$>2\,(1-\gamma)+2\gamma \tag{6.46}$$

となって，これは常に CHSH 不等式 (6.30) と矛盾することになる．

演習問題 6.16　式 (6.43) と (6.45) を確かめよ．

演習問題 6.17　$\gamma\le 1/N$ かつ $\gamma<1-K$ となることを証明せよ．

演習問題 6.18　$\mathsf{B}(\beta)$ に対する上の定義は最良のものではない．与えられた状態 ψ に対して CHSH 不等式の破れを最大にするためには，式 (6.40) における各 σ_x と σ_z に関連して，異なった角度 β_n

$$\beta_n=-\beta_n'=\tan^{-1}[2\,c_{2n-1}\,c_{2n}/({c_{2n-1}}^2+{c_{2n}}^2)] \qquad (1\le n\le N/2) \tag{6.47}$$

が存在しなければならないことを示せ．このようにして達成可能な破れの大きさを見いだせ．　★

2 粒子以上の絡み合い状態

N 個の絡み合った量子系があった場合，この絡み合いは相互に独立で離れた N 人の観測者によってしらべられるが，これらの観測者の見いだす相関は，N とともに**指数関数的**に増加する因子で古典的限界を破る可能性がある．もともと絡み合った 2 粒子に対して定式化されていた EPR ジレンマは，マーミンによって 3 粒子状態 (6.3) に対する代数的矛盾に移行されたことを思い起こそう．N 粒子状態への一般化は[*38]

$$\psi=f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\cdots,\mathbf{r}_N)\,(\mathsf{u}_1\,\mathsf{u}_2\cdots\mathsf{u}_N\;-\;\mathsf{v}_1\,\mathsf{v}_2\cdots\mathsf{v}_N) \tag{6.48}$$

となる．ここで u と v は σ_z の固有ベクトルであり，関数 $f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\cdots,\mathbf{r}_N)$ の形は N 個の粒子が十分分離されていることを保証している．この関数は正しく対称化されており，$\int|f|^2\,d\mathbf{r}_1\cdots d\mathbf{r}_N=\frac{1}{2}$ となるよう規格化されている．

N 人の観測者のそれぞれに，各粒子の σ_x あるいは σ_y の測定の可能性があり，その測定結果，m_x あるいは m_y，は ±1 をとる．したがって，2^N 種類の遂行可能な (相互には相いれない) 実験が存在する．これらの実験のすべてには，実際に実行されたかどうかにかかわらず，確定した結果が存在しており，さらに各観測者の結果は，他の観測者が何を選択したかには依存しないと仮定しよう．これが "局所実在性" という名でよばれる，有名な秘密の決定論の仮定である．さて，可能なすべての実験結果の積

$$\prod_{n=1}^{N} m_{nr}=\pm1 \tag{6.49}$$

[*38] N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 1838.

を考えてみよう．ここで m_{nr} は m_{nx} あるいは m_{ny} のいずれか（ここで添字 n は N 個の粒子とその観測者を示している）を意味している．式 (6.49) に現れる各 m_{ny} を i 倍し，それにともなって右辺を適当な i のべき乗倍しよう．こうして得られる 2^N 個の方程式を足し合わせると

$$\prod_{n=1}^{N}(m_{nx}+im_{ny})=\prod_{n=1}^{N}(\pm 1\pm i) \tag{6.50}$$

が得られる．ここで $|\pm 1 \pm i| = \sqrt{2}$ であって $|\prod(m_{nx}+im_{ny})| = 2^{N/2}$ となるから

$$\left|\mathrm{Re}\prod_{n=1}^{N}(m_{nx}+im_{ny})\right| \le 2^{N/2} \tag{6.51}$$

となる．

この古典的上限を量子力学的予言と比べてみよう．演算子

$$\mathsf{A}=\frac{1}{2}\left[\prod_{n=1}^{N}(\sigma_{nx}+i\sigma_{ny})+\prod_{n=1}^{N}(\sigma_{nx}-i\sigma_{ny})\right] \tag{6.52}$$

を定義し，

$$\begin{aligned} (\sigma_x+i\sigma_y)\,\mathsf{u}&=0 &\qquad (\sigma_x+i\sigma_y)\,\mathsf{v}&=2\mathsf{u}\\ (\sigma_x-i\sigma_y)\,\mathsf{u}&=2\mathsf{v} &\qquad (\sigma_x-i\sigma_y)\,\mathsf{v}&=0 \end{aligned} \tag{6.53}$$

を思い起こすと，絡み合いの状態 (6.48) が

$$\mathsf{A}\,\psi=-2^{N-1}\,\psi \tag{6.54}$$

を満足していることはただちに確かめられる．一方，(6.52) の積をすべて展開すると，おのおの異なる粒子に属する σ_x と σ_y の積（σ_y は偶数個）からなる 2^{N-1} 個の演算子の和が得られる．これら 2^{N-1} 個の項の固有値はいずれも ± 1 である．したがって，86 ページの式 (4.27) から，これらの 2^{N-1} 個の演算子はすべて可換である．というのも，さもなければ，その和の固有値は式 (6.54) で見いだしたほど大きくはなりえないからである．

演習問題 6.19　パウリ行列の代数関係を使って，これら 2^{N-1} 個の演算子が交換することを直接示せ．

これらの 2^{N-1} 個の演算子はいずれも，空間的に離れた N 人の観測者（各人は 1 粒子を取り扱う）の協力によって測定することができる．これらの測定の結果は式 (6.49) あるいは (6.50) のように取りまとめられる．こうして，式 (6.51) で与えられる古典論での期待値は

$$|\langle\mathsf{A}\rangle| \le 2^{N/2} \tag{6.55}$$

となる．この式が任意の $N \geq 3$ に対して量子論の予言 (6.54) と矛盾していることは紛れもない．これらの絡み合った粒子を収集している離れた観測者の数 N とともに，矛盾は**指数的に**増大することに注目せよ．

N が非常に大きい場合 (たとえば 10^{10} とか 10^{25})，式 (6.48) のベクトル ψ は**巨視的に識別可能な**二つの状態のコヒーレントな重ね合せとなる．たとえば，$|\mathsf{uuu}\cdots\rangle$ はスピンがすべて上向きの強磁性体を，$|\mathsf{vvv}\cdots\rangle$ は同じ強磁性体でスピンがすべて下向きの状態を表すかもしれない．この場合，二つの成分間の相対位相 (今の場合 $e^{i\pi}$) を調整するのはきわめて困難である．というのも，不完全にしか制御されていない環境のもとで，これらの成分のエネルギーはごくわずかだけ異なる可能性があるからである．"シュレーディンガーの猫" として知られるこれらの特異な重ね合せは，観測過程で本質的な役割を演じており，12 章で議論する．

6.6 高次スピン

通常，古典的特徴は量子数が大きな極限で出現するものと信じられている．そこで，量子論から古典論へのスムーズな移行が存在するのかどうかしらべてみよう．(今まで考えてきたようなスピン $\frac{1}{2}$ 粒子，あるいは同様な代数関係をもつ光子の偏極成分ではなく) 任意に大きなスピン j をもち，いつものように一重項状態に用意された粒子対を考えよう．

先の EPR の議論は，スピン j の粒子にも正確に当てはまる．$\mathsf{J}_{1z} + \mathsf{J}_{2z}$ の値は 0 であるから，二人の独立な観測者による J_{1z} と J_{2z} の測定は正反対の値を与えるはずである．より一般的には，私たちの興味は，二人の観測者が勝手に選んだ**非平行な**方向への J_1 と J_2 の成分の測定結果の**相関**にある．

私たちには，全角運動量が 0 の二つのスピン j 粒子を表すベクトル ψ_0 の具体形が必要となるだろう．各粒子に対しては，

$$\mathsf{J}_{1z}\,\mathsf{u}_m = m\,\mathsf{u}_m \qquad \text{および} \qquad \mathsf{J}_{2z}\,\mathsf{v}_m = m\,\mathsf{v}_m \tag{6.56}$$

となる．ここで $m = j, j-1, \cdots, -j$ であり，簡単のため $\hbar = 1$ とした．$(\mathsf{J}_{1z}+\mathsf{J}_{2z})\,\psi_0 = 0$ を満足させるため，一重項状態は $\psi_0 = \sum_m c_m\,\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_{-m}$ という形とならなければならない．これは，式 (5.31) と同じくシュミットの二重直交和である．したがって，各観測者によって別々に得ることのできるデータは，行列要素 $|c_m|^2$ をもった同一の対角的密度行列 (そのトレースは 1) によって与えられることになる．

さらに，確率 $|c_m|^2$ はすべて等しくなる．その理由は単純であり，角運度量が 0 の状態は球対称であって z 軸が特別の意味をもたないからである．他の極軸を選んだとしても，同じ要素 $|c_m|^2$ をもった同じ対角的密度行列 ρ となったことだろう．異なる軸の選択は単なる座標軸の回転に対応し，これは量子力学ではユニタリー変換 $\rho \to \mathsf{U}\rho\mathsf{U}^\dagger$ で表されるから，ρ はすべての回転行列 U と可換となる．さて，与えられた任意の j

に対して，これらの行列は既約である*39．したがって ρ は単位行列の定数倍であり，$|c_m|^2 = (2j+1)^{-1}$ となる．(u_m と v_m の位相は勝手であるから)c_m の位相のみが任意で残ることになる．

演習問題 6.20　$\langle \psi_0, (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{J}_1)\otimes(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{J}_2)\,\psi_0\rangle = -\frac{1}{3}j(j+1)\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$ を示せ．

演習問題 6.21　半整数の j と一重項状態 ψ_0 に対して式 (6.44) は $K=1$ を与え，チレルソンの定理で許される CHSH 不等式の最大の破れをもたらすことを示せ．また整数 j に対してはどうなるか?　★

演習問題 6.22　行列 J_x が実対称，J_y は純虚で反対称という標準的な選択をすると

$$\psi_0 = (2j+1)^{-1/2}\sum_{m=-j}^{j}(-1)^{j-m}\,\mathsf{u}_m\otimes\mathsf{v}_{-m} \tag{6.57}$$

となることを示せ．この結果はスピン $\frac{1}{2}$ に対して正しかった式 (5.33) の一般化となっている．

さて，一重項状態 (6.57) に準備された二つのスピン j 粒子が $\pm x$ 方向に飛び去るような実験を考えよう．(その他の方向に運動する粒子はコリメーターによって取り除かれている.) 空間的に離れた二人の観測者は，各粒子に，たとえば制御可能な磁場をもったソレノイドを通過させることによって，その運動方向まわりのトルクをかける．こうして粒子対の状態は

$$\psi = e^{-i\theta_1\mathsf{J}_{1x}}\,e^{-i\theta_2\mathsf{J}_{2x}}\,\psi_0 = e^{-i(\theta_1-\theta_2)\mathsf{J}_{1x}}\,\psi_0 \tag{6.58}$$

となる．最後の等号は，一重項状態に対して成り立つ関係式 $\mathsf{J}_{2x}\psi_0 = -\mathsf{J}_{1x}\psi_0$ にもとづいている．

各観測者は，おのおのシュテルン–ゲルラッハの実験を行って J_{1z} と J_{2z} を測定する．少なくとも原理的には，測定器をシュテルン–ゲルラッハ磁石から十分遠くに置けば，$2j+1$ 本のビームは十分よく分離され，対応する m の値を正確に知ることは可能であるから，このような実験に関与する測定器の数 (たとえば，$2j+1=10^9$ 個) に基本的制限はない．(これと等価な実験としては，粒子にはトルクをかけず，シュテルン–ゲルラッハ磁石を，すべての測定器ともども角度 θ_1 および θ_2 ずつ回転することが考えられる.)

シュテルン–ゲルラッハの実験は J_z ばかりか，67 ページの式 (3.58) で定義されるような任意関数 $f(\mathsf{J}_z) = \sum_m f(m)\,\mathsf{u}_m\mathsf{u}_m^\dagger$ をも測定していることに注目しよう．特に，シュテルン–ゲルラッハの実験は固有値 ±1 をもつ二値変数

$$\sum_{m=-j}^{j}(-1)^{(j-m)}\,\mathsf{u}_m\mathsf{u}_m^\dagger = e^{i\pi(j-\mathsf{J}_z)} \tag{6.59}$$

*39 E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, New York (1959) p. 155.

の測定にもなっている．これらの二値変数に対して二人の観測者が得る**相関**は，その積の平均で与えられる．

$$C(\theta) = \langle \psi, e^{i\pi(j-\mathsf{J}_{1z})}\, e^{i\pi(j-\mathsf{J}_{2z})}\, \psi \rangle$$
$$= e^{2\pi i j}\, \langle e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\, \psi_0,\, e^{-i\pi \mathsf{J}_{1z}}\, e^{-i\pi \mathsf{J}_{2z}}\, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\, \psi_0 \rangle \tag{6.60}$$

ただし，簡単に $\theta = \theta_1 - \theta_2$ とした．ここで $e^{-i\pi \mathsf{J}_{2z}}$ と $e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}$ は可換であること，(ψ_0 は一重項状態であるから) $e^{-i\pi \mathsf{J}_{2z}}\, \psi_0 = e^{i\pi \mathsf{J}_{1z}}\, \psi_0$ となること，そして $e^{-i\pi \mathsf{J}_z}$ は z 軸のまわりに角度 π の回転をもたらすので

$$e^{-i\pi \mathsf{J}_{1z}}\, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\, e^{i\pi \mathsf{J}_{1z}} = e^{i\theta \mathsf{J}_{1x}} \tag{6.61}$$

となることに注意せよ．こうして

$$C(\theta) = e^{2\pi i j}\, \langle \psi_0, e^{2i\theta \mathsf{J}_{1x}}\, \psi_0 \rangle = e^{2\pi i j}\, \langle \psi_0, e^{2i\theta \mathsf{J}_{1z}}\, \psi_0 \rangle \tag{6.62}$$

が得られる．最後の等号では回転不変性を用いた．式 (6.57) と合わせれば

$$C(\theta) = (2j+1)^{-1}\, e^{2\pi i j} \sum_{m=-j}^{j} (-1)^{2(j-m)}\, \langle \mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_{-m},\, e^{2i\theta m}\, \mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_{-m} \rangle$$
$$= (2j+1)^{-1}\, (-1)^{2j} \sum_{m=-j}^{j} e^{2i\theta m} \tag{6.63}$$

が得られる．この和は通常の幾何級数であるから，最終的に

$$C(\theta) = (-1)^{2j}\, \sin[(2j+1)\theta]/[(2j+1)\sin\theta] \tag{6.64}$$

が求まる．

ここでいつものように CHSH 不等式 (6.30) を適用することができる．もしパラメーターに関して，第一の観測者には θ_1 か θ_3 の，第二の観測者には θ_2 あるいは θ_4 の選択の余地があるとすると，不等式は

$$|C(\theta_1-\theta_2) + C(\theta_2-\theta_3) + C(\theta_3-\theta_4) - C(\theta_4-\theta_1)| \le 2 \tag{6.65}$$

となる．$\theta_1 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_3 = \theta_3 - \theta_4 = x/(2j+1)$ となるようにパラメーターを選んだとしよう．$j \to \infty$ のとき，式 (6.65) の左辺は定数となり，その最大値は $x = 1.054$ のときに得られて

$$\frac{3\sin x}{x} - \frac{\sin 3x}{3x} = 2.481 > 2 \tag{6.66}$$

となる．磁気双極子モーメントのほかに電気四重極子モーメントをもった粒子を使えば，より大きな破れを得ることも可能であり，チレルソンの不等式で許される最大の破れ $2\sqrt{2}$ まで到達することができる[*37]．

要約すると，装置の分解能が隣り合う m の値を区別できるほど十分高ければ，その読みは CHSH 不等式を破ることになり，したがってその古典的前提は無効である．

隣り合う m の値を識別するような測定は本質的に非古典的である，というのが結論である．いかに j が大きくなろうとも，これらの理想的測定の結果が古典的にふるまうだろうと期待することには何の根拠もない[*40]．

演習問題 6.23　上の計算を，平行でない軸のまわりにトルクがかけられた場合へ一般化せよ．　★

乱雑な環境下での観測

たったいま記述したところの理想的実験には，重大な実際的困難がともなう．これらのスピン j 粒子はたくさんの測定器にばらまかれるから，入射ビームの強度がこれと比例して増加しない限り，得られる結果は統計的重要性を失い，**雑音**にきわめて敏感となる．特に，検出効率に関しては最適化が図られなければならない．測定器は相互に独立であるから，これらによって生み出された誤った信号間には何の相関もなく，雑音は白色のスペクトルをもつことになる[*41]．このことは，離散フーリエ変換によって出力ビームを区別する変数 m から周波数相当の変数に変換すると，その雑音のパワースペクトルがすべての周波数にわたって一様となることを意味している．これは，通信工学ではよく知られた状況である．雑音減少への鍵は，スペクトルの低周波部分のみを保持するような適当なフィルタリングにある[*41]．

私たちの例において，このフィルタリングは次のように行われる．まず，雑音がなければ，一対の結果 m_1 と m_2 に対する確率振幅は，式 (6.57) と (6.58) から

$$\langle \mathsf{u}_{m_1} \otimes \mathsf{v}_{m_2}, \psi\rangle = (2j+1)^{-1/2}\,\langle \mathsf{u}_{m_1} \otimes \mathsf{v}_{m_2}, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}} \sum_m (-1)^{j-m}\,\mathsf{u}_m \otimes \mathsf{v}_{-m}\rangle$$
$$= (2j+1)^{-1/2}\,\langle \mathsf{u}_{m_1}, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\,(-1)^{j+m_2}\,\mathsf{u}_{-m_2}\rangle \tag{6.67}$$

と与えられることに注意しよう．したがって，m_1 と m_2 という結果の得られる結合確率は

$$\mathbf{P}(m_1, m_2) = (2j+1)^{-1}\,|\langle \mathsf{u}_{m_1}, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\,\mathsf{u}_{-m_2}\rangle|^2 \tag{6.68}$$

となる．m_1，m_2 から周波数相当の変数 ξ，η への離散的フーリエ変換を行えば

$$\tilde{\mathbf{P}}(\xi,\eta) = \sum_{m_1 m_2} e^{i(\xi m_1 + \eta m_2)}\,P(m_1, m_2) \tag{6.69}$$

$$= (2j+1)^{-1} \sum_{m_1 m_2} e^{i(\xi m_1 + \eta m_2)} \langle \mathsf{u}_{m_1}, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\,\mathsf{u}_{-m_2}\rangle \langle \mathsf{u}_{-m_2}, e^{i\theta \mathsf{J}_{1x}}\,\mathsf{u}_{m_1}\rangle \tag{6.70}$$

[*40] N. D. Mermin and G. M. Schwarz, *Found. Phys.* 12 (1982) 101.

[*41] J. R. Pierce, *An Introduction to Information Theory: Symbols, Signals and Noise*, Dover, New York (1980).

となる．ここで最後の内積は共役演算子の定義によるものである [式 (4.2) を参照]．式 (6.70) の二重和は

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{m_1} e^{i\xi m_1}\,\mathsf{u}_{m_1}\mathsf{u}_{m_1}^\dagger\right) e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}} \left(\sum_{m_2} e^{i\eta m_2}\,\mathsf{u}_{-m_2}\mathsf{u}_{-m_2}^\dagger\right) e^{i\theta \mathsf{J}_{1x}}\right]$$
$$= \mathrm{Tr}\left[e^{i\xi \mathsf{J}_{1z}}\, e^{-i\theta \mathsf{J}_{1x}}\, e^{-i\eta \mathsf{J}_{1z}}\, e^{i\theta \mathsf{J}_{1x}}\right] \tag{6.71}$$

と書き直すことができる．

式 (6.71) の右辺の各指数関数は回転演算子であり，したがってその積もまたある角度 $\boldsymbol{\kappa}$ の回転演算子であるから，この角度を決めればこのトレースを評価することができる．ここで決定的なことは，$\boldsymbol{\kappa}$ が各回転角 ξ, η, $\pm\theta$ の関数であってスピンの大きさ j の関数ではない (後者が影響を及ぼすのは回転行列の**次数**だけであって，その幾何学的意味は変えない) ということである．単に $j=\frac{1}{2}$ と見なせば，$\boldsymbol{\kappa}$ を計算するのに 2×2 より大きな行列を扱う必要はない．さらに，実際必要なのは $\boldsymbol{\kappa}$ の絶対値であり，回転軸の方向は必要でない．こうして，容易に

$$\cos\frac{\kappa}{2} = \cos\frac{\xi}{2}\,\cos\frac{\eta}{2} + \cos\theta\,\sin\frac{\xi}{2}\,\sin\frac{\eta}{2} \tag{6.72}$$

となることがわかる．

演習問題 6.24 式 (6.72) を確かめよ．また，この式が次のようにも書けることを示せ．

$$\sin^2\frac{\kappa}{4} = \sin^2\frac{\xi-\eta}{4} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\xi-\eta}{2} - \cos\frac{\xi+\eta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{6.73}$$

演習問題 6.25 ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ の方向 (回転軸の方向) を求めよ． ⋆

式 (6.71) のトレースは次のようにして評価することができる．トレースはヒルベルト空間における基底の選び方には依らないから，$\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{J}$ (その固有値は κj, $\kappa(j-1)$, $\cdots$, $-\kappa j$) を対角的にする基底をとるのが便利である．こうして

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{J}}) = e^{i\kappa j} + e^{i\kappa(j-1)} + \cdots + e^{-i\kappa j} \tag{6.74}$$

が得られる．これもまた，和がすぐにとれる幾何級数であるから，最終的に

$$\tilde{\mathbf{P}}(\xi,\eta) = \sin[(2j+1)\kappa/2]/[(2j+1)\sin(\kappa/2)] \tag{6.75}$$

となる．これは**厳密**な表式であり，式 (6.70) と同じ情報をもっている．特に，もし $\xi=\eta=\pi$ (すなわち，隣り合う m に対して符号を交互に選ぶ) とすると，式 (6.72) から $\kappa=2\theta$ となり，式 (6.75) の最終結果は式 (6.64) の結果と一致する[*42]．

さて，厳密な量子論的結果を台なしにしてしまう白色雑音に注目しよう．(6.75) の高周波成分 (ξ と η が 1 のオーダーの成分) は，雑音のために実験的には観測できないかもしれない．もし低周波成分のみであれば，式 (6.73) のかわりにその極値

$$\lim_{\xi,\eta\to0}\kappa^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\theta \tag{6.76}$$

[*42] 式 (6.64) の余分な因子 $(-1)^{2j}$ は，以前採用した二値変数の定義式 $(-1)^{j-m}$ に含まれた因子 $(-1)^j$ に由来している．

をとってもよい．ここで無視された項は，残された項よりも $(\xi-\eta)^2$ と $(\xi+\eta)^2\sin^2(\theta/2)$ のオーダーの因子分小さい．もしこの表式が式 (6.75) のかわりに用いられると，その結果は，全角運動量が 0 の**古典的**粒子対に対して，与えられた二つの角運動量成分を観測する結合確率のフーリエ変換に一致することを示そう．

古典的相関

一重項状態にあるスピン j 粒子対に古典的に対応しているのは，互いに反対の角運動量 $\pm\mathbf{J}$ をもつ粒子対である．より正確にいえば，一重項状態にあるスピン j 粒子対の**アンサンブル**に対応しているのは，等方的に分布した角運動量 $\pm\mathbf{J}$ をもつ古典的粒子対の**アンサンブル**である．したがってアンサンブルはいずれも球対称となる．(2.1 節での議論を思い起こせ．"量子状態" が意味するのは，同じ状態に用意された系のアンサンブルに対する統計的性質のみである.)

角運動量の大きさを

$$J=\sqrt{j\,(j+1)}\simeq j+\tfrac{1}{2} \tag{6.77}$$

と記すことにしよう．最後の近似は $j\gg 1$ に対して有効である．すると，与えられた $\mathbf{J}$ に対して，量子論的相関 (6.68) のかわりに古典的相関

$$\mathbf{P}_{\rm cl}\,(m_1\,,m_2\,;\mathbf{J})=\delta(m_1-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{J})\,\delta(m_2+\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{J}) \tag{6.78}$$

が得られ，フーリエ変換 (6.69) は

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\rm cl}\,(\xi,\eta\,;\mathbf{J})=\int_{-J}^{J}\int_{-J}^{J}e^{i(\xi m_1+\eta m_2)}\,\mathbf{P}_{\rm cl}\,(m_1\,,m_2)\,dm_1\,dm_2=e^{i\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{k}} \tag{6.79}$$

で置き換わる．ここで

$$\mathbf{k}=\xi\boldsymbol{\alpha}-\eta\boldsymbol{\beta} \tag{6.80}$$

とした．

この古典相関は $\mathbf{J}$ の可能なすべての方向に関して平均されなければならない．後者は等方的に分布しているから，$d\Omega$ を $\mathbf{J}$ 方向の無限小立体角要素として

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\rm cl}\,(\xi,\eta)=\int e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{k}}\,d\Omega/4\pi \tag{6.81}$$

となる．積分を実行するために，$\mathbf{k}$ 方向を極軸にとれば

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{k}=Jku \tag{6.82}$$

と求まる．ただし，

$$k:=|\xi\boldsymbol{\alpha}-\eta\boldsymbol{\beta}|=(\xi^2+\eta^2-2\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}\,\xi\eta)^{1/2} \tag{6.83}$$

であり，u は $\mathbf{J}$ と $\mathbf{k}$ のなす角の余弦である．$\mathbf{k}$ に関する $e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{k}}$ の回転対称性から，$d\Omega = 2\pi\, du$ ととることができ，式 (6.81) は

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{cl}}(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{iJku}\, du = (\sin Jk)/Jk \tag{6.84}$$

となる．さらに $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \cos\theta$ である (ここで θ の意味は前と同様) から，

$$k = (\xi^2 + \eta^2 - 2\,\xi\eta\,\cos\theta)^{1/2} \tag{6.85}$$

は式 (6.76) の κ の極値と完全に等しいことがわかる．こうして，大きな j と小さな k に対して，最終的に

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{cl}}(\xi,\eta) \simeq \sin[(2j+1)k/2]/[(2j+1)k/2] \tag{6.86}$$

が得られるが，これは，大きな j と小さな κ に対する式 (6.6) の量子相関 $\tilde{\mathbf{P}}(\xi,\eta)$ の極値と完全に一致している．

古典論と量子論の結果が一致するのは，装置の精度がどの位粗い場合だろうか? 私たちは，式 (6.76) の導出過程で，κ をその極値 k で近似する場合の誤差が $(\xi-\eta)^2$ と $(\xi+\eta)^2\sin^2(\theta/2)$ のオーダーであることを見てきた．式 (6.6) ではこの誤差に j が掛かる．したがって，もし $j(\xi-\eta)^2 \ll 1$ と $j(\xi+\eta)^2\sin^2(\theta/2) \ll 1$ がともに満たされるならば，$\tilde{\mathbf{P}}$ は $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{cl}}$ でよく近似されることになる．言い換えれば，雑音は，$|\xi-\eta|$ と $(\xi+\eta)\sin(\theta/2)$ がともに $j^{-1/2}$ よりも十分小さいような “周波数”ξ，η のみを検出できるようなレベルになければならない．このような高周波切断は，異なる m の値が実験的に区別可能なのは，それらが $\sqrt{j}$ よりもずっとよく分離された場合のみであるということを意味している．

この結果は直観的にも予想されたところである．量子論的相関を弱めて古典相関に近い値とするのに必要な曖昧さの最小値は，量子力学によって角運動量ベクトル成分に付与される固有の “不確定さ” よりも明らかに大きい．後者は $[\langle\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\rangle - \langle\mathbf{J}\rangle\cdot\langle\mathbf{J}\rangle]^{1/2} \geq \sqrt{j}$ である．(このことは 10.7 節で証明される.) 最小不確定性は，ある単位ベクトル $\mathbf{n}$ に対して $\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\psi = j\,\psi$ を満足するような**角運動量コヒーレント状態**によって達成される．たとえば，$\mathsf{J}_z\,\mathsf{u}_j = j\mathsf{u}_z$ によって定義された状態 u_j は

$$\langle \mathsf{J}_z\rangle = j \qquad \text{と} \qquad \langle \mathsf{J}_x\rangle = \langle \mathsf{J}_y\rangle = 0 \tag{6.87}$$

を与えるから $\langle\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\rangle - \langle\mathbf{J}\rangle\cdot\langle\mathbf{J}\rangle = j$ となる．これが量子力学と両立する最小の角度分散である．もし私たちの装置の角度分解能がこの極限値よりもずっと悪ければ，量子論的非局所性の効果を検出することはできない．

6.7 参 考 文 献

学 術 論 文

J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press (1987).

これは，未公表の論文をも含んだ，量子力学の概念的および哲学的問題に関するジョン・ベルの完全な論文集である．

L. E. Ballentine, editor, *Foundations of Quantum Mechanics Since the Bell Inequalities*, Amer. Assoc. Phys. Teachers, College Park (1988).

この本には量子力学の基礎に関する最近の論文 40 編が短いコメントともに載せられている．このうち 15 編はリプリント版がある．

N. D. Mermin, *Boojums All the Way Through: Communicating Science in a Prosaic Age*, Cambridge Univ. Press (1990)[町田　茂 訳,『マーミン相対論—新しい発想で学ぶ』(丸善，1994)].

これはデヴィッド・マーミンのエッセイ集であり，彼は皮肉を込めたユーモアを交えて複雑なアイデアをなるべく平易に紹介している．この本には，著者が現代物理学の技術用語辞典に“ブージャム”(boojum) という言葉を導入したさいに経験したわくわくするような面白い逸話をはじめ，ベルの定理の示唆する異常性が様々の方法で例示されている．

会 議 録

J. T. Cushing and E. McMullin, eds., *Philosophical Consequences of Quantum Theory: Reflections on Bell's Theorem*, Univ. of Notre Dame Press (1989).

M. Kafatos, editor, *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, Kluwer, Dordrecht (1989).

ゲーデルの定理

クルト・ゲーデルの革命的な論文*32 は数理論理の基本仮定に挑戦したものである．ゲーデルの定理の非専門的説明書としては次の 2 冊があげられる．

E. Nagel and J. R. Newman, *Gödel's Proof*, New York Univ. Press (1958).

D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, Basic Books, New York (1979)[野崎昭弘 訳,『ゲーデル，エッシャー，バッハ』，白揚社 (1985)].

後者は，一般ノンフィクション部門で 1980 年のピューリッツァー賞を受賞している．数理論理の最も抽象的な考えを，楽しい語り口で一般の読者にも理解できるようにした，というのは著者の目覚しい功績である．

G. J. Chaitin, “Gödel's theorem and information,” *Int. J. Theor. Phys.* 21 (1982) 941.

情報理論的趣をもった議論によってゲーデルの定理が例示されている．もしある定理が公理以上の情報を含んでいるとしたら，その定理はそれらの公理からは導くことができない．このことはゲーデルの定理によって発見された現象の不完全さが異常で，尋常でないというのではなく，むしろ自然であり，広く見いだされるものであるということを示唆している．

推 薦 図 書

N. Herbert, *Quantum Reality*, Anchor Press-Doubleday, New York (1985).

ヘルベルトの本はベルの発見とその意味するところをよく説明した物語である．

A. Garg and N. D. Mermin, "Bell's inequalities with a range of violation that does not diminish as the spin becomes arbitrary large," *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 901, 1294 (E).

一重項状態にあるスピン j 粒子の相関がほとんどすべての方向の測定に対してベルの不等式を破るということは，ガーグとマーミンによって最初に指摘された．しかし，彼らの見いだした破れの大きさは，ゆっくりと変化するスピン成分を利用した彼らの方法が量子論的相関の激しく変化する部分に関しては敏感でなかったため，j が大きくなるとともに指数関数的に消滅した．

W. De Baere, "Einstein-Podolsky-Rosen paradox and Bell's inequalities," *Adv. Electronics and Electron Physics*, 68 (1986) 245.

ますます不思議な最近の進展

D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, "Bell's theorem without inequalities," *Am. J. Phys.* 58 (1990) 1131.

L. Hardy, "Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states," *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 1665; "Nonlocality of a single photon revisited," *ibid.* 73 (1994) 2279.

ハーディは二つの驚くべき結果，すなわち，最大の絡み合いにない状態はより強い効果をもたらしうること，そしてアインシュタインの因果律を破るには 1 個の粒子で十分であることを導いている．

A. Peres, "Nonlocal effects in Fock space," *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 4571.

7

測定状況依存性

7.1 非局所性–測定状況依存性

前章で，積に分解できない任意の量子状態に対しては，ベルの不等式を破るような相関をもったオブザーバブル対が見いだせることを示した (176 ページを参照). このことは，そのような状態に対する量子論の統計性が，ある与えられた空間の場所で行われた実験結果は，そこから離れた場所で同時に実行可能な**その他の**実験に何を選択するかとは独立であるべしという要求 (この表面上もっともな要求が**原因局所性の原理**，または**アインシュタインの局所性**とよばれる) と相いれなくなることを意味している.

しかし実験的にベルの不等式の破れを示すことは容易ではない．予言された古典実在性からの離脱は統計的に現れるだけである．“不等式を使わない” ベルの定理の定式化でさえも，ただ一つの事象によって確かめることはできない．したがって，破れを確かめたと称する実験はいずれも，測定器が不完全なことに起因するあらゆる種類の量子論的気まぐれをこうむっている.

この章で私たちは，反実証論的論理に起因する別のクラスの “パラドックス” に遭遇する．量子力学と秘密の決定論との間のこれらの新しい矛盾はある特別な量子状態を選ぶかどうかにはよらないから，統計的推論とも無関係である．必要とされる唯一の数学的道具は演算子代数だけだが，その一方で，原因局所性の原理よりも**強い**仮定が必要となる.

縮退そして両立可能な測定

もし行列 A が縮退していなければ，A を対角的にする基底は一つだけ存在する．この基底は，行列 A によって表される物理的オブザーバブルの**測定**と等価な最大量子検証に対応している．これと反対に，A が縮退している場合には，A を対角的にする異なった基底が存在する．これらの基底は，**非等価な物理過程**に対応しているが，やはり “A の測定” とよばれている．したがって，“測定” という言葉は**曖昧**である.

二つの行列 A と B が可換の場合，両者を同時に対角的にする基底が少なくとも一つ存在する (71 ページを参照). そのような基底は最大検証に対応しており，A と B に対する一つの測定を提供する．このことから，**二つの可換な演算子は同時に測定可能**

であることがわかる．反対に，もし A と B が交換しない場合には，両者を対角的にする基底は存在せず，A と B の測定は互いに両立しない．

これらの性質を可換な多数の演算子に一般化することは容易である．可換な演算子の集合は，これらの演算子をすべて対角的とする基底が一つ存在する場合，**完全**であるとよばれる．したがって，可換な演算子の完全系の同時測定は，最大の (すなわち完全な) 量子検証によるある一つの非縮退演算子の測定と等価である．

演習問題 7.1 縮退した可換な演算子の完全系と非完全系の例をあげよ．

演習問題 7.2 ある完全系のすべての演算子と可換な演算子は，これらの演算子の関数として表すことができることを示せ． ⋆

測定状況依存性

上述した曖昧さにもかかわらず，演算子 A の測定結果は，A と (量子論の記述しない "隠れた" 性質を含め) 測定される系の客観的性質にのみ依存するものと仮定しよう．特に，もし A が他の演算子 B および C と交換し，したがって A が B とともに，あるいは C とともに測定できる場合には，A の測定結果はその**状況**，つまり A が単独に測定されたのか，あるいは A が B とともに，それとも C とともに測定されたのか，ということには依存しないことになる．

ここではこのことを，演算子 B と C が空間的に離れた物理系に関与するような "自明な" 状況に対してのみならず，両者が A と**同じ**物理系に属する場合にも仮定する．たとえば，1 個の粒子の角運動量の 2 乗 $\mathbf{J}^2 \equiv \mathsf{J}_x{}^2 + \mathsf{J}_y{}^2 + \mathsf{J}_z{}^2$ は**同じ**粒子の角運動量成分 J_x および J_y と可換であるが，J_x は J_y と交換しない．このとき $\mathbf{J}^2$ の測定は，それ独自の測定であったのか，J_x の測定と一緒になされたのか，あるいは J_y の測定とともになされたのかによらず同じ値をとる，というのがこの仮定の内容である．

測定の結果がその測定状況に依らないという仮定は明らかに反実証論的である．(実験による検証に馴染まない.) 反実証論的推論の性格とその内包するものは前章できわめて詳細に議論したので，ここではこれ以上論争しない．

実験結果の関数関係一貫性

二つの演算子 A と B が交換する場合，量子力学によれば，両者の同時測定だけでなくそれらの任意関数 $f(\mathsf{A},\mathsf{B})$ の測定が原理的に許されている．特に，もし系が $\mathsf{A}\psi = \alpha\psi$ かつ $\mathsf{B}\psi = \beta\psi$ となる状態 ψ に準備されたとすると，$f(\mathsf{A},\mathsf{B})\psi = f(\alpha,\beta)\psi$ となることは容易に示される．この関係は，A と B とが交換せず，たまたま共通の固有ベクトル ψ をもった場合であっても成立する．そこでこの結果を拡張して次のような仮定を提案したくなる．

たとえ ψ が可換な演算子 A, B そして $f(\mathsf{A},\mathsf{B})$ の固有状態でなく，またこれらの演算子が実際に測定されないとしても，(もし測定が実行されたとすれば) それらの測定結果として得られる数値は演算子と同じ関数関係を満たすと仮定してよい．

たとえば，これらの結果はそれぞれ α, β と $f(\alpha,\beta)$ であると考えられる．

上の二つの仮定 (測定状況からの独立性と関数関係の一貫性) はいずれもきわめてもっともらしく思われる．しかし両者をともに保持しようとすると，次の例[*1]がただちに示すように，量子論とは両立しないのである．もう一度一対のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考えよう．しかし，今回は必ずしも一重項状態に限らず，それらは**任意の**状態にあるとする．正方配列

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \mathbb{1} & \sigma_z \otimes \sigma_z \\ \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_x & \sigma_y \otimes \sigma_y \end{array} \tag{7.1}$$

において，9 個の演算子はおのおの固有値 ± 1 をもっている．各行，各列において，3 個の演算子は可換であり，余分な負号を必要とする**3 列目を除けば**，各演算子は残りの 2 個の演算子の積となっている．

演習問題 7.3

$$(\sigma_x \otimes \sigma_z)(\sigma_z \otimes \sigma_x) = \sigma_y \otimes \sigma_y \tag{7.2}$$

ではあるが

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z)(\sigma_x \otimes \sigma_x) = -\sigma_y \otimes \sigma_y \tag{7.3}$$

となることを示せ．

演習問題 7.4　式 (6.7) の演算子に対して式 (7.1) と類似の配列を構成せよ．**ヒント：**この配列は，二つの直線の交点に演算子が置かれた五つ星型となる．

式 (7.1) の 9 個の要素に，(測定がなされたとすれば) これらの演算子の測定結果となるはずの，そして演算子と同じ乗法規則に従うはずの数値，1 あるいは -1 を付与することは，式 (7.2) と (7.3) の符号が反対であるため明らかに不可能である．これは矛盾である．この簡単な代数の演習は，“A の測定結果” とよばれるものが，(ψ が A の固有状態でないか，あるいは以下で示すように，A が非縮退でない限り) 一般には A と測定される系だけに依存しているわけではないことを示している．

上の証明では 4 次元ヒルベルト空間を用いることが必要であった．その一方で私たちは，2 次元ヒルベルト空間では，量子論のすべての結果を再現するような隠れた変数の模型が構成可能であることを知っている (159 ページを参照)．この章の残りの大部分では 3 次元ヒルベルト空間の場合をしらべるが，これはそれ自身，研究する価値のある代数問題への挑戦でもある．

[*1] N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 3373.

7.2 グリーソンの定理

量子力学に対して，フォン・ノイマンの公理よりも弱く，また標準的な規則 (73 ページを参照)

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho \mathsf{A}) \tag{3.77}$$

とは異なる統計的予言をもたらすような新しい公理の存在可能性を探る中で，一つの重要な定理がグリーソン[*2]によって証明された．事実上グリーソンの定理は，ヒルベルト空間の次元が 2 より大きければ式 (3.77) にかわるもののないことを表明している．

定理の証明に必要とされた前提は，合理的な連続性の議論で補完された強い重ね合せの原理G*(すなわち，任意の直交基底が実現可能な最大検証を表しているということ．54 ページを参照) である．以下で示されるように，これらのきわめて一般的な仮定だけで，射影演算子 P の平均値は，どのように物理系が用意されたかのみに依存した (射影演算子 P にはよらない) トレース 1 の非負演算子 ρ によって，

$$\langle \mathsf{P} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho \mathsf{P}) \tag{7.4}$$

と与えられるということが証明される．この結果は容易に一般化することができ，任意の演算子 A に対して式 (3.77) が得られる．グリーソンの定理によって，2 章と 3 章で提出されていた仮定 (特に 56 ページの量子論的期待値則 H) の中には，より小さな抽象的定義と公理の集合で置き換えられるものがありうるということがわかるが，これは数学寄りの理論家にはより魅力的かもしれない．したがって基本的な公理は次の通りである．

α) 基本的な検証 (yes–no 質問) は複素ベクトル空間内の射影演算子によって表される．

β) 両立可能な検証 (同時に解答可能な yes–no 質問) は可換な射影演算子に対応している．

γ) $\mathsf{P_u}$ と $\mathsf{P_v}$ が直交射影演算子の場合，その和 $\mathsf{P_{uv}} = \mathsf{P_u} + \mathsf{P_v}$ はそれ自身射影演算子であり，次の期待値をもつ．

$$\langle \mathsf{P_{uv}} \rangle = \langle \mathsf{P_u} \rangle + \langle \mathsf{P_v} \rangle \tag{7.5}$$

この最後の仮定は，容易に二つ以上の直交射影演算子の和へと一般化されるが，決して自明ではない．$\mathsf{P_{uv}}$ のような射影演算子 (そのトレースは 2 以上となる) を分割する方法は無限にある．たとえば，$\mathsf{P_u} = \mathsf{uu}^\dagger$ と $\mathsf{P_v} = \mathsf{vv}^\dagger$ を直交ベクトル u と v への射影演算子，

$$\mathsf{x} = (\mathsf{u} + \mathsf{v})/\sqrt{2} \qquad \text{と} \qquad \mathsf{y} = (\mathsf{u} - \mathsf{v})/\sqrt{2} \tag{7.6}$$

[*2] A. M. Gleason, *J. Math. Mech.* 6 (1957) 885.

を別の直交ベクトル対としよう．対応する射影演算子 $\mathsf{P_x} = \mathsf{xx}^\dagger$ と $\mathsf{P_y} = \mathsf{yy}^\dagger$ は

$$\mathsf{P_x} + \mathsf{P_y} = \mathsf{P_u} + \mathsf{P_v} \tag{7.7}$$

を満足する．この表現は抽象複素ベクトル空間では自明な**恒等式**である．一方，

$$\langle \mathsf{P_x} \rangle + \langle \mathsf{P_y} \rangle = \langle \mathsf{P_u} \rangle + \langle \mathsf{P_v} \rangle \tag{7.8}$$

という主張は，非自明な**物理的内容**をもっており，強い重ね合せの原理 $\mathsf{G}^\star$ のおかげで原理的には実験的な検証が可能である．

実 験 的 検 証

具体例としてスピン 1 粒子を考えよう．u, v, w をそれぞれ J_z の固有値 1，−1, 0 (自然単位系 $\hbar = 1$ とする) に対応する固有状態とする．同様に x, y, w を $(\mathsf{J}_x{}^2 - \mathsf{J}_y{}^2)$ の固有値 1, −1, 0 に対応する固有状態とする．これらのスピン 1 粒子のビームを準備し，オブザーバブル

$$\mathsf{J}_z{}^2 = (\mathsf{J}_x{}^2 - \mathsf{J}_y{}^2)^2 \tag{7.9}$$

の固有値，0 あるいは 1，に従って粒子を選別するビームスプリッター (フィルター) に通すとしよう．これは，非一様な四重極場を用いれば，原理的にシュテルン–ゲルラッハ型の実験で実行可能である*3．

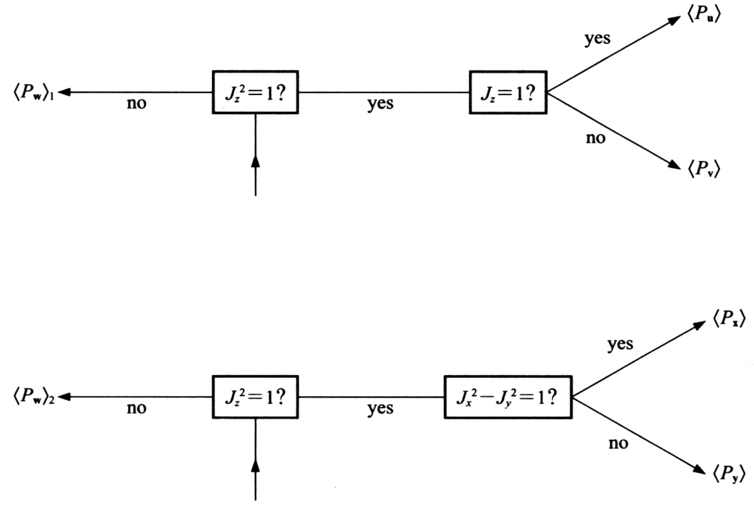


図 7.1　式 (7.8) を検証する二つの実験．もしこの式が成立しないと，$\langle P_\mathrm{w} \rangle$ の値はこれら二つの実験で異なる．

---
*3 A. R. Swift and R. Wright, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 77.

ビームスプリッターから左側に十分離れた観測者 $\mathcal{L}$ (図 7.1 を参照) は行列 $\mathsf{J}_z{}^2$ の固有値 0 に対応した状態 w にあるビームを受けとる．こうしてこの観測者は $\langle \mathsf{P_w} \rangle$ の期待値，すなわち左側に進むビーム強度の割合を測定することができる．

一方，式 (7.9) のオブザーバブルの縮退した固有値 1 に対応するもう一つのビームは，右側に十分離れたもう一人の観測者 $\mathcal{R}$ によって準備された第二のフィルターに導かれる．この観測者は粒子に対して J_z を検証する (これによって $\langle \mathsf{P_u} \rangle$ と $\langle \mathsf{P_v} \rangle$ の期待値を得る) か，あるいは $\mathsf{J}_x{}^2 - \mathsf{J}_y{}^2$ を検証する ($\langle \mathsf{P_x} \rangle$ と $\langle \mathsf{P_y} \rangle$ の期待値を得る) かの**選択**ができる．もちろんこれら二つの選択は異なるタイプのビームスプリッターに対応しており，$\mathcal{R}$ が勝手に選べる二つの実験の設定は互いに相いれない．

2 人の観測者が記録した結果は独立ではない．第一の場合，$\mathcal{L}$ は初期ビームに対して

$$\langle \mathsf{P_w} \rangle_1 = 1 - \langle \mathsf{P_u} \rangle - \langle \mathsf{P_v} \rangle \tag{7.10}$$

の割合のビームを得るが，第二の場合に得るのは

$$\langle \mathsf{P_w} \rangle_2 = 1 - \langle \mathsf{P_x} \rangle - \langle \mathsf{P_y} \rangle \tag{7.11}$$

である．

もし式 (7.8) が正しければ $\langle \mathsf{P_w} \rangle_1 = \langle \mathsf{P_w} \rangle_2$ となり，観測者 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{R}$ が二つの実験のうちどちらを選択したのかを識別できない．反対に，式 (7.8) が成立しない場合 (これは量子論が誤っていることを意味する) $\langle \mathsf{P_w} \rangle$ の測定は，離れたところの観測者 $\mathcal{R}$ が二つの設定のうちどちらを選んだかを，$\mathcal{L}$ に曖昧さを残さず示すことになる．この場合，$\mathcal{R}$ は $\mathcal{L}$ にメッセージを送ることができるだろうし，それは瞬時に “読める” だろう．これらのメッセージは，もし $\mathcal{R}$ から第一のフィルターまでの距離が $\mathcal{L}$ からの距離よりも長く粒子が十分遅ければ，送られる**前**に読むことさえ可能であろう．

上で設定された状況は，ベルの不等式の破れに関連づけられた通常の量子論的非局所性での状況とは本質的に異なっている．実際，ベルの不等式は $\mathcal{L}$ の観測と $\mathcal{R}$ の観測の**相関**だけを問題にしている．ベルの不等式を実験的に検証するためには，離れた 2 人の観測者が得た結果を共通の解析場所まで運び，両者を**比較**しなければならない．離れていてはどちらの観測者もベルの不等式を検証することができないのである．したがって，ベルの非局所性を使ってお互いにメッセージを送ることは，絶対に無理である．一方，もし式 (7.8) が成立しなければ，$\mathcal{L}$ による観測結果は，遠く離れた同僚 $\mathcal{R}$ が二つの設定のうちどちらを選んだか (あるいは選ぼうとしているか) を彼に伝えるのに十分なのである．

フレーム関数

さてグリーソンの本来の問題,「**任意の**完全正規直交基底 e_m に対して

$$\sum_m f(\mathsf{e}_m) = 1 \tag{7.12}$$

となる非負の実関数 $f(\mathsf{u})$ をすべてあげよ」に戻ろう．このような関数 $f(\mathsf{u})$ の物理的意味は，与えられた量子系を状態 u に見いだす確率である．$f(\mathsf{u})$ のこの解釈は仮定 γ に沿ったものである．グリーソンは，$\sum_m f(\mathsf{e}_m)$ がどんな正規直交フレーム $\{\mathsf{e}_m\}$ に対しても，必ずしも 1 である必要はないが同じ値をとるという性質によって，より一般的な**フレーム関数**を定義している．

以下に与えるグリーソンの問題に対する解は，回転群 SO(3) のもとでの球面調和関数の変換性に関係している．こういった詳細に興味がないければ，この節の残りは読み飛ばしてよい．

2　次　元

読み飛ばさない読者は，2 次元実ベクトル空間を考えてほしい．単位ベクトルは単位円上の点に対応し，角度 θ で表される．したがって式 (7.12) は

$$f(\theta) + f(\theta + \pi/2) = 1 \tag{7.13}$$

となる．ここでフーリエ級数展開 $f(\theta) = \sum c_n\, e^{in\theta}$，ただし $c_{-n} = \overline{c_n}$，をすれば

$$f(\theta) + f(\theta + \pi/2) = \sum_n c_n\, e^{in\theta}\,(1 + e^{in\pi/2}) = \sum_n c_n\, e^{in\theta}\,(1 + i^n) \tag{7.14}$$

が得られる．フレーム関数であるためには，この式は定数とならなければならない．したがって，フーリエ展開で許される n の値は $n = 0$ と $i^n = -1$ となる n，すなわち $n = \pm 2,\ \pm 6,\ \pm 10, \cdots$ だけである．可能なフレーム関数の形は 2 次元実ベクトル空間では無数にある．このことは直観的にもわかる．一つの単位 4 分円に対して関数 $f(\theta)$ を勝手に選ぶことができ，隣の 4 分円に対しては $(1 - f)$ をとるのである．

もっと次元が高くなると，正規直交基底が相互に絡み合うため自由度は小さくなる．単位ベクトル u は一つ以上の基底に属するかもしれない．しかし，それを含む基底によらず，期待値は一つ $f(\mathsf{u}) = \langle \mathsf{u}\mathsf{u}^\dagger \rangle$ でなければならない．この要請は，すぐわかるように，可能な $f(\mathsf{u})$ の形に厳しい制限を課すことになる．

3　次　元

次に，通常のユークリッド空間と同じ性質の計量をもつ，3 次元実ベクトル空間を考えよう．単位ベクトルは単位球面上の各点に対応し，1 対の角度 θ と ϕ で表される．そこで $f(\mathsf{u})$ を $f(\theta, \phi)$ と書くことにし，球面調和関数で展開しよう．

$$f(\theta, \phi) = \sum_{lm} c_{lm}\, Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{7.15}$$

[補題]　もし $f(\theta, \phi)$ がフレーム関数ならば，球面調和関数展開の既約な l 成分はおのおのそれ自身フレーム関数である．

[証明] (θ,ϕ) に垂直で互いに直交した二つの方向 (θ',ϕ') と (θ'',ϕ'') を考えよう．このとき[*4]

$$f(\theta',\phi') = \sum_{lm} c_{lm}\, Y_{lm}(\theta',\phi') = \sum_{lm} c_{lm} \sum_{r} \mathcal{D}^{(l)\prime}_{rm}\, Y_{lr}(\theta,\phi) \tag{7.16}$$

となる．$\mathcal{D}^{(l)\prime}_{rm}$ は $(2l+1)$ 次元のユニタリー行列であり，(θ,ϕ) から (θ',ϕ') への回転を表している．同様に，(θ,ϕ) から (θ'',ϕ'') への回転を表す行列 $\mathcal{D}^{(l)\prime\prime}_{rm}$ を用いて

$$f(\theta'',\phi'') = \sum_{lm} c_{lm} \sum_{r} \mathcal{D}^{(l)\prime\prime}_{rm}\, Y_{lr}(\theta,\phi) \tag{7.17}$$

となる．さて最後の二つの方程式で添字 m と r を交換し，その結果を式 (7.15) に加えよう．少々式を整理すれば

$$\begin{aligned} &f(\theta,\phi) + f(\theta',\phi') + f(\theta'',\phi'') \\ &\quad = \sum_{lm} \left[c_{lm} + \sum_{r} \left(\mathcal{D}^{(l)\prime}_{mr} + \mathcal{D}^{(l)\prime\prime}_{mr} \right) c_{lr} \right] Y_{lm}(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{7.18}$$

が得られる．f をフレーム関数としたいならば，この式は定数でなければならない．したがって

$$l \neq 0 \qquad \text{の場合} \qquad c_{lm} + \sum_{r} \left(\mathcal{D}^{(l)\prime}_{mr} + \mathcal{D}^{(l)\prime\prime}_{mr} \right) c_{lr} = 0 \tag{7.19}$$

となる．この結果は各 l に対して別々に成立しなければならない．すなわち，フレーム関数 (7.15) の l 成分は，おのおのそれ自身フレーム関数である．

この補題のおかげで，

$$f_l(\theta,\phi) = \sum_{m=-l}^{l} c_m\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\phi} \tag{7.20}$$

がフレーム関数であるための条件をしらべる環境は十分整った．まず l は奇数ではありえないことに注意しよう．その場合には，方向 (θ,ϕ) を反転して反対向き $(\pi-\theta,\pi+\phi)$ に置き換えると f_l は符号を変えることになるが，これはフレーム関数としては許されない (e_m のいくつかを反転しても，やはり正規直交基底を構成している) からである．一般に，反転に対して $e^{im\phi} \leftrightarrow e^{im(\pi+\phi)} = (-1)^m e^{im\phi}$ であり，また

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\, \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m}\, P_l(\cos\theta) \tag{7.21}$$

は $\theta \leftrightarrow \pi-\theta$ のとき $(-1)^{l+m}$ とふるまう[*4]．

偶数の l に対しては，簡単な場合，$\theta = 0$ と $\theta' = \theta'' = \pi/2$ を考えれば十分である．式 (7.21) から

$$m \neq 0 \qquad \text{の場合} \qquad P_l^m(1) = 0 \tag{7.22}$$

[*4] E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, New York (1959) p. 154.

が得られるから $f_l(0,\phi)=c_0$ となり，これは定数である．さらに，式 (7.14) と同じように，

$$f_l(\pi/2,\phi)+f_l(\pi/2,\phi+\pi/2)=\sum_{m=-l}^{l} c_m\,P_l^{|m|}(0)\,e^{im\phi}\,(1+i^m) \tag{7.23}$$

が得られるが，フレーム関数であるためにはこれもまた ϕ に独立でなければならない．奇数の m は，(7.21) からわかるように $l+m$ が奇数であれば $P_l^m(0)=0$ となるから，式 (7.23) に寄与しない．したがって，残されたのは偶数値の m である．式 (7.23) の右辺を定数にしようとするならば，$m=\pm4,\pm8,\cdots$ となってはならない．このことから，$l=0$ と $l=2$ を除くすべての l が排除される．

l 次の球面調和関数による回転群の表現は**既約**である[*4] ことを思い起こそう．したがって，与えられた任意の $l\geq4$ に対して，いかなる基底でも (つまりあらゆる極軸のとり方に対しても) $c_4=0$ となることを要求すると，すべての m に対して $c_m=0$ が導かれる．実際，$2l+1$ 個の異なる極軸を選べば，c_4 に対して $2l+1$ 個の線形独立な表現が得られるが，これらがすべて 0 となるのは各 c_m が $c_m=0$ となる場合に限られるからである．

演習問題 7.5 あるベクトルの与えられた一つの成分が**すべての**基底で 0 であれば，このベクトルはヌルベクトルであることを証明せよ． ★

結局残ったのは 0 次と 2 次の球面調和関数である．これらは単位ベクトル u の直角座標成分の 2 次形式として書き表されるから，任意のフレーム関数は次の形

$$f(\mathsf{u})=\sum_{mn}\rho_{mn}\,u_m\,u_n \tag{7.24}$$

をとることになる．ここで ρ はトレースが 1 の非負行列である．

高次元空間の場合

任意の高次元ベクトル空間 (複素空間でもよい) は，3 次元実空間を部分空間として無限個含んでいる．そのおのおのにおいて，フレーム関数は式 (7.24) の形をしている．より大きな空間では

$$f(\mathsf{u})=\sum\rho_{mn}\,\overline{u_m}\,u_n \tag{7.25}$$

とならなければならないことは直観的に明らかであるし，形式的に証明することもできる．厳密な証明には込み入った幾何学的議論が伴うので，興味のある読者はグリーソンの原論文[*2] を参照してほしい．

秘密の決定論

量子検証の確率的ふるまいは，量子論を超える世界が存在することによって説明可能であり，そこでは “隠れた変数” が各検証の出力結果を曖昧さを残さず決定するという仮説に対して，グリーソンの定理は強力な反論を与えている．仮に仮説が正しかったとすると，特定の隠れた変数値に対して，基本的検証 (yes–no 質問，実験) はおのおの，一つの確定した答をもつことになる．そしてそれゆえに，射影演算子 P_u はおのおの確定値 0 あるいは 1 に対応することになる．したがって，関数 $f(\mathsf{u}) = \langle \mathsf{P}_\mathsf{u} \rangle$ もまた，いたるところ 0 か 1 となるだろう．(その正確な値は隠れた変数の値による.) このような不連続関数 $f(\mathsf{u})$ は，グリーソンの定理で要請されている滑らかな分布 (7.25) とはほど遠いものである．このことは，一般に式 (7.5) が隠れた変数のどのような分布に対しても成立しえないことを意味している．したがって，隠れた変数に関しての平均をとらない限り，隠れた変数の理論は仮定 γ を破らざるをえない．

この結論はベル[*5]によって最初に導かれた．その直後コッヘンとシュペッカー[*6]は純粋に代数学的な証明を与えたが，そこでは**有限個の**演算子 (正確には 117 個の演算子) が用いられたにすぎない．グリーソンの連続性の議論はベルとコッヘン–シュペッカーの研究に端を発するものであったが，秘密の決定論の議論にはもはや必要ではなかった．コッヘン–シュペッカー定理の最近のより簡潔な証明を次節に与える．

7.3 コッヘン–シュペッカー定理

コッヘン–シュペッカー定理は次のことを主張している．次元 $d \geq 3$ のヒルベルト空間において，**可換**な射影演算子の集合 P_m が $\sum \mathsf{P}_m = \mathbb{1}$ を満たすとき，その対応する値 [すなわち $v(\mathsf{P}_m) = 0$ あるいは 1] もまた $\sum v(\mathsf{P}_m) = 1$ を満足するように，各射影演算子 P_m に確定値 0 あるいは 1 を関連づけることは不可能である．この定理が私たちに突き付けたのは，各量子論的測定に対して確定値を付与し，しかも量子論の統計的性質を再現しようとする秘密の決定論はいずれも**測定状況に依存**せざるをえなくなるということである．今の場合，もし三つの演算子 P_m，P_r，P_s が交換関係 $[\mathsf{P}_m, \mathsf{P}_r] = [\mathsf{P}_m, \mathsf{P}_s] = 0$ かつ $[\mathsf{P}_r, \mathsf{P}_s] \neq 0$ を満たすならば，P_m の測定結果は P_m が単独で測定されたか，あるいは P_r と，それとも P_s と一緒に測定されたかということに独立ではありえないことになる．

演習問題 7.6 上述の代数関係をもつ三つの射影演算子 P_m，P_r，P_s を書き下せ．この代数関係からなぜベクトル空間の次元が $d \geq 3$ と要請されるのか説明せよ．

定理の証明は以下のようになる．まず $\mathsf{u}_1, \cdots, \mathsf{u}_N$ を正規直交ベクトルの完全系としよう．N 個の行列 $\mathsf{P}_m = \mathsf{u}_m \mathsf{u}_m^\dagger$ はベクトル u_m への射影演算子である．これらの行列は可換で $\sum \mathsf{P}_m = \mathbb{1}$ を満足する．これらの行列の一つに (すなわちベクトル u_m の

[*5] J. S. Bell, *Rev. Mod. Phys.* 38 (1966) 447.
[*6] S. Kochen and E. Specker, *J. Math. Mech.* 17 (1967) 59.

一つに 1 を与え，その他の $N-1$ 個に 0 を与える異なった方法は N 通りある．さて異なった直交基底 (その中には共通の単位ベクトルをもつものもあるかもしれない) を考えよう．あるベクトルが一つ以上の基底のメンバーである場合には，その他の基底ベクトルとして何を選ぶかによらず，そのベクトルには同じ値 (1 あるいは 0) が関連付けられると仮定してみよう．$\mathbb{R}^3$(3 次元実ベクトル空間) の 117 個の特定なベクトル集合に対してコッヘンとシュペッカー *6 が最初に示したように，この仮定は矛盾に陥る．以前のベル *5 の証明では**連続的な**ベクトルが関与していたが，これは有限個のベクトルだけを使うような方法で容易に書き直される．

この結果は基本的に重要であって，コッヘン–シュペッカーの証明を簡略化する (特に 117 個よりも少ないベクトルを使った) 試みが多くなされてきた．現在知られている最も簡潔な証明はコンウェイとコッヘンによるもので，彼らは必要な性質を備えた 31 個のベクトルからなる集合を発見した．これらのベクトルの方向余弦の比には，小さな整数 0, ±1 そして ±2 のみが関与している (114 ページの図版 II を参照)．だが，ここでは $\mathbb{R}^3$ の 16 個の異なる基底に属する 33 個のベクトルからなる別の集合を考える．この集合は多くの対称性をもっているので，定理の証明はきわめて簡略化される*7．$\mathbb{R}^4$ ではわずか 20 個のベクトルを使った，より簡単な証明を目にするだろう．

関係あるのは方向だけであるから，これらの証明では**ベクトル**のかわりに**射線**という言葉を使うことにする．ベクトルの長さは何の役割も果たさず，実際長さが 1 よりも長いとしておいた方が便利である．こうしても直交性に影響は与えないし，代数はよりやさしくなる．話をさらに簡単にするために，1 と 0 に関連づけられた射線をおのおの緑と赤 (信号機と同じように緑 = yes，赤 = no) とよぼう．

$\mathbb{R}^3$ における 33 個の射線

証明で使われる 33 個の射線を図 7.2 に示しておく．それらは，0, 1, $\bar{1}$ (これは -1 を表す記号)，2 (これは $\sqrt{2}$ を意味する) と $\bar{2}$ (これは $-\sqrt{2}$) という値をとる x，y，z を使って，xyz とよばれる．たとえば，射線 $\bar{1}02$ は原点と点 $(-1, 0, \sqrt{2})$ を結んでいる．$\bar{1}02$ と $10\bar{2}$ のような反対向きの射線は，同じ射影演算子に対応しているので一度だけ数える．

演習問題 7.7　各射線の方向余弦の 2 乗は，次の組合せ

$$0+0+1=0+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=0+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}$$

とそれらすべての置換の一つとなることを示せ．

演習問題 7.8　33 個の射線は 16 個の直交したトライアッド (三つ組) を構成している (各射線はいくつかのトライアッドに属している) ことを示せ．　★

---

*7 A. Peres, *J. Phys. A* 24 (1991) L175.

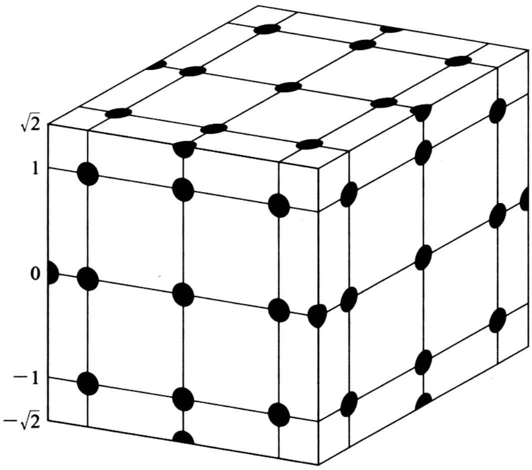


図 7.2 コッヘン–シュペッカー定理の証明で使われる 33 個の射線は立方体の中心とその表面および縁上の黒点を結んで得られる．この構成法を 114 ページの図版 II と比較してみよ．

この集合の重要な性質は，x，y，z 軸の交換に関する不変性と各軸の方向反転のもとでの不変性である．このおかげで私たちは (一般性を失うことなく) 勝手に数値 1 をある射線に指定することができる，というのも，それらに 1 ではなく数値 0 を与えることは軸の名前の付け替え，あるいは方向反転に等価となるからである．たとえば，射線 001 は緑，100 と 010 は赤とすることができる．

コッヘン–シュペッカー定理の証明は表 7.1 (表は上から下へと読む) において完全に成立している．各行の最初に**ボールド体**の文字で示された射線は緑である．第 2 と第 3 の射線は，最初の射線とともに，一つの直交トライアッドを構成する．したがって，それらは赤である．同じ行に追加されている射線 (今後必要となる射線のみあげられている) は第 1 の射線に直交しており，それゆえこれらもまた赤である．**イタリック体**で示されている赤い射線は，これが "古い" 射線，つまりすでに上の行で赤と見なされた射線であることを意味する．各行に現れる新しい射線の色の選択に関しては表中

表 7.1 3 次元におけるコッヘン–シュペッカー定理の証明

直交トライアッド			その他の射線	第 1 の射線が緑となる理由
001	100	010	110 $1\bar{1}0$	z 軸の任意性
101	$\bar{1}01$	*010*		x と $-x$ のとり方の任意性
011	$0\bar{1}1$	*100*		y と $-y$ のとり方の任意性
$\mathbf{1\bar{1}2}$	$\bar{1}12$	*110*	$\bar{2}01$ 021	x と y のとり方の任意性
102	$\mathit{\bar{2}01}$	*010*	$\bar{2}11$	第 2 と第 3 の射線への直交性
211	$\mathit{0\bar{1}1}$	$\mathit{\bar{2}11}$	$\bar{1}02$	第 2 と第 3 の射線への直交性
201	*010*	$\mathit{\bar{1}02}$	$\bar{1}\bar{1}2$	第 2 と第 3 の射線への直交性
112	$\mathit{1\bar{1}0}$	$\mathit{\bar{1}\bar{1}2}$	$0\bar{2}1$	第 2 と第 3 の射線への直交性
012	*100*	$\mathit{0\bar{2}1}$	$1\bar{2}1$	第 2 と第 3 の射線への直交性
121	$\mathit{\bar{1}01}$	$\mathit{1\bar{2}1}$	$0\bar{1}2$	第 2 と第 3 の射線への直交性

で説明がある．

第 1 行，第 4 行，そして最終行にはおのおの射線 100，021，$0\bar{1}2$ が含まれている．これら三つの射線は赤であり，相互に直交している．これがコッヘン–シュペッカーの矛盾である．もし 33 個の集合から一つの射線を消去すればこの矛盾は解消することが示せる．消去された射線が表 7.1 にはっきりあげられていなくてもそうである．これは，一つの射線を消去することで集合の対称性が破れ，そのために他の選択可能性をしらべる必要が生じるからである．このとき矛盾が避けられるという証明は表 7.1 で見るほど単純ではない．(付録のコンピュータープログラムが役立つだろう*8.)

物理的解釈

いま考えているヒルベルト空間は $\mathbb{R}^3$ と同型であるから，抽象ベクトル u_m は通常のユークリッド・ベクトルとしてふるまう．そこでそれらを太文字で $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ などと表すことにする．このとき射影演算子 $\mathsf{P}_{\mathbf{m}}$ には，スピン 1 粒子の角運動量成分を用いて簡単な物理的解釈を与えることができる．ここでは自然単位系 ($\hbar = 1$) で次の表現

$$\mathsf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.26}$$

を使うのが便利である．これらの行列は $[\mathsf{J}_x, \mathsf{J}_y] = i\,\mathsf{J}_z$ とその巡回置換された関係式を満足する．この表現では

$$\mathsf{J}_x{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}_y{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}_z{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

となる．これら三つの行列は可換であるから，対応するオブザーバブルは同時に測定可能である．実際，すべての $\mathsf{J}_m{}^2$ を一つの縮退のない演算子

$$\mathsf{K} = \mathsf{J}_x{}^2 - \mathsf{J}_y{}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

の関数と考えることもできる．

演習問題 7.9　$\mathsf{J}_x{}^2 = \mathbb{1} + (\mathsf{K} - \mathsf{K}^2)/2$ となることを示し，同様に $\mathsf{J}_y{}^2$ と $\mathsf{J}_z{}^2$ を K の関数として書き下せ．

*8 コッヘンとシュペッカーのもとの証明は二つのステップを踏む．与えられた 8 個のベクトルからなる集合から特定の 2 個のベクトルをとったとき，これらがともに 1 をとることはありえないという補題 (これが難しい) が最初のステップである．これよりもずっとやさしい第二のステップは，その 8 個のベクトル集合を，矛盾に導くような仕方で 15 回複製することである．この構成においては，三つのベクトルが 2 度現れるから，合計 $15 \times 8 - 3 = 117$ 個の異なるベクトルがつくられる．この第二ステップはあまりに自明であるからコッヘン–シュペッカーの証明は 8 個のベクトルのみを必要とする (ベルのそれ以前の証明は 10 個のベクトルを使ったもの) という人もある．しかし，彼ら (コッヘンとシュペッカー) 自身を含め，潔癖主義者は補題だけでなく完全な証明が欲しいのであり，117 個と数えている．

演習問題 7.10　三つの行列 $\mathsf{J}_k\,\mathsf{J}_l + \mathsf{J}_l\,\mathsf{J}_k$ (ただし $k \neq l$) をあらわに書き下せ．また，行列

$$\mathsf{P}_{\mathbf{m}} = \mathbb{1} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{J})^2 \tag{7.29}$$

が任意の実ベクトルに対して成分 $(\mathsf{P}_{\mathbf{m}})_{rs} = m_r\,m_s$ をもつことを示し，したがって射影演算子となることを示せ．

射影演算子 $\mathsf{P}_{\mathbf{m}}$ の測定はスピンの単位方向ベクトル $\mathbf{m}$ 成分が 0 であるかどうかの検証である．その固有値 1 は結果 “yes” に対応し，縮退した固有値 0 は結果 “no” に対応している．縮退した行列 $\mathsf{P}_{\mathbf{m}}$ は $\mathbf{m}\cdot\mathbf{J}$ の固有値 -1 と $+1$ は何も区別しないから，この検証は $\mathbf{m}$ 方向のスピン成分を測定する通常のシュテルン–ゲルラッハの実験とは本質的に異なることに注意せよ．

二つの直交単位ベクトル $\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ に対する式 (7.28) の一般化は

$$\mathsf{K}(\mathbf{m},\mathbf{n}) = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{J})^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})^2 \tag{7.30}$$

である．この演算子は固有値 $-1, 0, 1$ をもっている．$\mathsf{K}(\mathbf{m},\mathbf{n})$ の直接測定は困難であるが，技術的には可能 *3 であり，これにより一つの操作でトライアッド $\mathbf{m},\mathbf{n}$ そして $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ の “色” を決定することができる．

コッヘン–シュペッカー定理の証明で使われた 33 個の射線は 16 個の直交トライアッドを形成している (演習問題 7.8 を参照)．これらのトライアッドは $\mathsf{K}(\mathbf{m},\mathbf{n})$ と同じタイプの異なる 16 個の**非可換な**演算子に対応している．それらのうちいずれであってもよいが，一つだけが実際に測定可能である．他の測定の結果は反実証論的で，しかも相互に矛盾している．

$\mathbb{R}^4$ の 20 個の射線

再び一対のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考えよう．配列 (7.1) の各行と各列が可換な演算子の**完全系**となっていたことを思い起こそう．各行あるいは各列の三つの演算子の積は，$-\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$ となる第 3 列を除くと，$\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$ となっている．したがって，演算子それ自身と同じ乗法規則に従うように，数値 1 あるいは -1 を 9 個の演算子のおのおのに与えることは，明らかに不可能である．

代数上のこの困難は，コッヘン–シュペッカー定理では幾何学的な言葉で言い換えられる．式 (7.1) における各行，各列の可換な演算子に対する共通の固有ベクトルは完全直交基底を構成している．こうして，総数 24 個のベクトルをもつ 6 個の直交基底が得られる．ここで不可能となるのは，各基底の一つのベクトルを緑に，緑のベクトルに直交するベクトルは (**他の**基底に属する直交ベクトルも含めて) **すべて**赤という具合に “塗る” ことである．

いま，ある**一つの**基底のベクトルをこのように塗ったとしよう．“緑” のベクトルはその基底に対応した完全検証の結果を (もし検証が実行された場合) 示しており，その

基底を生成している三つの可換な演算子 (すなわち各行あるいは各列を構成するすべての演算子) の一つ一つに 1 あるいは -1 という確定した値を与える．さて，私たちはたったいま，配列 (7.1) のすべての要素に対して矛盾なく数値を与えることは不可能であることを見たところである．こうして，私たちのお絵描き仕事でも，以前 $\mathbb{R}^3$ で見たのと同様な幾何学的矛盾に遭遇することを予想する．

今の場合，幾何学的証明は $\mathbb{R}^3$ の場合よりも簡単になる．σ_z と σ_x に対する通常の表現 (ともに実数) では，その固有ベクトルもまた実数にとれる．したがって，議論を $\mathbb{R}^4$ に限定できる．上述と同じ記法で $wxyz$ と表される 24 個の射線は，1000，1100，$1\bar{1}00$，1111，$111\bar{1}$，$11\bar{1}\bar{1}$ とそれらのすべての置換 (反対向きの射線は一度だけ数える) である．この集合は w，x，y，z 軸の交換のもとで不変であり，各軸の反転に関しても不変である．

演習問題 7.11　これら 24 個の射線を，6 個の直交基底，すなわち配列 (7.1) の各行と各列に区分せよ．24 個の射線のおのおのが他の 9 個の射線に対して直交し，4 個の異なるテトラッドに属していることを示せ．直交した射線は 108 対存在し，24 個の異なる直交テトラッドが存在する．　★

演習問題 7.12　24 個の射線は 24 セルとして知られる正多面体[*9]の表面に対して直交していることを示せ．　★★

演習問題 7.13　$\mathbb{R}^4$ におけるコッヘン–シュペッカー定理を表 7.1 で用いた手法で証明せよ．　★

コッヘン–シュペッカー定理の証明にはこれら 24 個の射線のすべてが必要というわけではないことがわかる．20 個の射線だけを使った証明[*10]を表 7.2 に与えた．ここには 11 列あり，各列の 4 個の射線は互いに直交している．したがって，各列のうち一つの射線が緑である．その結果総数 11 個の緑の射線が存在する．しかし，各射線は表に 2 度ないしは 4 度現れ，したがって緑の射線の総数が偶数であることは容易にわかる．この矛盾は，20 個の射線を一貫して色分けすることのできないことを意味している．

表 7.2　4 次元でのコッヘン–シュペッカー定理の証明

1000	1000	1000	1000	$\bar{1}111$	$\bar{1}111$	$1\bar{1}11$	$11\bar{1}1$	$01\bar{1}0$	$001\bar{1}$	1010
0100	0100	0010	0001	$1\bar{1}11$	$11\bar{1}1$	$11\bar{1}1$	$111\bar{1}$	$100\bar{1}$	$1\bar{1}00$	0101
0010	0011	0101	0110	$11\bar{1}1$	1010	0110	0011	1111	1111	$11\bar{1}\bar{1}$
0001	$001\bar{1}$	$010\bar{1}$	$01\bar{1}0$	$111\bar{1}$	$010\bar{1}$	$100\bar{1}$	$1\bar{1}00$	$1\bar{1}\bar{1}1$	$11\bar{1}\bar{1}$	$1\bar{1}\bar{1}1$

*9 H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Macmillan, New York (1963) [Dover よりリプリント版が刊行].
*10 M. Kernaghan, *J. Phys. A* 27 (1994) L829.

7.4 測定状況依存性の実験的および論理的視点

コッヘン–シュペッカー定理は一つの幾何学的記述である．これは，ベルの定理と同様，量子論とは独立であるが，その解釈に深く影響を与えている．しかし前者とは異なって，コッヘン–シュペッカー定理には系のアンサンブルの統計的相関は関与しない．それは**一つの**系に実行しうる様々な測定の結果を比較するものである．これは革命的な簡略化である．不特定の隠れた変数に関する平均をとる必要もなければ，式 (6.29) から CHSH 不等式を導出するときのように，仮想的な実験試行に関して平均をとる必要もない．さらに，統計的考察が不要なことで，検出器の効率に関する懸念からも救われる．

しかしそれでもなお，問題は純論理的にはなりえない．物理に関する議論はどんなものであれ，最終的には実験事実と関連づけられなければならないからだ．この節の目的はベルの定理とコッヘン–シュペッカーの定理の根底にある経験的前提を分析することである．これらの前提は九つの異なる命題として定式化されている．そのうち七つは厳密に現象論的であって，(内部無矛盾性の検証に加えて) 実験的に検証ができる．それらは量子論からも導出可能である．

最後の二つの命題は反実証論的性格をもっている．それらは，実行されていない実験の結果を**想像する**ことが可能である，さらにはこれらの仮想的結果が実際の実験結果に模した**相関**をもつように実験できると述べている．この反実証論的推論はもっともらしく見えるものの，ベルの不等式 (これは実験的に破られている) や，ベクトルに対するコッヘン–シュペッカーの色分け規則 (これは矛盾している) という承認しがたい結果を生み出すのである．

$\mathcal{A}$. 基 本 的 検 証

まずいくつかの定義と問題の少ない命題から始めよう．

$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \cdots$ と名づけられた “基本的検証”(yes-no 実験) が存在する．その結果は $a,\ b,\ c,\ \cdots = 1$ (yes) あるいは 0 (no) とよばれる．

量子論において，これらの基本的検証は射影演算子で表される．ここでは，射影演算子が 2 次と 3 次の実行列で表されている量子論の部分集合だけを考えれば十分である．

演習問題 7.14 トレースが 1 の任意の 3×3 実射影演算子は式 (7.29) のように書けることを示せ．

演習問題 7.15 トレースが 1 の任意の 2×2 実射影演算子は

$$\mathsf{P}_\theta = \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \sigma_x \sin\theta + \sigma_z \cos\theta\right) \tag{7.31}$$

と書けることを示せ．

P_θ の物理的実現方法の一つとしては，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対するシュテルン–ゲルラッハの実験 (そこでは P_θ が "θ 方向のスピン成分は正か?" という質問を表している) があげられる．他の実行可能性としては光子の直線偏光に関与したものがある．

$\mathcal{B}$. 状 態 準 備

一般には与えられた検証の結果を確実に予言することはできない．しかし，以下のような例外が存在する．

各基本的検証に対して，その結果が確実に予言できるように物理系を準備する方法が存在する．

量子論では，状態準備が密度行列 ρ で表されている．射影演算子 P で表される基本的検証の結果は $\mathrm{Tr}\,(\rho\mathsf{P}) = 0$ あるいは 1 のときに限って予言可能である．P は縮退しているかもしれないから，一般にこの方程式を満足する状態準備は一意ではない．

$\mathcal{C}$. 基本的検証の両立性

検証の中には**両立できる**ものがある．両立性は以下のように定義される．

検証 A の結果が予言可能であり，繰り返すことのできるように物理系が準備され，(A の検証のかわりに)"両立可能な" 検証 B が実行されたとすると，引く続いて実行された検証 A はあたかも B が実行されなかったのと同じ結果を生む．

量子論では，両立性は演算子 A と B が交換する場合に起こる．2.2 節ではすべての検証が繰り返せるわけでないことを見たが，ここでの目的に対しては繰り返せる検証だけを考えれば十分であり，これは確かに存在する．

両立可能な検証を表す可換な射影演算子対としては

$$[\,\tfrac{1}{2}\,(\mathbb{1}+\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1)\,,\,\tfrac{1}{2}\,(\mathbb{1}+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)] = \mathsf{O} \tag{7.32}$$

がよく知られている．ここで $\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ は任意の単位ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}_1$ と $\boldsymbol{\sigma}_2$ は二つの異なるスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対応している．可換な射影演算子の他の例としては

$$[\mathbb{1}-(\mathbf{m}\cdot\mathbf{J})^2\,,\,\mathbb{1}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})^2] = \mathsf{O} \tag{7.33}$$

がある．ここで，$\mathbf{J}$ は 1 個のスピン 1 粒子に対応し，$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$ である．

注意：これらの概念を古典力学に拡張したとすると，すべての検証は両立可能となることがわかるだろう．

$\mathcal{D}$. 対称性と推移性

両立性は対称的であるが，推移的ではない．

この記述は，もし A が B と両立可能であれば，B は A と両立可能であること (これは自明ではない．このことは量子論の帰結であり実験的にも確かめられる) を意味している．しかし A が B および C と両立可能であった場合，B が C と両立可能であるとは限らない．

演習問題 7.16　1 個のスピン 1 粒子に対して

$$\mathsf{A} = (\mathbf{m}\cdot\mathsf{J})^2, \qquad \mathsf{B} = (\mathbf{n}\cdot\mathsf{J})^2, \qquad \mathsf{C} = (\mathbf{r}\cdot\mathsf{J})^2 \tag{7.34}$$

を定義する．ここで $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{r} = 0 \neq \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$ である．このとき $[\mathsf{A},\mathsf{B}] = [\mathsf{A},\mathsf{C}] = 0 \neq [\mathsf{B},\mathsf{C}]$ を示せ．

演習問題 7.17　2 個のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対して

$$\mathsf{A} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1, \qquad \mathsf{B} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2, \qquad \mathsf{C} = \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 \tag{7.35}$$

を定義して，同じことを示せ．

注意： 両立性が反射的であること (これは $[\mathsf{A},\mathsf{A}] \equiv 0$ から従う) は必然的に含まれている．どんな検証でも，それが繰り返されたならば同じ結果が得られるだろう．すでに述べたように，ここでの議論は繰り返せる検証に限定されている．

$\mathcal{E}$. 拘　　束

両立する検証が予言可能な結果をもつように状態を準備した場合，これらの結果には拘束があるかもしれない．

例 (スピン $\frac{1}{2}$): もし $\mathsf{P}_\mathbf{m} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ に対する検証が予言可能な結果 $p_\mathbf{m}$ をもつとすると，$p_\mathbf{m} + p_{-\mathbf{m}} = 1$ である．

例 (スピン 1): $\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{r}$ を三つの直交単位ベクトルとし，「$\mathbf{m}\cdot\mathbf{J} = 0$ であるか?」という質問に対応して $\mathsf{P}_\mathbf{m} := \mathbb{1} - (\mathbf{m}\cdot\mathsf{J})^2$ を定義しよう．同様に射影演算子 $\mathsf{P}_\mathbf{n}, \mathsf{P}_\mathbf{r}$ を定義しよう．対応する三つの検証は，すでに見たように，両立可能である．さらに，

$$\mathsf{P}_\mathbf{m} + \mathsf{P}_\mathbf{n} + \mathsf{P}_\mathbf{r} = \mathbb{1} \tag{7.36}$$

となる．量子論は，これら三つの検証の結果が予言可能であるような状態準備に対して，その結果が

$$p_\mathbf{m} + p_\mathbf{n} + p_\mathbf{r} = 1 \tag{7.37}$$

を満たすこと，つまり一つは肯定的に，他の二つは否定的になることを予言し，このことは原理的に実験的検証が可能である．

警告： この時点で私たちは，論理的矛盾に導くような拘束に従う仮想的な系を想像するかもしれない．たとえば，その任意の三つが式 (7.37) のような拘束に従う四つの異

なる検証があったとすれば

$$a+b+c=1,\quad a+b+d=1,\quad a+c+d=1,\quad b+c+d=1 \tag{?}$$

となり，したがって $3(a+b+c+d)=4$ となるがこれは明らかに不可能である．もちろんこのような規則に従う物理系は存在しない！ ここで注意しておくべき重要な点は，ここに提案したような一見無害に見える仮定でも矛盾に導きうるということである．仮定を提案することは常に自由であるが，私たちはその内部無矛盾性を注意深くチェックしなければならない．

$\mathcal{F}$. さらなる拘束

上の仮定は**予言可能**な結果に導く状態準備に関連していた．これには次のような一般化が存在する．

たとえ拘束された検証の結果が予言可能では“ない”ような状態準備がなされたとしても，もし実際に検証が実行されれば，これらの結果は適当な拘束を満たすであろう．

言い換えると，たとえ個々の検証の結果が予言可能でなくても，それらは完全に無秩序とはならない．自然には何らかの法則と秩序があるようである．このことは，私たちが微視的決定論で物理を考えたり，おそらく隠れた変数を導入しようとする試みを助長するかもしれない．しかし，これは私たちがここでたどる道ではない．ここでの議論は厳密に現象論的 (量子論への言及は単に説明のため) なのである．

この最後の命題は実験的にしらべることができる．もし量子論を使おうというのであれば，量子論から導くこともできる．直交射影演算子の完全系は $\mathsf{P}_i\mathsf{P}_j=\mathsf{P}_j\mathsf{P}_i=\delta_{ij}\mathsf{P}_j$ と $\sum\mathsf{P}_i=\mathbb{1}$ を満足している．すると，対応する出力結果 ($p_i=0$ あるいは 1) に対して

$$\left\langle\Bigl(\sum_i p_i\Bigr)^2\right\rangle-\left\langle\Bigl(\sum_i p_i\Bigr)\right\rangle^2=\left\langle\Bigl(\sum_i \mathsf{P}_i\Bigr)^2\right\rangle-\left\langle\Bigl(\sum_i \mathsf{P}_i\Bigr)\right\rangle^2\equiv 0 \tag{7.38}$$

となるから，常に $\sum p_i=1$ (この結果は分散 0) である．

注意：式 (7.38) の導出では，直交射影演算子に対して，和の平均値が平均値の和であることを仮定している．この規則は実験的確認に従うものである．式 (7.5) 以下の議論を参照せよ．

注意：命題 $\mathcal{F}$ に古典的対応はない．(もしあったとすると，すべての古典的検証は両立可能であるから，古典物理学においてコッヘン–シュペッカー型の矛盾が生じてしまうはずである.)

$\mathcal{G}$. 相　関

上述の命題よりも弱い記述形式は次のようになる．

いくつかの両立可能な検証の出力結果が予言可能でもなく拘束もされていないように系のアンサンブルを準備しても，それらの結果の間には依然として“統計的相関”がありうる．

一例として，一重項状態に準備されたスピン $\frac{1}{2}$ 粒子対を考えよう．$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ を単位ベクトルとして射影演算子 $\mathsf{P}_{1\alpha} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1)$ と $\mathsf{P}_{2\beta} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)$ を定義する．$p_{1\alpha}$ および $p_{2\beta}$ をおのおの $\mathsf{P}_{1\alpha}$ と $\mathsf{P}_{2\beta}$ の測定結果 (0 あるいは 1) とする．すると平均として

$$\langle p_{1\alpha}\, p_{2\beta}\rangle = (1 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})/4 \tag{7.39}$$

が得られる．

演習問題 7.18　$\langle p_{1\alpha}\rangle = \frac{1}{2}$ であること，そして式 (7.39) は式 (6.23) におけるスピン相関の単なる書き換えにすぎないことを示せ．

この相関がベルの不等式を破ることはすでに知っている．しかし，この不等式を導出するため，あるいはコッヘン–シュペッカー定理を証明するためには，根本的に異なった性格をもつさらに二つの仮定が必要である．

$\mathcal{H}$. 反実証論的実在論

この議論では，隠れた変数をあらわに使うことも，何か不特定の決定論を仮定してそれを暗に含んでしまうようなことさえしていない．私たちは，もし実行されていたとしたら (実行されていない) 実験の結果がどんなものとなりえたかを考えるだけにしよう．

a) 実行されていない任意の検証に対して仮想的な結果を想像すること，そしてこれらの未知の結果をあたかも確定した数のごとく取り扱って計算することは可能である．

上述の内容は純粋な知的活動に言及したものであり，実験的にも正しいということには何の疑いもない．たとえば，検証 $\mathsf{P}_\mathbf{m}$ の可能な結果は私たちには明確である．それは 1 (yes) かあるいは 0 (no) だけである．すると私たちは結果が 1 であったとして一連の計算をすることができるし，また結果が 0 であったと仮定して別の異なる計算をすることができる．他の可能な検証 $\mathsf{P}_\mathbf{n}$，$\mathsf{P}_\mathbf{r}$ などに対しても (たとえそれらが相互に両立しなくても) 同じ知的練習の実行を妨げるものは何もない．

b) さらに，両立可能な検証に関する任意の“集合”の結果を想像できるし，それらの結果が確定値 (それは実際の検証結果に課されるのと同じ拘束あるいは相関を満たす) をもっていたかのように取り扱って計算することができる．

これは再び純粋に知的な練習問題にすぎない．たとえば，1 対のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子があり，第一の粒子について $\mathsf{P}_{1\alpha}$ を測定したとすると，第二の粒子に関しては $\mathsf{P}_{2\beta}$ あるいは $\mathsf{P}_{2\delta}$ が測定できる．ここには二つの異なった (しかも相互に両立しない) 設定があり，それに対して $2^3 = 8$ 通りの異なった結果が考えられる．これらのうちどの結果が真実となるのかを知ることはできないが，8 通りすべての可能性が考えられることは確かである．ここで，粒子対が一重項状態に準備された後，これらの実験が何回も繰り返されると考えてみよう．仮想的結果としては式 (7.39) のような相関および

$$\langle p_{1\alpha}\, p_{2\delta}\rangle = (1 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\delta})/4 \tag{7.40}$$

を満足するように選ばれなければならない．ここで注意すべき点は，与えられたどんな粒子対に対しても実際に実行できるのは二つの実験のうち一つだけであるが，私たちは式 (7.39) と (7.40) がいずれも満たされることを要求しているということである．

同様に，スピン 1 粒子に対して，一つの単位ベクトルを共有する二つの正規直交トライアッド $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ および $\mathbf{m}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{t} = \mathbf{s}\cdot\mathbf{t} = 0$ を考えることができる．ただし $\mathbf{n}\cdot\mathbf{s} \neq 0$．たとえば $\mathbf{s} = (\mathbf{n}+\mathbf{r})/\sqrt{2}$ である．さて，このとき $\mathsf{P}_{\mathbf{m}} := \mathbb{1} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{J})^2$ とともに $\mathsf{P}_{\mathbf{n}}$ と $\mathsf{P}_{\mathbf{r}}$ か，**あるいは** $\mathsf{P}_{\mathbf{s}}$ と $\mathsf{P}_{\mathbf{t}}$ (これらの射影演算子は $\mathsf{P}_{\mathbf{m}}$ と同様に定義される) の**いずれか**の測定が考えられる．これらの仮想的測定の結果は次の両式

$$p_{\mathbf{m}} + p_{\mathbf{n}} + p_{\mathbf{r}} = 1 \tag{7.41}$$

と

$$p_{\mathbf{m}} + p_{\mathbf{s}} + p_{\mathbf{t}} = 1 \tag{7.42}$$

に従わなければならない．与えられた 1 個のスピン 1 粒子に対して実行される一つの検証で，実験的に実現されうるのはたかだかこれら二つのうちの一つだけではあるが，二つの式を**書く**ことは確かにできる．

ここにはしかし，きわめて微妙な困難が存在する: 式 (7.41) の $p_{\mathbf{m}}$ と式 (7.42) の $p_{\mathbf{m}}$ は同じだろうか? これは実験的に確かめることができない．というのもこれら二つの設定は相互に両立しないからである．そこで私たちはもう一つの仮定を提出する．

$\mathcal{I}$. 反実証論的両立性

実行されていない基本的検証の仮想的結果は，それとともに実行されたかもしれない両立可能な検証として何が選ばれたかには依存しない．

これが決定的な意味をもつ “測定状況非依存性” 仮説である．たとえば，1 個のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対する $\mathsf{P}_{1\alpha}$ の測定結果は，離れた第二の粒子に対して $\mathsf{P}_{2\beta}$ かあるいは $\mathsf{P}_{2\delta}$

を測定するかという選択にはよらない．同様に，結果 $p_{\mathbf{m}}$ は式 (7.41) のように $\mathsf{P}_{\mathbf{n}}$ と $\mathsf{P}_{\mathbf{r}}$ を選んでも，あるいは式 (7.42) のように $\mathsf{P}_{\mathbf{s}}$ と $\mathsf{P}_{\mathbf{t}}$ を選んでも同じである．

この最後の仮定の有効性を支持する“心理的理由”は，ある検証に対してある状態準備が予言可能な結果を保証しているときはいつも，この結果は他の両立可能な検証の実行には影響されないということである．この性質を (ちょうど仮定 $\mathcal{F}$ が仮定 $\mathcal{E}$ を一般化しているように) 結果が予言可能でない反実証論的検証に一般化したくなるのは自然なことである．

ま と め

反実証論的両立性を直接確認することはできないが，その論理的帰結の中には量子論と，そして実験結果と相いれないもののあることを示すことができる．たとえば，

$$p_{1\gamma} + p_{2\beta} + p_{1\alpha}\, p_{2\delta} - p_{1\alpha}\, p_{2\beta} - p_{1\gamma}\, p_{2\beta} - p_{1\gamma}\, p_{2\delta} = 0 \text{ あるいは } 1 \tag{7.43}$$

となることは，直接しらべて確かめられる．

演習問題 7.19 これ以外の値はとりえないことを示せ．

したがって，式 (7.43) の左辺の**平均値**は [0,1] の範囲になければならない．これは単にベルの不等式の別の表現[*11]にすぎない．それにもかかわらず，方向 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ を図 7.3 のように選ぶと 式 (7.43) の左辺は，一重項状態にある一対のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対して，平均として

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1 \tag{7.44}$$

となるが，これは式 (7.43) の反実証論的予言と矛盾している．

同様に表 7.1 は，もし結果 $p_{\mathbf{m}}, p_{\mathbf{n}}$ などが，それらの現れるすべての方程式においておのおの同じ数値をとると仮定すると，33 個の射線を式 (7.41) と (7.42) が矛盾に陥るように選ぶことのできることを示している．

量子論的測定状況依存性の背後にある理論的根拠は以下の通りである．「$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1 = 1$ か?」あるいは「$\mathbf{m}\cdot\mathbf{J} = 0$ か?」というような質問に対応した基本的検証は，状態準備

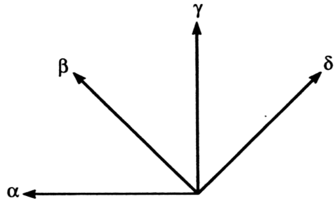


図 7.3 式 (7.42) と (7.43) で用いられた四つの方向は角度 45° をなしている．

[*11] J. F. Clauser and M. A. Horne, *Phys. Rev. D* 10 (1974) 526.

が $\mathrm{Tr}\,(\rho P) = 0$ あるいは 1 を満足し，結果が**予言可能**であるときに限ってよく定義された回答をもつ．これ以外の状態準備に対しては，これらの質問は縮退した演算子で表され，**曖昧**である．結果は他の (両立可能な) 検証のうちどれが実行されたか，たとえば，$\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1$ とともに $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$ を測定しようとしているのか，それとも $\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$ なのか，ということに依存する．

この状況は簡潔に要約できる．**同じ演算子が異なったオブザーバブルに対応しうる．** つまり，与えられたエルミート行列 $P_{\mathbf{m}}$ が一意に "オブザーバブル" を表しているわけではない．$P_{\mathbf{m}}$ という記号は，$P_{\mathbf{m}}$ が単独で測定されたのか，あるいは $P_{\mathbf{n}}$ とともに，それとも $P_{\mathbf{r}}$ とともに測定されたのかによって異なった意味をもつのである．唯一の例外が，式 (7.30) での $K(\mathbf{m},\mathbf{n})$ のような縮退していない変数であり，これは両立可能な検証に対応した可換なオブザーバブルの完全系と等価である．この場合私たちは，**基本的**検証ではなく，実質的に**完全な**検証をもっていることになり，状況依存性は現れない．

演算子とオブザーバブルのこの不一致は，グリーソンの定理の含みを解析する中でベル[*5]がはじめて言及した．

> あるオブザーバブルの測定においては同時に他の [両立可能な] 測定がなされても同じ値が得られるはずだ，ということが暗黙のうちに仮定されていました．··· 結果が同じになるはずだと信ずるア・プリオリ (先験的) な理由はありません．観測結果が (隠れた変数をも含めた) 系の状態だけでなく装置の完全な配置にも依存するかもしれないということはもっともなことです ···

測定状況依存性の概念はさらに初期の段階でボーアの著作[*12]に現れていたが，彼は「原子物体のふるまいと測定装置との相互作用 (これはその現象の起こる条件の定義に寄与している) との間ではどんな明確な区別も不可能である」と力説していた．

7.5 付録：コッヘン–シュペッカーの矛盾に対するコンピューター試験

表 7.1 に与えたコッヘン–シュペッカー定理の証明は，射線がきわめて対称的なパターンを形成していたために非常に簡単だった．トライアッドによっては数値 1 が与えられる "緑" の射線を勝手に選ぶことができた．他のどんな選択をしても，それは座標の読み替えに等価であったからである．

図版 II の 31 個の射線の場合 (114 ページ) のように対称性が少ないと，数値 1 の異なる割当ては軸の読み替えに等価でなくなる．だから，両方の値，0 と 1 を試してみなければならない．片方で矛盾が出ても，もう一つの選択肢がある．矛盾のない色分けを探すことは迷路での路探しと似ている．行き止まりに突き当たってしまったら，この選択をした最後の分岐点まで自身の足跡をたどり，別の選択肢を試みなければなら

[*12] N. Bohr, in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, ed. by P. A. Schilpp, Library of Living Philosophers, Evanston (1949), p. 210.

ない．

以下のFORTRANコードは N 個の射線からなる任意のパターンに対してこの検索を実行する．入力ファイルはすべての直交射線対の一覧である．射線の集合の幾何学的構造を記述するこの一覧は，使用者が用意しなければならない．出力ファイルでは，もし N 個の射線が矛盾なく色分けできれば0と1の文字列が，さもなければ色分け不能とのメッセージが返される．

```
C     Kochen-Specker coloring problem for N rays
      PARAMETER (N=  )
      INTEGER P(N,N), X(N), Y(N), Z(N), C(N), L(N), OC(N,N)
C     P(I,J)=1 if rays I and J are orthogonal, else P(I,J)=0
C     NTRIAD is number of orthogonal triads
C     X(NT), Y(NT), Z(NT) are the three rays in triad NT
C     C(J) is color of ray J: 0 = red, 1 = green, 4 = unknown
C     LVL = number of rays whose color was arbitrarily chosen
C     L(K) is the ray whose color was assigned in Kth choice
C     OC(LVL,J) was color of ray J after LVL arbitrary choices
      OPEN (8,FILE='INPUT.KS')
      OPEN (9,FILE='OUTPUT.KS')
      DO 10 I=1,N
      C(I)=4
C     Colors are unknown as yet
      DO 10 J=1,N
 10   P(I,J)=0
      DO 11 M=1,N*N
C     Read list of pairs of orthogonal rays
      READ (8,'(2I3)',END=12) I, J
      P(I,J)=1
 11   P(J,I)=1
 12   NTRIAD=0
C     Find triads of orthogonal rays
      DO 13 I=1,N
      DO 13 J=I+1,N
      DO 13 K=J+1,N
      IF (P(I,J)+P(I,K)+P(J,K).NE.3) GOTO 13
      NTRIAD=NTRIAD+1
      X(NTRIAD)=I
      Y(NTRIAD)=J
      Z(NTRIAD)=K
 13   CONTINUE
      LVL=0
C     Choose arbitrarily next green ray, whose number is NG
C     All other rays that are already colored are consistent
 14   DO 15 NG=1,N
      IF (C(NG).EQ.4) THEN
        C(NG)=1
        GOTO 16
      ENDIF
 15   CONTINUE
      WRITE (9,'(40I2)') C
C     A consistent coloring has been found
      STOP
 16   LVL=LVL+1
      LAST=1
C     Last arbitrary assignment was to make a ray green
      L(LVL)=NG
```

```
C     This arbitrary assignment was made for ray NG
      DO 17 J=1,N
C     Record the situation after LVL arbitrary choices
 17   OC(LVL,J)=C(J)
 18   DO 19 J=1,N
C     All the rays orthogonal to a green one must be red
 19   IF (P(NG,J).EQ.1) C(J)=0
 20   DO 21 NT=1,NTRIAD
C     Now check whether there are three orthogonal red rays
      IF (C(X(NT))+C(Y(NT))+C(Z(NT)).EQ.0) GOTO 22
 21   CONTINUE
      GOTO 25
 22   IF (LVL+LAST.GT.0) GOTO 23
      WRITE (9,'('' No consistent coloring'')')
C     All options have been exhausted
      STOP
 23   DO 24 J=1,N
C     Restore status quo at preceding branching
 24   C(J)=OC(LVL,J)
      C(L(LVL))=0
      LAST=0
C     Last arbitrary assignment was to make a ray red
      LVL=LVL-1
C     Return to preceding branching
      GOTO 20
 25   DO 26 NT=1,NTRIAD
C     Is there a triad with two red rays and a colorless ray?
C     If so, the colorless ray must be painted green
      IF (C(X(NT))+C(Y(NT))+C(Z(NT)).EQ.4) GOTO 27
 26   CONTINUE
      GOTO 14
 27   IF (C(X(NT)).EQ.4) THEN
        C(X(NT))=1
        NG=X(NT)
        GOTO 18
      ENDIF
      IF (C(Y(NT)).EQ.4) THEN
        C(Y(NT))=1
        NG=Y(NT)
        GOTO 18
      ENDIF
      IF (C(Z(NT)).EQ.4) THEN
        C(Z(NT))=1
        NG=Z(NT)
        GOTO 18
      ENDIF
      END
```

演習問題 7.20 図版 II (114 ページ) の 31 個の射線が 71 個の直交射線対を形成し，これは 17 個の直交トライアッドに属していることを示せ． ★

演習問題 7.21 これら 31 個の射線からどの射線 1 個をとっても，残った集合は矛盾なく色分け可能となることを示せ． ★★

演習問題 7.22 4 次元におけるコッヘン–シュペッカー問題に対して同様なプログラムを書き下せ． ★

7.6 参 考 文 献

F. J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variable Theories*, Pergamon, Oxford (1973).

M. Redhead, *Incompleteness, Nonlocality, and Realism*, Clarendon Press, Oxford (1987).

これらの本は優れているが，この章と前章で議論した最近の進展のため，残念ながら今では時代遅れである．

N. D. Mermin, "Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems," *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 3373; "Hidden variables and the two theorems of John Bell," *Rev. Mod. Phys.* 65 (1993) 803.

J. Zimba and R. Penrose, "On Bell non-locality without probabilities: more curious geometry," *Studies in History and Philosophy of Science*, 24 (1993) 697.

この論文には 12 面体の幾何学的性質に関連したコッヘン–シュペッカー定理のエレガントな証明が含まれている．証明はスピン $\frac{3}{2}$ 粒子の次の性質にもとづいている．関係式

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{J}\,\psi = \tfrac{1}{2}\,\psi \qquad \text{および} \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\phi = \tfrac{1}{2}\,\phi \tag{7.45}$$

を満足する固有ベクトル ψ と ϕ は，$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 1/3$ の場合直交する．$\cos^{-1}(1/3)$ は 12 面体の最近接頂点対が中心に対して張る角度であることを思い起こそう．したがって，12 面体の 20 の頂点方向のスピン成分が $\frac{1}{2}$ かどうかをしらべる (相互に両立しない) スピン測定の結果を考えれば，次のコッヘン–シュペッカー色分け規則が得られる．

(a) 最近接の 2 頂点が緑になることはありえない．
(b) 互いに反対方向を向いている頂点対に隣り合う 6 個の頂点すべてが赤になることはない．

規則 (a) は上に述べた直交性から導かれ，規則 (b) は 20 個の "絶対的" 状態ベクトル *8 を，12 面体の各頂点に対して一つずつ，以下のような仕方で余分に導入して証明することができる．各頂点 V_k には 3 個の隣り合う頂点が存在し，それらは互いに最近接である．したがってこれら 3 個の頂点に対応する式 (7.45) のタイプの固有ベクトルは，(ヒルベルト空間で) 相互に直交している．(ヒルベルト空間で)4 番目の直交ベクトルが頂点 V_k に属する "絶対ベクトル" である．色分け規則 (a) と (b) が矛盾に陥ることは容易に示される*13．

高 次 元

任意の次元 $n > 3$ に対してコッヘン–シュペッカーのベクトル集合は，$n-1$ 次元の集合から次のようにして常に求めることができる．まず，これらのベクトルすべてにヌルの第 n 成分を加えるとともに，一つの新しいベクトル $0\cdots01$ を導入する．唯一矛盾のない色分けは，この新しいベクトルを緑に，他のすべてを赤とすることである．後者には $10\cdots0$ が含まれる．さて，上記のすべてのベクトルの第 1 成分と第 n 成分とを交換してさらにベクトルを導入する．この完全集合には首尾一貫した色分けは存在しない．しかしずっと小さなコッヘン–シュペッカーのベクトル集合が得られる場合もある．

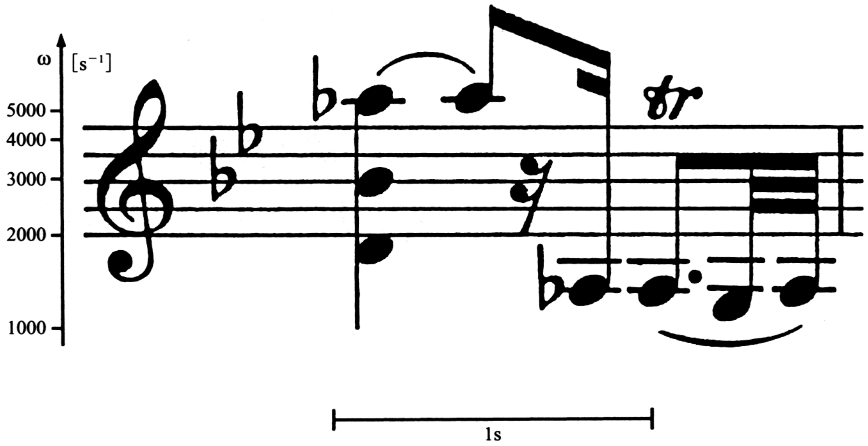
M. Kernaghan and A. Peres, "Kochen-Specker theorem for eight-dimensional space," *Phys. Letters A* 198 (1995) 1.

絡み合った三つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子からなる系に対して矛盾が導かれている (152 ページを参照) が，その証明には 36 個のベクトルを必要としている．この論文では，ある既知の純粋状態に準備された系に対して成立する，コッヘン–シュペッカー定理の "特定状態" 版が導入されている．このとき射影演算子は既知の状態に合わせて選ぶことができ，より少ない演算子 (今の場合たった 13 個) で間に合う．

---

*13 未公表の論文でこの証明をはじめて述べたペンローズは，表 7.1 の 33 個の射線が，エッシャーの名高いリトグラフ *Waterfall* に見られるように，三つの互いに入り組んだ立方体によって生成されうるということも示している．より詳細に関しては *Scientific American* 268 (Feb. 1993) 12 を参照せよ．

第III部
量子動力学と情報理論



図版 III　上に示した音楽記号は時間と周波数に関する情報を含んでいる．これらは相補的パラメーターで，“不確定性関係” $\Delta t\,\Delta\omega \geq \frac{1}{2}$ を満たしている．(この不等式はフーリエ変換の一般的性質である.) この不確定領域は上図のスケールではたいへん小さく，この制限は音楽の演奏上重大な困難は何も引き起こさないことを示せ．しかし，たいへん低い音符を，たとえばダブルベースで演奏しようとすると，これらの音符をきわめて短くすることは困難である．楽譜の書き方のせいで，この図における時間スケールは線形ではないが，振動数のスケールだけは近似的に対数的となっている．1 個の 8 分音符は約 0.22 秒である．この図はモーツアルトの作品 * からとった．

*W. A. Mozart, *Duet for violin and viola in B flat major* (K. 424).

8
時 空 対 称 性

8.1　対称性とは何か?

対称性とは異なる物理的状況間の等価性のことであり，何らかの物理的知識を獲得できないことがその「対称性の正しさを保証している」[*1]．たとえば，右手用の手袋の写真と，鏡に写った左手用手袋の写真とを区別することは不可能である．

ある実験室で観測している自然法則は他の実験室でも有効である．これらの法則は，それを確かめるために用いられた科学的装置の**並進**と**回転**のもとで不変である．さらにそれは，これらの装置の**一様な運動**のもとでも不変である．これが**運動学的対称性**であり，最初ガリレイによって力学法則に対して仮定され，その後マイケルソンとモーレイによって真空中の光学現象に対して成立していることが発見された．アインシュタインはこの対称性が電磁気学一般に適用されると提案した．これが相対性原理であり，重力は例外かもしれないが[*2]，今日すべての物理現象で確実に成立している．

能動的変換と受動的変換

対称性の存在は，能動的および受動的とよばれる二つのタイプの変換が等価であることにつながる．たとえば，図 8.1(a) に描かれた手は，形を変えず新しい位置へ能動的に回転されている．新しい (たとえば，指先の) 座標はもとの座標と次のように関連している．

$$
\begin{aligned}
F'_x &= F_x \cos\theta - F_y \sin\theta \\
F'_y &= F_x \sin\theta + F_y \cos\theta
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

図 8.1(b) において，手は回転されていないが，座標は同じ角度だけ回転されている．これが受動的回転であり，指先の新しい座標成分は

$$
\begin{aligned}
F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \\
F_{y'} &= -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

[*1] F. E. Low, *Comm. Nucl. Particle Phys.* 1 (1967) 1.

[*2] 一般相対性理論によれば，重力現象の記述には，実験装置のような広がった物体の剛体運動を許さない非ユークリッド幾何学が必要である．したがって，一般相対論は，特殊相対論とは異なり，時空対称の理論ではない．(それにもかかわらず，たとえば球対称ブラックホールのように，限定された対称性をもったアインシュタインの重力場方程式の厳密解が存在する.)

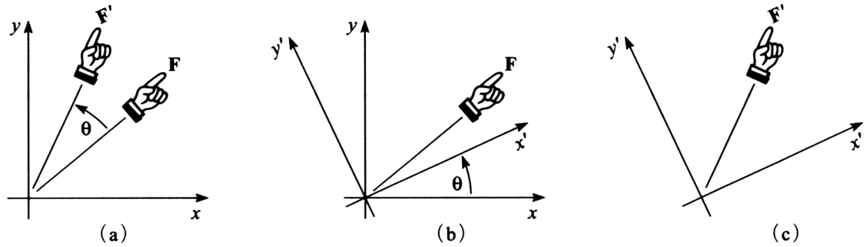


図 8.1　能動的変換と受動的変換

である．明らかに，式 (8.2) の変換行列は式 (8.1) の変換行列の逆行列である．したがって，もし，図 8.1(c) に示すように，両者 (能動的変換と受動的変換) が同時に行われたとすると

$$F'_{x'} = F_x \qquad \text{かつ} \qquad F'_{y'} = F_y \tag{8.3}$$

となる．新しい成分の数値はもとの値と同じである．単にこれらの数値を知っただけでは，変換が行われたのかどうかはわからない．

この分離不能性は平面の物理的性質 (平面図形は剛体的に回転することが可能である) に起因している．一方，不規則な表面は剛体的運動を許さない．もちろん，受動的座標回転は許されるが，これはその点の名前の呼び替え以上のものではない．しかし，これに対応した，変位された物体を変えないような能動的変換は存在しない *2．

演習問題 8.1　右手用手袋は裏返すと左手用手袋となる．[内側と外側の生地は区別できない (編んだ手袋に対してはよい近似) と仮定せよ.] これは能動的変換の一例である．対応する受動的変換は何か?

さて次に**量子**対称性に注目しよう．量子状態はヒルベルト空間内のベクトルで表されており，やはり成分で記述することができる．これらの成分を分類する添字は最大量子検証の可能な出力結果に関連している (3.1 節を参照)．受動的変換は異なる基底 (すなわち，異なる最大検証) のとり方に対応しており，ユニタリー行列で表される．一方，能動的変換は量子系状態の実際の変化である．

例によって，対称性の存在は能動的変換と受動的変換の間の対応を意味している．そこで，別の最大検証を選んで，状態のヒルベルト空間に対して新しい基底を定義した場合には，ある能動的変換が存在し，変換後に得られる新しい状態の新しい基底に関する成分が，ちょうど式 (8.3) のように，もとの状態の古い基底に関する成分に等しくなっていると期待するかもしれない．実際のところ，量子論で用いられているベクトル空間は**複素**空間であり，物理的状態とベクトルの成分との間に 1 対 1 の対応がないため，状況はもっと複雑である．最大検証によって定義される基底ベクトルには勝手な位相を掛けることができるから，与えられた物理状態を表すベクトルの成分には位相の任意性が存在する．

しかし，遷移確率 $P_{\mathsf{uv}} = |\langle \mathsf{u}, \mathsf{v}\rangle|^2$ は実験的に観測可能であり，この位相の任意性には影響されない．たとえば，ベクトル u は水平ビーム内の垂直方向偏極光子を，そしてベクトル v は同じビーム内の垂直軸から角度 θ 方向の直線偏極光子を表しているとしよう．u 光子を準備し，その後それらが v 光子であるかどうかを検証する装置が，別の場所まで剛体的に動かされ，異なった向きに置かれたと考えてみよ．ヒルベルト空間内で最初に選ばれたもとの基底に関しては，光子は今度は異なる偏極状態 u′ に準備され，異なる偏極状態 v′ に関して検証されることになる．しかし，光学法則は光学装置の剛体的変位には影響されない．したがって，検証に合格する確率は不変 $P_{\mathsf{u'v'}} = P_{\mathsf{uv}} = \cos^2\theta$ である．

8.2 ウィグナーの定理

ウィグナー[*3]による重要な定理のおかげで，この不変性は広範な意味合いをもつ．ヒルベルト空間の写像 $\mathsf{u} \to \mathsf{u}'$, $\mathsf{v} \to \mathsf{v}'$ などを考えよう．私たちがこの写像に関して仮定する**唯一**のことは

$$|\langle \mathsf{u}', \mathsf{v}'\rangle|^2 = |\langle \mathsf{u}, \mathsf{v}\rangle|^2, \qquad \forall \quad \mathsf{u},\ \mathsf{v} \tag{8.4}$$

である．特に，ユニタリー性はもちろんのこと線形性も仮定しない．ウィグナーの定理は，新しいベクトル $(\mathsf{u}', \mathsf{v}', \cdots)$ の位相が，任意の複素係数 α と β に対して

$$(\alpha\,\mathsf{u} + \beta\,\mathsf{v})' = \alpha\,\mathsf{u}' + \beta\,\mathsf{v}' \qquad \text{かつ} \qquad \langle \mathsf{u}', \mathsf{v}'\rangle = \langle \mathsf{u}, \mathsf{v}\rangle \tag{8.5}$$

となるか，あるいは

$$(\alpha\,\mathsf{u} + \beta\,\mathsf{v})' = \overline{\alpha}\,\mathsf{u}' + \overline{\beta}\,\mathsf{v}' \qquad \text{かつ} \qquad \langle \mathsf{u}', \mathsf{v}'\rangle = \langle \mathsf{v}, \mathsf{u}\rangle \tag{8.6}$$

となるように再定義可能であることを述べている．最初の場合，写像は線形・ユニタリーであり，第二の場合は反線形・反ユニタリーである．ウィグナーの定理の証明は以下の通りである．

e_j を完全正規直交基底のベクトルとし，これは e'_j に写像されるとする．新しいベクトル e'_j も式 (8.4) のおかげで正規直交基底である．次のベクトルの集合

$$\mathsf{f}_j = \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_j \qquad (j = 2,\, 3, \cdots) \tag{8.7}$$

を考えよう．これらは f'_j に写像される．式 (8.4) より

$$|\langle \mathsf{e}'_1, \mathsf{f}'_j\rangle| = |\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{f}_j\rangle| = 1 \tag{8.8}$$

であり，また

$$|\langle \mathsf{e}'_j, \mathsf{f}'_k\rangle| = |\langle \mathsf{e}_j, \mathsf{f}_k\rangle| = \delta_{jk} \qquad (j > 1) \tag{8.9}$$

[*3] E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, New York (1959) p. 233.

となる．したがって，任意の $j>1$ に対して

$$\mathsf{f}'_j = x_j\,\mathsf{e}'_1 + y_j\,\mathsf{e}'_j \tag{8.10}$$

と書くことができる．ただし $|x_j| = |y_j| = 1$ である．次に変換されたベクトルの位相を

$$\mathsf{f}'_j \to \mathsf{f}''_j = \mathsf{f}'_j/x_j \qquad \text{かつ} \qquad \mathsf{e}'_j \to \mathsf{e}''_j = y_j\,\mathsf{e}'_j/x_j \tag{8.11}$$

(ここで $\mathsf{e}''_1 = \mathsf{e}'_1$ とする) と再定義することによって式 (8.6) のように

$$\mathsf{f}''_j = \mathsf{e}''_1 + \mathsf{e}''_j \tag{8.12}$$

が得られる．ここからは新しい位相を用い e''_j のかわりに e'_j と書くことにする．こうして写像

$$\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_j \quad \to \quad (\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_j)' = \mathsf{e}'_1 + \mathsf{e}'_j \tag{8.13}$$

が得られる．

ここで任意のベクトルの写像

$$\mathsf{u} = \sum_i a_i\,\mathsf{e}_i \quad \to \quad \mathsf{u}' = \sum_i a'_i\,\mathsf{e}'_i \tag{8.14}$$

を考えよう．このとき

$$|a'_j| = |\langle \mathsf{e}'_j\,,\mathsf{u}'\rangle| = |\langle \mathsf{e}_j\,,\mathsf{u}\rangle| = |a_j| \tag{8.15}$$

が得られる．さらに

$$\langle \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_j\,,\mathsf{u}\rangle = a_1 + a_j \qquad \text{および} \qquad \langle \mathsf{e}'_1 + \mathsf{e}'_j\,,\mathsf{u}'\rangle = a'_1 + a'_j \tag{8.16}$$

となる．すると式 (8.4) と (8.13) から

$$|a_1 + a_j|^2 = |a'_1 + a'_j|^2 \tag{8.17}$$

が得られる．式 (8.15) と合わせれば，これより

$$\overline{a_1}\,a_j + a_1\,\overline{a_j} = \overline{a'_1}\,a'_j + a'_1\,\overline{a'_j} \tag{8.18}$$

となる．この方程式を

$$(a_1\,\overline{a_1}\,a_j\,\overline{a_j}\,)^{1/2} = (a'_1\,\overline{a'_1}\,a'_j\,\overline{a'_j}\,)^{1/2} \tag{8.19}$$

で割って

$$(\,\overline{a_1}\,a_j/a_1\overline{a_j}\,)^{1/2} + \text{c.c.} = (\,\overline{a'_1}\,a'_j/a'_1\overline{a'_j}\,)^{1/2} + \text{c.c.} \tag{8.20}$$

が得られるが，これは

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta'} + e^{-i\theta'} \tag{8.21}$$

という形になり，二つの解 $\theta' = \pm\theta$ をもつ．次にこれらを一つずつ考えよう．

ユニタリー写像：$\theta' = \theta$ の場合，

$$\overline{a_1'}\, a_j' / a_1' \overline{a_j'} = \overline{a_1}\, a_j / a_1 \overline{a_j} \tag{8.22}$$

となる．$a_1' = a_1$ となるように u' の位相を再定義しよう．すると $a_j' / \overline{a_j'} = a_j / \overline{a_j}$ となり，式 (8.15) から $a_j' = a_j$ となる．したがって

$$\mathsf{u}' = \sum_i a_i\, \mathsf{e}_i' \tag{8.23}$$

となる．別のベクトル $\mathsf{v} = \sum b_i \mathsf{e}_i$ が与えられれば，同様に v' の位相を選んで $\mathsf{v}' = \sum b_i \mathsf{e}_i'$ とすることができるから，式 (8.5) はただちに導出される．

反ユニタリー写像：もし $\theta' = -\theta$ ならば

$$\overline{a_1'}\, a_j' / a_1' \overline{a_j'} = a_1\, \overline{a_j} / \overline{a_1}\, a_j \tag{8.24}$$

が得られる．u' の位相を再定義して $a_1' = \overline{a_1}$ としよう．すると $a_j' / \overline{a_j'} = \overline{a_j} / a_j$ となり，式 (8.15) から $a_j' = \overline{a_j}$ となる．したがって

$$\mathsf{u}' = \sum_i \overline{a_i}\, \mathsf{e}_i' \tag{8.25}$$

となる．別のベクトル $\mathsf{v} = \sum b_i \mathsf{e}_i$ が与えられれば，同様に v' の位相を選んで $\mathsf{v}' = \sum \overline{b_i} \mathsf{e}_i'$ とし，これから式 (8.6) が得られる．

ある特定の変換がユニタリーであるか反ユニタリーであるかはその物理的性質に依存する．並進や回転のような連続群に属する変換は，ユニタリーでしかありえない．その理由は次の通りである．この場合，任意の有限変換は，無限小変換過程 (そこでは変換後のベクトル e_i' はいくらでも e_i に近い) の積み重ねとして生成できる．u' を u に近づけようとすれば ($a_i' = \overline{a_i}$ ではなく) $a_i' = a_i$ を選択せざるをえない．したがって反ユニタリー変換は排除されるのである．

一方，この連続性の議論は，空間反転や時間反転のような離散的変換には当てはまらない．空間反転はユニタリー変換で表されるが，時間反転は反ユニタリーであることが後でわかる．

最後に，同じ結果は式 (8.4) よりも弱い前提，すなわち単に $\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = 0$ は $\langle \mathsf{u}', \mathsf{v}' \rangle = 0$ を意味すると仮定するだけで導出できることに注意しておこう．しかし，その場合の証明ははるかに難しい[*4,*5]．

[*4] G. Emch and C. Piron, *J. Math. Phys.* 4 (1963) 469.
[*5] N. Gisin, *Am. J. Phys.* 61 (1993) 86.

8.3 連続変換

連続パラメーター α_j に依存するユニタリー行列 $\mathsf{U}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ の集合を考えよう．これらの行列は，パラメーター α_j の定義域が以下のように選ばれているならば，連続変換**群**の要素と 1 対 1 に対応している．

1) これらの行列の一つ，そして一つだけが単位行列 $\mathbb{1}$ である．パラメーター α_j は $\mathsf{U}(0, 0, \cdots) = \mathbb{1}$ となるように定義しておくのが普通である．
2) 二つの行列の積はいずれも，再びその集合に含まれる．
3) この集合の各行列は，**同じ集合内に**一意の逆行列をもつ，すなわち，各パラメーター α_j にどんな値をとっても，$\mathsf{U}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)\,\mathsf{U}(\beta_1, \beta_2, \cdots) = \mathbb{1}$ となるようなパラメーター β_j が再び与えられた定義域内に存在する．

群の 4 番目の特徴である結合法則 $\mathsf{A}(\mathsf{BC}) = (\mathsf{AB})\mathsf{C}$ は，行列に対しては自動的に満足されている．

演習問題 8.2　パラメーターの定義域が適切に選ばれていない場合，上述の判定条件の一つ以上を満足しなくなる連続変換の例をあげよ．

単位行列に近いユニタリー行列は**無限小変換**に対応している．(単位行列自身は**恒等変換**を生成する.) 無限小変換の重要性は，任意の有限ユニタリー変換が無限小変換の指数関数として求められるという事実に起因している．たとえば，複素平面内の有限回転は $e^{i\theta}$ という因子で表されるが，これは $(1 + i\theta/N)^N$ の $N \to \infty$ における極限値である．この場合，$\mathsf{U} = e^{i\theta}$ は自明な 1 次元ユニタリー行列である．より一般には，任意のエルミート行列 H に対して，

$$\mathsf{U} = e^{-i\mathsf{H}} = \lim_{N \to \infty} (\mathbb{1} - i\mathsf{H}/N)^N \tag{8.26}$$

がユニタリー行列となる．このことは，H を (したがって U もまた) 対角化する基底でこの方程式を書いてみれば容易にわかる．実際は，**反エルミート**行列 $\mathsf{A} = -i\mathsf{H}$ を使って

$$\mathsf{U} = e^{\mathsf{A}} = \mathbb{1} + \mathsf{A} + \frac{1}{2}\mathsf{A}^2 + \cdots \qquad (\mathsf{A}^\dagger = -\mathsf{A}) \tag{8.27}$$

と書く方が，しばしばより便利である．

演算子の変換

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を新しい基底によって張ったとすると，状態ベクトル ψ の成分は，式 (3.8) で見たように，ユニタリー写像 $\psi \to \psi' = \mathsf{U}\psi$ を受ける．対応する演算子の変換則は，その平均値 $\langle \psi, \Omega\psi \rangle$ を不変とするように

$$\Omega \to \Omega' = \mathsf{U}\,\Omega\,\mathsf{U}^\dagger \qquad \text{(受動的変換)} \tag{8.28}$$

となる．実際，実験的に観測可能なこれらの平均値は，$\mathcal{H}$ に対する勝手な基底の選び方には依存しえない (64 ページも参照)．より一般的には任意の行列要素 $\langle\phi,\Omega\psi\rangle$ が受動的変換のもとで不変である．

演習問題 8.3 式 (8.27) から演算子の変換則が

$$e^{\mathsf{A}}\,\Omega\,e^{-\mathsf{A}} = \Omega + [\mathsf{A},\Omega] + \frac{1}{2}\,[\mathsf{A},[\mathsf{A},\Omega]] + \cdots \tag{8.29}$$

と書けることを直接示せ．この展開の次の項は何か?

以下は式 (8.29) の別証である．λ を実数パラメーターとして

$$\Omega(\lambda) = e^{\lambda\mathsf{A}}\,\Omega\,e^{-\lambda\mathsf{A}} \tag{8.30}$$

を定義する．$d(e^{\pm\lambda\mathsf{A}})/d\lambda \equiv \pm\mathsf{A}\,e^{\pm\lambda\mathsf{A}}$ であるから，

$$d\Omega(\lambda)/d\lambda = [\mathsf{A},\Omega(\lambda)] \tag{8.31}$$

が得られる．この演算子微分方程式の，初期条件 $\Omega(0) = \Omega$ に従う解は

$$\Omega(\lambda) = \Omega + [\mathsf{A}\,,\lambda\Omega + \frac{1}{2}\,\lambda^2[\mathsf{A},\Omega] + \cdots] \tag{8.32}$$

である．このことは (8.32) の右辺を λ に関して微分してみれば容易に確かめられる．この解で $\lambda = 1$ とすれば式 (8.29) が求まる．

上の方程式は，**受動的**変換 (ヒルベルト空間内の基底の変化) のもとでの演算子 (つまり，有限あるいは無限次元行列) のふるまいに関係していたことを思い起こそう．一方，もし写像 $\psi \to \psi' = \mathsf{U}\psi$ が能動的変換 (すなわち，実際の物理系の状態変化，ただし $\mathcal{H}$ に対する基底は同じ) によるものであれば，物理的オブザーバブルを表すために用いられる行列は変化しない．たとえば，磁場中でのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の歳差を記述する場合，スピノール ψ の成分は時間発展するが，パウリの $\boldsymbol{\sigma}$ 行列は発展しない．このとき，状態 ψ に課された能動的変換の結果として，観測可能な期待値 $\langle\psi,\boldsymbol{\sigma}\psi\rangle$ が時間発展することは明らかである．

ハイゼンベルク描像

能動的変換を記述するもう一つ別の方法があり，これは**ハイゼンベルク描像**[*6]と称せられている．ベクトルを変換するかわりに，演算子を

$$\Omega \to \Omega_{\mathrm{H}} = \mathsf{U}^\dagger\,\Omega\,\mathsf{U} \qquad \text{(能動的変換)} \tag{8.33}$$

と変換すれば，その結果の平均値

$$\langle\psi,\Omega_{\mathrm{H}}\,\psi\rangle = \langle\psi,\mathsf{U}^\dagger\Omega\mathsf{U}\;\psi\rangle = \langle\mathsf{U}\psi,\Omega\;\mathsf{U}\psi\rangle \tag{8.34}$$

[*6] 通常，"ハイゼンベルク描像" という言葉は時間経過によって生成されるユニタリー変換に与えられている．ここでは，任意のユニタリー変換に対して，より一般的に使用する．

は，Ω を不変に保って $\psi \to \psi' = \mathsf{U}\psi$ とした場合の結果と同じになる．変換則 (8.33) が受動的変換に対する式 (8.28) の**反対**となっていることに注意せよ．能動的変換と受動的変換 (8.1) と (8.2) (両者は互いに逆である) に対して見たように，対称性があれば二つの変換は常に反対となる．

ψ が固定され Ω が変換されるハイゼンベルク描像は，手が凝っていて不自然と思うかもしれない．実は，**力学変数**が正準変換を受ける古典物理の精神により近いのはハイゼンベルク描像なのである．状態ベクトル ψ (その役割は状態準備の過程を表すこと) には古典的対応がない[*7]というのがポイントである．一方，量子**オブザーバブル**は，適当な状況下では古典正準変数と似た性質をもっている．両者の間の関係は，量子論的性質がしばしば古典模型との類似にもとづいて推測することのできるハイゼンベルク描像で見るのが一番よい．しかし，これらの半古典的議論を使いたいのであれば，きわめて慎重にならなくてはならない．というのも，古典物理学と量子物理学の間に形式的対応は存在しないからである．この問題は 10 章でさらに議論する．

連続変換の生成子

固定軸まわりの回転 (これは一つの回転角で定義される) のように，1 個のパラメーター α に依存する変換を考えよう．$\mathsf{U}(\alpha)$ におけるパラメーター α は回転角そのものかもしれないが，より一般には，その角度の任意関数であってよい．したがって，二つの回転を引き続き行った結果は，一般に，$\mathsf{U}(\alpha'')\mathsf{U}(\alpha') = \mathsf{U}(f(\alpha'', \alpha'))$ である．明らかに，パラメーター α を回転角に比例して選ぶと，$\mathsf{U}(\alpha'')\mathsf{U}(\alpha') = \mathsf{U}(\alpha'' + \alpha')$ と簡単になって有利である．このとき

$$\mathsf{U}(\alpha) = e^{\mathsf{A}} = e^{-i\alpha\mathsf{G}} \tag{8.35}$$

と書くことができる．ここで G は α に依存しない．エルミート演算子 G は連続変換 $\mathsf{U}(\alpha)$ の**生成子**とよばれる．対称性に対応する変換の生成子は，しばしば，エネルギー，運動量，電荷など (これらの量は，もちろん，適当な単位で表されなければならない) のように，簡単な物理的意味をもっている．

三つの角度に依存する 3 次元回転のように，いくつかの独立なパラメーターが存在する場合，何がよいパラメーターの選び方かは自明でない．以下はその一例である．

演習問題 8.4　3 次元回転のパラメーターとしてはオイラー角 ϕ, θ, ψ がよく使われている．同じ軸のまわりに同じ角度だけ引き続いて 2 度行われた回転は，オイラー角を 2 倍したものとは等しくないこと $\mathsf{U}(2\phi, 2\theta, 2\psi) \neq [\mathsf{U}(\phi, \theta, \psi)]^2$ を示せ．　★

この演習問題から，$\mathsf{U}(\phi, \theta, \psi)$ は演算子 A を ϕ, θ, ψ の線形結合として式 (8.35) のようには書けないことがわかる．この目的にもっと適したパラメーターは，回転軸をその

[*7] なるほど，量子密度行列 (純粋状態に対しては $\rho = \psi\psi^\dagger$) は位相空間での古典的リウビル密度と類似性をもってはいるが．

方向とし，回転角をその大きさとする軸性ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の成分である．このとき，定義から $\mathsf{U}(2\boldsymbol{\alpha}) \equiv [\mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha})]^2$ となる．より一般的には，式 (8.35) のように $\mathsf{A} = -i \sum \alpha_m \mathsf{J}_m$ として $\mathsf{U} = e^{\mathsf{A}}$ となる．生成子 J_m は $\hbar$ を単位とした角運動量成分という物理的意味をもっている．このことは 8.5 節でさらに議論する．

引き続いて行われた変換

二つの非可換なユニタリー変換 e^{A} と e^{B} を引き続いて行った結果についてしらべよう．もし $[\mathsf{A},\mathsf{B}] \neq \mathsf{O}$ であれば e^{A} と e^{B} は一般には交換しないが，次の演習問題のように例外もある．

演習問題 8.5　$[\mathsf{x},\mathsf{p}] = i\hbar\mathbb{1}$ の場合，$[e^{2\pi i m \mathsf{x}/a}, e^{ina\mathsf{p}/\hbar}] = \mathsf{O}$ となることを示せ．ただし，m と n は任意の整数である．　⋆

演習問題 8.6　さらに，m と n をすべての整数として，$e^{2\pi i m \mathsf{x}/a}$ と $e^{ina\mathsf{p}/\hbar}$ の集合は可換な演算子の完全系となっていることを示せ[*8]．　⋆⋆

e^{A} と e^{B} が非可換な一般の場合に戻り，式 (8.30) のように連続パラメーター λ を導入しよう．このとき λ の 2 次までで，

$$e^{-\lambda\mathsf{B}}\, e^{-\lambda\mathsf{A}}\, e^{\lambda\mathsf{B}}\, e^{\lambda\mathsf{A}} \simeq \mathbb{1} + \lambda^2\,[\mathsf{B},\mathsf{A}] \simeq e^{\lambda^2[\mathsf{B},\mathsf{A}]} \tag{8.36}$$

が得られる．この関係式は，行列 A と B のあらわな形に言及することなく交換子 $[\mathsf{A},\mathsf{B}]$ の値が得られるという理由から，たいへん有益となる (8.5 節を参照)．

演習問題 8.7　次の関係式

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\mathsf{B}}e^{-\lambda\mathsf{A}}\,\Omega\, e^{\lambda\mathsf{A}}e^{\lambda\mathsf{B}} - e^{-\lambda\mathsf{A}}e^{-\lambda\mathsf{B}}\,\Omega\, e^{\lambda\mathsf{B}}e^{\lambda\mathsf{A}} &\simeq \lambda^2\left([\mathsf{B},[\mathsf{A},\Omega]] - [\mathsf{A},[\mathsf{B},\Omega]]\right) \\ &= -\lambda^2\,[[\mathsf{A},\mathsf{B}],\Omega] \simeq e^{-\lambda^2[\mathsf{A},\mathsf{B}]}\,\Omega\, e^{\lambda^2[\mathsf{A},\mathsf{B}]} - \Omega \end{aligned} \tag{8.37}$$

を示せ．ヒント：式 (8.29) と恒等式

$$[[\mathsf{A},\mathsf{B}],\mathsf{C}] + [[\mathsf{B},\mathsf{C}],\mathsf{A}] + [[\mathsf{C},\mathsf{A}],\mathsf{B}] \equiv \mathsf{O} \tag{8.38}$$

を使え．

演習問題 8.8　式 (8.36) のべき展開で，次の項は $\frac{1}{2}\lambda^3\,\{\,[\mathsf{A},[\mathsf{A},\mathsf{B}]] - [\mathsf{B},[\mathsf{B},\mathsf{A}]]\,\}$ となることを示せ．　⋆

[*8] J. Zak, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1385.

ポアソン括弧式との対応

恒等式 (8.38) は形式的にはポアソン括弧式に対するヤコビの恒等式[*9]と同じである．他にもポアソン括弧式に対する恒等式と形式的に似た交換子恒等式，とりわけ

$$[\mathsf{A}, \mathsf{BC}] \equiv [\mathsf{A}, \mathsf{B}]\,\mathsf{C} + \mathsf{B}\,[\mathsf{A}, \mathsf{C}] \tag{8.39}$$

と

$$[\mathsf{AB}, \mathsf{C}] \equiv \mathsf{A}\,[\mathsf{B}, \mathsf{C}] + [\mathsf{A}, \mathsf{C}]\,\mathsf{B} \tag{8.40}$$

が存在する．量子版では因子の順番を注意深く保存しなければならない．(もちろん古典的ポアソン括弧式では関係ないが.)

これらの例から示唆される対応則は

$$[A, B]_{\mathrm{PB}} \leftrightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}]/i\hbar \tag{8.41}$$

である．この規則は，A と B が直角座標と運動量であったり，あるいはその線形もしくは 2 次関数である場合には明らかにうまくいく．しかし，一般には量子交換子と古典的ポアソン括弧式との間に厳密な対応は存在しない．たとえば，演習問題 8.5 のヌル交換子に対応するのは，0 ではないポアソン括弧式である．

8.4 運動量演算子

能動的並進 $x \to x + a$ を考えよう．量子系は距離 a だけ移動される．波動関数には何が起こるのだろうか?

この質問を意味あるものとするためには，まずヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を座標付けする基底を特定しなければならない．たとえば，内積を

$$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}\, v(x)\, dx \tag{4.53}$$

として，$\mathcal{H}$ を x の関数で表そう．これは $\mathcal{H}$ の x 表示とよばれる．その物理的意味は 99 ページの図 4.3(a) に説明した．

並進対称性から，量子系の距離 a だけの変位は，座標原点の $-a$ だけの変位と区別できない．後者は受動的変換であり，単なる変数の置き換え $x = x' - a$ にすぎない．したがって，状態ベクトルの変換則を $\mathsf{v}(x) \to \mathsf{Uv}(x) = \mathsf{v}(x - a)$ と書きたくなるかもしれない．たとえば，ガウス関数 e^{-x^2} は $e^{-(x-a)^2}$ となるから，そのピークは $x = 0$ から $x = a$ に移り，実際，系は距離 $+a$ だけ移動している．(対称変換を扱う場合には，いつも以上に $\pm$ の符号に気を付けなければならない!)

---

*9 H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1980) p. 399.

実は，状況はもっと複雑である．状態ベクトル $\mathsf{v}(x)$ は，空間の各点で客観的数値をもつような，座標変換のもとで不変な古典的スカラー場ではない．量子論の状態ベクトルはヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で定義されている．この空間で受動的変換を行った場合，新しい基底ベクトルのおのおのには任意の位相 (各ベクトルに対して異なる位相) を掛けることができる．いま使っている $\mathcal{H}$ の x 表示では，厳密にいえば (ベクトルの添字 x が連続値をとるため) 基底ベクトルは存在しないが，上記の任意性は依然として存在している．したがって座標 x の変化に対する最も一般的な表現は

$$\mathsf{v}(x) \;\rightarrow\; \mathsf{v}'(x) = \mathsf{U}\,\mathsf{v}(x) = e^{i\phi(x)}\,\mathsf{v}(x-a) \tag{8.42}$$

であり，ここには任意の位相関数 $\phi(x)$ が関与している．

演習問題 8.9　変換 (8.42) がユニタリーであること，そして位置演算子 x の n 乗が

$$\langle \mathsf{v}, \mathsf{x}^n\,\mathsf{v}\rangle \;\rightarrow\; \langle \mathsf{v}', \mathsf{x}^n\,\mathsf{v}'\rangle = \langle \mathsf{v}, (\mathsf{x}+a)^n\,\mathsf{v}\rangle \tag{8.43}$$

とふるまうことを示せ．

演習問題 8.10　U を式 (8.42) のように定義されたものとすると，x が

$$\mathsf{x} \;\rightarrow\; \mathsf{U}\,\mathsf{x}\,\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{x} - a \tag{8.44}$$

と変換することを示せ．

式 (8.44) の負号に戸惑っただろうか? これは印刷ミスではない．式 (8.43) からはっきりわかるように，系は疑いなく距離 $+a$ だけ移されている．要点は，式 (8.43) と (8.44) の記号 x が古典粒子の位置を表す数値では**ない**ということである．この記号はヒルベルト空間での**演算子**(無限次元行列) を表しているのである．x の物理的意味はその行列表現，あるいはその関数形から導かれる．x で分類された今の基底で，位置オブザーバブル x は x を掛けるとして表される．式 (8.44) の意味は，もしユニタリー変換 U によってヒルベルト空間での**新しい**基底に移った場合，**同じ**位置オブザーバブルは $(x-a)$ を掛けるとして表される，ということである．そして，もし能動的変換 (8.42) と受動的変換 (8.44) の両者を行えば，当然のことながら，観測可能な平均値は不変に保たれる．

演習問題 8.11　x に対する能動的変換が

$$\mathsf{x} \;\rightarrow\; \mathsf{x}_{\mathrm{H}} = \mathsf{U}^\dagger\,\mathsf{x}\,\mathsf{U} = \mathsf{x} + a \tag{8.45}$$

となることを示せ．

今や，古典形式に最も近いのが演算子変換に対するハイゼンベルク描像であると納得したはずである．

式 (8.42) に戻ると，変換された状態 $\mathsf{v}'(x)$ の位相を，単に $\mathsf{v}'(x) = \mathsf{v}(x-a)$ となるように再定義しておくのが自然である．こう約束しておいて，状態関数 $\mathsf{v}'(x)$ をべき級数に展開すると

$$\mathsf{v}(x-a) = \mathsf{v}(x) - a\,\frac{d}{dx}\,\mathsf{v}(x) + \frac{1}{2}\left(-a\,\frac{d}{dx}\right)^2 \mathsf{v}(x) + \cdots \tag{8.46}$$

が得られる．これは象徴的に $e^{-a\,d/dx}\,\mathsf{v}(x)$ と書くことができるから，$\mathsf{U} \equiv e^{\mathsf{A}}$ として

$$\mathsf{A} = -ia\,(-i\,d/dx) \tag{8.47}$$

が得られる．こうして，x 表示で並進の生成子は自己共役演算子 $-i\,d/dx$ となることがわかる．

ユニタリー同値性

並進の最も一般的なユニタリー表現は式 (8.42) であり，そこには任意位相関数 $\phi(x)$ が関与している．これは連続した二つの変換からなると考えることができる．一つは式 (8.47) の演算子 A によって生成される変換であり，2 番目は $e^{i\phi(x)}$ を掛ける変換 (これもまた一つのユニタリー変換) である．この第二段階は古典電磁気学でのゲージ変換に似ている．

こうして，並進の生成子に対する最も一般的な表現は

$$\mathsf{k}_\phi = e^{i\phi(x)}\,(-i\,d/dx)\,e^{-i\phi(x)} = -i\,d/dx - d\phi(x)/dx \tag{8.48}$$

となる．その 3 次元への一般化は

$$e^{i\phi(\mathbf{r})}\,(-i\boldsymbol{\nabla})\,e^{-i\phi(\mathbf{r})} = -i\boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}) \tag{8.49}$$

である．

演習問題 8.12　式 (8.49) の x, y そして z 成分が可換であることを確かめよ．

位相関数 $\phi(x)$ として何を選ぼうとも，k_ϕ は間違いなく**真実の**並進演算子である．それは正準交換関係 $[\mathsf{k}_\phi, x] = -i$ を，あるいは，より一般的には $[\mathsf{k}_\phi, f(x)] = -if'(x)$ を満足している．したがって，ユニタリー演算子 $\mathsf{U} = e^{-ia\mathsf{k}_\phi}$ は，式 (8.45) と同じように $\mathsf{U}^\dagger \mathsf{x} \mathsf{U} = \mathsf{x} + a$ を正確に満たしている．一方，k_ϕ は式 (8.47) に現れる $-id/dx \equiv \mathsf{k}_0$ とは**異**なっている．より一般的には，異なる位相関数 $\phi(x)$ を選ぶごとに，紛れもなく異なった演算子 k_ϕ が存在する．特に，ある与えられたヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の同じ状態ベクトル $v(x)$ に対して，異なった平均値 $\langle \mathsf{k}_\phi \rangle$ がもたらされることになるだろう．

したがって，与えられた距離 a だけの並進を表す "真の" 演算子 $\mathsf{U}(a)$ が存在しているのかと疑問を抱くかもしれない．この質問は理にかなっているようだが，実は意味がない．読者は，三つのスピン行列 J_k の正しい形を聞いたりはしないだろう．ス

ピン空間の基底のとり方に応じて無限個の解答があるからである．状態ベクトルが波動関数 $v(x)$ によって表されている今の場合，x 軸の各点において，ヒルベルト空間の基底の定義に位相の曖昧さが存在する．したがって，並進演算子の関数形は一意ではありえない．実際，最も一般的な $\mathsf{U}(a)$ の定義，すなわち

$$\mathsf{U}^{\dagger}(a)\, f(\mathsf{x})\, \mathsf{U}(a) = f(\mathsf{x}+a) \tag{8.50}$$

は，明らかに $\mathsf{U}(a) \to \mathsf{U}(a)\, e^{i\phi(\mathsf{x})}$ の置き換えのもとで不変である．

二つのタイプのユニタリー同値性を明確に区別することが本質的である．一つにはヒルベルト空間の基底の変換 (受動的変換) による自明な同値性がある．たとえば，式 (7.26) の三つの J_k 行列は反対称で純虚数であるが，初等的教科書で見られる J_k 行列の標準形 (J_z が対角的で J_x が実対称) と等価であり，同様に正当なのである．

一方，固定された基底をもつ**与えられた**ヒルベルト空間において，式 (8.42) のような**能動的**ユニタリー変換は明らかに新しい物理的状況を生み出している．この場合，二つの演算子の形式的ユニタリー同値性が物理的観点からの同値を意味しないことは確かである[*10]．たとえば，J_x を J_y に変換するユニタリー変換は存在するが，与えられた基底において記号 J_x と J_y は**異なった**物理的意味をもっている．(ともに実軸上で定義された) x を p に変換するユニタリー変換 (すなわち，この場合は古典的正準変換) も存在する．それでもなお，これら二つの力学変数はまったく異なった性格をもっている．

こうして，式 (8.50) を満足する演算子 $\mathsf{U}(a)$ を見いだすという問題には一意な解が存在しえないものの，この非一意性は本質的に関係ないことがわかった．この問題は，私たちが角運動量の交換関係をもった三つの J_k 行列を見いだすように求められたのと同じことである．異なった，しかしユニタリー同値な解は無限に存在する．ちょうど量子論の本を書くためには一つの言語を選ぶ必要があるように，計算を実行するためには，それらの中から一つをあらわに選ぶ必要があるかもしれない．しかし，J_k に対して特定の形を選ぶことは，それが J_z を対角的とする標準形であろうと，あるいは式 (7.26) に使われたもの，さらには他のどんなものであろうと，単に趣味の問題，あるいはその時々の便利さの問題でしかない．ヒルベルト空間の特定の基底にあらわに依存した物理的データが他に存在しないならば，この勝手な選択が観測可能な結果につながることはありえない．

この議論を結論づけると，x 軸方向の並進の生成子**なるもの**として $-id/dx$ と選ぶのが最も単純であり，また一番自然でもある．すなわち，もしすべてのユニタリー同値な演算子 k_ϕ の中から一つを選択するように強いられるのならば，k_0 を選ぼうということである．実際にはこのような必要性はまれにしか起こらない．とにかく，勝手に何を選んでも物理的観測にはまったく影響ない．

[*10] R. Fong and J. Sucher, *J. Math. Phys.* 5 (1964) 456.

古典力学との対応

習慣上，並進演算子 $-id/dx$ に $\hbar$ を掛け，その積を**運動量**とよぶ．その理由は，量子系に古典的類似が存在して状態 $\psi(x)$ がおおざっぱに局在した波束で与えられる場合，オブザーバブル $-i\hbar d/dx$ の平均値が事実，古典的運動量に対応するからである．このことはド・ブロイの公式

$$\lambda p = h \tag{8.51}$$

からわかる．ド・ブロイの公式に現れるプランク定数 $h \equiv 2\pi\hbar$ は古典力学と量子力学を結び付けるために使われている．プランク定数はこれ以外の役割は果たさないし，特に量子論自身の法則の定式化には決して必要とならない．それは，並進演算子 $-id/dx$ を長さの逆数ではなく運動量の単位で表すとか，振動数をエネルギーの単位で記述するなどという場合に用いられる単なる**変換因子**なのである．$\hbar$ の置かれた状況は，相対性理論 (そこでは時間が長さの単位で，質量がエネルギーの単位で測られる) における光速 c の立場と似ている．

日常生活で用いられている SI 単位系で，$c \simeq 3 \times 10^8$ m/s はかなり大きな数であり，$\hbar \simeq 10^{-34}$ J·s はきわめて小さい*11．したがって，巨視的物体の典型的線運動量*12に対応する λ はあまりに小さく，そのような物体の波動伝播性質を観測することは実際上不可能である．そして逆に，人間のスケールに共通の (たとえば電磁波の) λ の値はあまりに小さな運動量に対応し，反跳効果を個々の光子によって検出しようとしても困難である．

それにもかかわらず，(準備過程を古典的に記述すれば) よく定義された運動量をもった粒子が準備され，そしてそれらの粒子が波動のように回折する，したがってド・ブロイの公式 $\lambda p = h$ が実験的に確認可能であるという境界線上の場合が存在する．たとえば，100 eV のエネルギーで射出された電子は結晶格子定数と同程度の波長 $\lambda = 1.23$ Å をもっている．原子炉でおびただしく生成される中性子は 0.03 eV 付近のエネルギー (温度の単位では $0.03\,\mathrm{eV}/k_\mathrm{B} = 348$ K) をもっているが，これに対応する波長は 1.65 Å である．これらの中性子は日常的に固体物理研究で用いられている．結晶格子によるこれらの波動的回折は，X 線のように，弾性的であるかもしれない．しかし，同じ波動は非弾性的にも散乱され，このとき中性子は，格子の弾性振動モードとエネルギーおよび運動量を交換しながら，まったく普通の粒子としてふるまう．

警告：古典力学と量子力学を関係づける，いわゆる対応原理は手が込んでいて，つかまえどころがない．量子力学は可分なヒルベルト空間で定式化されており，基本的に離散的性格をもっている．古典力学は本質的に連続である．したがって，両者の対応はどんなものであろうと必然的にファジーとなる．この問題には 10 章で立ち戻ろう．

---

*11 変換因子 $hc^{-2} \simeq 7 \times 10^{-55}$ kg/Hz はまったく途方もない数である．
*12 A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* 58 (1990) 103.

8.5 ユークリッド群

ユークリッド群は通常の3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ における可能なすべての剛体運動(並進と回転)からなる．重力効果による時空幾何学のひずみを無視すれば，私たちの住む物理空間はユークリッド構造をもっている．したがって，ユークリッド群は**物理的**対称性に対応しており，剛体運動は量子力学的ヒルベルト空間でのユニタリー行列で表される．

力学変数と外部パラメーター

私たちはたったいま精巧なフィクション(厳密に対称的で完全に空虚な空間)をつくり上げたところである．そこには直角座標系の原点をどこに置くか，そして軸をどの方向に向けるかを指示するものは何もない．物理学の法則(たとえばマクスウェル方程式)はこれらすべての精神的座標系において同じ形式で書かれている．しかし，この素朴な空間を物質物体(建物，磁石，粒子検出器のようなもの)で取り散らかした場合，その対称性は破られる．このとき私たちは，xyz 軸の原点を実験室のある一角に置き，その軸はこれこれの壁に平行であるということができるのである．

しかし対称性は完全に失われたわけではなく，単により複雑なだけである．もし，気を付けて磁石および粒子検出器とともに建物全体を動かし，それとともに実験ホールの壁に結び付けられている座標系を動かした(このヘラクレス的作業は**受動的**変換である)とすると，そしてまた同様にシュレーディンガー方程式で記述されているすべての粒子を動かした(これは**能動的**変換)とすると，新しいシュレーディンガー方程式の形は古いものと同じである．単に量子論的粒子のふるまいを観測するだけでは，建物とすべての装置がその粒子とともにどこか別の場所に移動されたということを推測することは不可能である．

そこで物理的物体に対して二つのクラスを区別しよう．私たちがそのふるまいをしらべている物体は**力学変数**で記述される．それらはニュートン方程式あるいはシュレーディンガー方程式，もしくは他の適当な運動方程式に従う．これらの力学変数に対する対称性は，古典物理学では正準変換で，量子論ではユニタリー変換で表される．そしてその一方で，その性質が既知とされ，そのふるまいも勝手に記述できる補助的物体(磁石，測定器など)が存在する．これらの物体は力学変数では記述されないし，運動方程式にも従わない．それらの運動は，もしあれば私たちによって指定される．

私たちが要求する精度の水準によって，**同じ**物体が，運動方程式で書かれる力学系の一部分にもなり，非力学変数で指定される外部のものにもなると考えられる．たとえば，水素原子に対する最も初等的取扱いにおいては，与えられた位置 $\mathbf{R}$ に置かれ，固定されたクーロン・ポテンシャル $V = -e^2/|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ によって表された点状陽子が存在する．$\mathbf{r}$ (電子の位置)の成分のみが力学変数と考えられている．$\mathbf{R}$ の成分は外部パラメーターである．より精確な取扱いでは，$\mathbf{R}$ の成分もまた力学変数であり，陽子も

水素原子の力学での完全なパートナーである．この場合，$(\mathbf{R}-\mathbf{r})$ が原子の剛体的並進，$\mathbf{R}\to\mathbf{R}+\mathbf{a}$ かつ $\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\mathbf{a}$ のもとで不変であることは自明である．

しかし，$\mathbf{r}$ のみが力学変数で $\mathbf{R}$ は外部制御パラメーターであるという混成的記述においてさえ，並進不変性には依然として明確に定義された意味が与えられる．すなわち，ベクトル $\mathbf{a}$ による並進には二つの操作が関与している．量子変数に対するユニタリー変換 $\psi(\mathbf{r})\to \mathsf{U}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r})$ と，古典変数に対する通常の置き換え (パラメーター $\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}+\mathbf{a}$ で置き換えられる) である．水素原子のハミルトニアンはこれらの変換を結合したもとで不変である．

並　　進

図 8.2 に示した能動的変換

$$\mathbf{r}\xrightarrow{\mathsf{A}}\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{a} \tag{8.52}$$

は，量子論ではユニタリー演算子 $\mathsf{U}(\mathbf{a})\equiv e^{\mathsf{A}}$ で表される．同様に，ベクトル $\mathbf{b}$ による剛体的並進 (図には示されていない) は $\mathsf{U}(\mathbf{b})\equiv e^{\mathsf{B}}$ によって表されている．これらの演算子のあらわな形は状態のヒルベルト空間の定義の仕方に，なかでも物理系の粒子数とそのタイプに依存している．しかし A と B をあらわに指定しなくても，交換子 $[\mathsf{A},\mathsf{B}]$ は任意付加定数を除いて式 (8.36) から求めることができる．今の場合，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ による並進が可換であるため，式 (8.36) の利用は特に簡単である．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\xrightarrow{\mathsf{A}}\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{a}\xrightarrow{\mathsf{B}}\mathbf{r}''=\mathbf{r}'+\mathbf{b}=\mathbf{r}+\mathbf{a}+\mathbf{b}\\ \xrightarrow{-\mathsf{A}}\mathbf{r}'''=\mathbf{r}''-\mathbf{a}=\mathbf{r}+\mathbf{b}\xrightarrow{-\mathsf{B}}\mathbf{r}''''=\mathbf{r}'''-\mathbf{b}=\mathbf{r}\end{aligned} \tag{8.53}$$

が得られる．これによって点 $\mathbf{r}$ (任意の点) はもとの位置に戻される．式 (8.36) の左辺は $\mathbb{1}$ か，より一般には $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に依存する位相因子となる．(前節の議論を思い起こせ．状態ベクトルは任意位相を残して定義される.)

したがって $[\mathsf{A},\mathsf{B}]=iK(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbb{1}$ と書くことができる．ここで $K(\mathbf{a},\mathbf{b})=-K(\mathbf{b},\mathbf{a})$ は数値係数であり，私たちが指定しなければならない．明らかに $K=0$ と仮定する

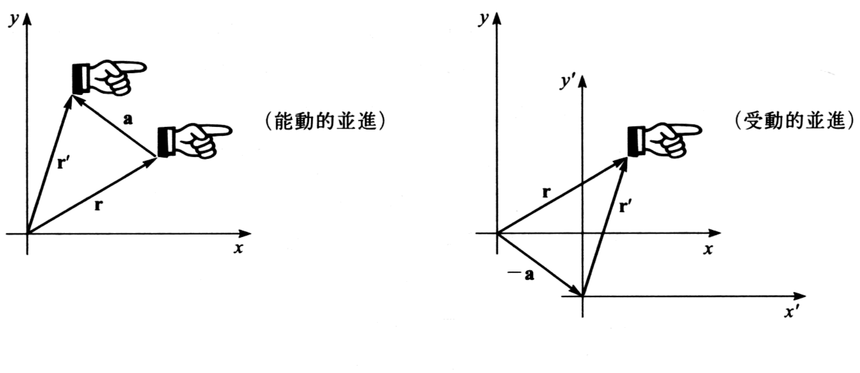


図 8.2　手の記号に対する等価な能動的並進と受動的並進

のが最も簡単である．たとえば，1 個の粒子があった場合，その状態が座標表示において波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ によって記述されれば，$\mathsf{A} = -\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ そして $\mathsf{B} = -\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ ととるか，あるいは式 (8.49) のようなより一般的な表現をとるのが自然であり，これらはすべて $K = 0$ を与える．しかし，以下の演習問題が示すように，これが唯一の可能性ではない．

演習問題 8.13　3 次元空間での 1 個の粒子に対して

$$\mathsf{A} := -i\sum_m a_m\,\mathsf{p}_m/\hbar := -i\mathbf{a}\cdot\left(-i\,\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{V}\times\mathbf{r}\right) \tag{8.54}$$

とする．ただし，$\mathbf{V}$ は面積の逆次元をもった任意の定数ベクトルである．この方程式によって定義される自己共役演算子 p_m が，並進演算子の満たすべき $[\,\mathsf{p}_m\,,\mathsf{x}_n\,] = -i\hbar\delta_{mn}$ を満たしていることを示せ．さらに

$$[\,\mathsf{p}_m\,,\mathsf{p}_n\,] = i\hbar^2\sum_s \epsilon_{mns}\,V_s\,\mathbb{1} \tag{8.55}$$

を示せ．ここで ϵ_{mns} は以下の式 (8.57) で定義される完全反対称記号である．

演習問題 8.14　閉曲線に沿って移動させられた量子系がもとの位置に戻ると，その状態ベクトルには位相因子 $e^{i\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}}$ が掛かることを上の並進演算子の定義を使って示せ．ここで $\mathbf{A} := \frac{1}{2}\oint \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$ は曲線の囲む面積である．　★

異なるベクトル $\mathbf{V}$ を用いて式 (8.54) で定義された並進演算子 p_m はユニタリー同値でないことに注意せよ[*13]．このことは，それらの交換子が異なるという事実，式 (8.55) から明らかである．したがって，これらの p_m は量子系の移動過程に対する純粋に異なった記述に対応している．移動法則はあらわにベクトル $\mathbf{V}$ に関係しているのである．これは明らかに回転対称性を破るが，並進対称性は保たれる．(たとえば，並進不変性は全空間に一様な磁場が存在しても破られない.) 私たちは間もなく，回転対称性を付加的に要請することで，$\mathbf{V} = 0$ が形式的に得られることを見ることになる．

回　　転

回転は，二つのベクトルのスカラー積 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} \equiv \sum r_m s_m$ を不変に保つ線形変換である．一般の無限小線形変換は，行列要素 Ω_{nm} を無限小として，ベクトルの成分を $\delta r_m = \sum r_n\,\Omega_{nm}$ および $\delta s_m = \sum s_n\,\Omega_{nm}$ だけ変える．したがって

$$\delta\sum_m r_m\,s_m = \sum_{mn}(r_n\,s_m + r_m\,s_n)\,\Omega_{nm} \tag{8.56}$$

が得られる．この表式がすべての $\mathbf{r}$ と $\mathbf{s}$ に対して 0 となれば回転となる．これは $\Omega_{mn} = -\Omega_{nm}$ を意味する．3 次元空間の場合，0 でない要素が

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \qquad と \qquad \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = -1 \tag{8.57}$$

---

*13 この点で，これらは式 (8.48) の 1 次元並進演算子 k_ϕ (それらはユニタリー同値) とは異なる．

だけであるような完全反対称記号 ϵ_{mns} を導入するのが便利である．すると，$\Omega_{nm} = \sum_s \epsilon_{nms}\,\alpha_s$ と書くことができる．ここで α_s の成分は三つの独立な無限小パラメーターである．その幾何学的意味は，無限小回転角の直角座標成分である (次の演習問題参照)．こうして $\delta r_m = \sum r_n\,\epsilon_{nms}\,\alpha_s$ が，あるいは標準的ベクトル記法で

$$\mathbf{r} \;\to\; \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + O(\boldsymbol{\alpha}^2) \tag{8.58}$$

が得られる．

演習問題 8.15　有限角度の回転が

$$\mathbf{r} \;\to\; \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,[\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r})] \tag{8.59}$$

と与えられることを示せ．ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の方向は回転軸の方向，大きさ α はその軸のまわりの回転角である．　★

演習問題 8.16　関係式 $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ で定義される角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は，上で定義された回転ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の時間微分ではなく，

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,(\boldsymbol{\alpha} \times \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\,[\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \dot{\boldsymbol{\alpha}})] \tag{8.60}$$

によって与えられる[*14]ことを示せ．　★★

回転演算子の交換関係を求めるため，ちょうど一連の並進を考えたときのように，四つの無限小角度 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, -\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta}$ による一連の回転を考えよう．任意の点 $\mathbf{r}$ は次のような経路をたどる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &\xrightarrow{\mathsf{A}} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) \\
&\xrightarrow{\mathsf{B}} \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}') = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) \\
&\xrightarrow{-\mathsf{A}} \mathbf{r}''' = \mathbf{r}'' - (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'') = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) \\
&\xrightarrow{-\mathsf{B}} \mathbf{r}'''' = \mathbf{r}''' - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}''') = \mathbf{r} + \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r})
\end{aligned} \tag{8.61}$$

この計算において，$\alpha\beta$ に比例する項は残したが，α^2 と β^2 に比例する項は (8.36) 式の最終結果には現れていないので無視した．さてベクトルの恒等式

$$\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \equiv 0 \tag{8.62}$$

を使うと，式 (8.61) の最終結果は一つの無限小回転

$$\mathbf{r} \;\to\; \mathbf{r} + (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{r} \tag{8.63}$$

であることがわかる．

[*14] A. Peres, *Am. J. Phys.* 48 (1980) 70.

上の議論を通して，$\mathbf{r}$ は通常の幾何学的な点を表しており，量子論的演算子ではなかったことを思い起こそう．量子論では，上述の回転に対応するユニタリー変換 e^{A} と e^{B} が，α_m と β_n の線形結合によって生成されると仮定する．

$$\mathsf{A} = \sum_m \alpha_m \, \mathsf{J}_m / i\hbar \qquad \text{および} \qquad \mathsf{B} = \sum_n \beta_n \, \mathsf{J}_n / i\hbar \tag{8.64}$$

演算子 J_k はエルミートであり，因子 $\hbar$ は (古典的正準変換の生成子との類似から) それらに角運動量成分の次元を与える目的で導入された．こうして式 (8.36) と (8.63) を比較して

$$\left[\sum_n \beta_n \, \mathsf{J}_n \, , \, \sum_m \alpha_m \, \mathsf{J}_m\right] = i\hbar \sum_{nms} \epsilon_{nms} \, \beta_n \, \alpha_m \, \mathsf{J}_s \tag{8.65}$$

が得られる．この関係はすべての $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ に対して成り立たなければならないから

$$[\mathsf{J}_m \, , \mathsf{J}_n] = i\hbar \sum_s \epsilon_{mns} \, \mathsf{J}_s \tag{8.66}$$

となる．

ここで，どんな一連の能動的変換にも必然的に位相の曖昧さが残るため，式 (8.36) の左辺の幾何学的意味から推測した $[\mathsf{B}, \mathsf{A}]$ の値は，任意の付加的数値を残してしか決まらないのではないかと主張されるかもしれない．したがって，式 (8.66) の右辺は，より一般的には w_s を式 (8.55) の V_s のような三つの c 数として，$i\hbar \sum \epsilon_{mns} \, (\mathsf{J}_s + w_s \mathbb{1})$ と書かれるべきである．しかし，今の場合，この曖昧さは回転演算子 $e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}/\hbar}$ の位相を調節することで容易に取り除くことができる．これは $\mathsf{J}_s + w_s \mathbb{1}$ を新しい J_s として再定義することと等価であり，こうして標準的交換関係 (8.66) が回復される．

回転と並進

最後に，交換子 $[\mathsf{J}_m \, , \mathsf{p}_n]$ を求めるため，図 8.3 に描いたように，無限小回転 $\pm\boldsymbol{\alpha}$ と無限小並進 $\pm\mathbf{b}$ を交互に考える．こうして (以前と同じく α^2 のオーダーの項を無視して)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &\xrightarrow{\mathsf{A}} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) \\
&\xrightarrow{\mathsf{B}} \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{b} = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + \mathbf{b} \\
&\xrightarrow{-\mathsf{A}} \mathbf{r}''' = \mathbf{r}'' - (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'') = \mathbf{r} + \mathbf{b} - (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{b}) \\
&\xrightarrow{-\mathsf{B}} \mathbf{r}'''' = \mathbf{r}''' - \mathbf{b} = \mathbf{r} - (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{b})
\end{aligned} \tag{8.67}$$

が得られる．一連の四つの変換の結果は無限小ベクトル $-\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{b}$ による並進である．

量子論で，これらの幾何学的操作はユニタリー行列 $e^{\pm\mathsf{A}}$ と $e^{\pm\mathsf{B}}$ で表される．ただし，

$$\mathsf{A} = \sum_m \alpha_m \, \mathsf{J}_m / i\hbar \qquad \text{および} \qquad \mathsf{B} = \sum_n b_n \, \mathsf{p}_n / i\hbar \tag{8.68}$$

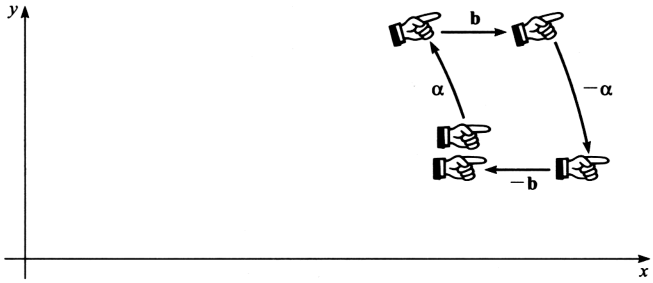


図 8.3 (座標原点のまわりの) 小さな角度 $\boldsymbol{\alpha}$ の回転に続いて，小さなベクトル $\mathbf{b}$ による並進，$-\boldsymbol{\alpha}$ の回転，そして最後に $-\mathbf{b}$ による並進を行う．最終的な結果は一つの並進となり，これはほとんど ($\boldsymbol{\alpha}$ と $\mathbf{b}$ が真に無限小であったとすれば，正確に) $\mathbf{b} \times \boldsymbol{\alpha}$ と等しい．

である．再び式 (8.36) に頼れば

$$\Big[\sum_n b_n\, \mathsf{p}_n\,,\, \sum_m \alpha_m\, \mathsf{J}_m\Big] = -i\hbar \sum_{mns} \epsilon_{mns}\, \alpha_m\, b_n\, \mathsf{p}_s \tag{8.69}$$

が得られる．これはすべての α_m と b_n に対して正しいから，

$$[\mathsf{J}_m\,,\mathsf{p}_n] = i\hbar \sum_s \epsilon_{mns}\, \mathsf{p}_s \tag{8.70}$$

が得られる．

以前の場合と同様，能動的変換に伴う位相の任意性のため，式 (8.69) の右辺には $\mathbb{1}$ の定数倍を加えておくこともできたはずである．すると式 (8.70) の右辺は p_s にかわって $(\mathsf{p}_s + w_s\mathbb{1})$ となる．そこで，以前とまったく同じように，$e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}/\hbar}$ の位相を調節し，$(\mathsf{p}_s + w_s\mathbb{1})$ を新しい p_s として再定義する．こうして再び標準的交換関係 (8.70) が得られる．

しかし，依然として式 (8.55) 右辺の任意ベクトル $\mathbf{V}$ の処理が残っている．これは位相の再定義では消去できない．そのような固定されたベクトルが回転不変性と両立しないことは直観的に明らかである．このことは，ヤコビの恒等式 (8.38)

$$[\,[\mathsf{p}_m\,,\mathsf{p}_n],\,\mathsf{J}_k] + [\,[\mathsf{J}_k\,,\mathsf{p}_m],\,\mathsf{p}_n] + [\,[\mathsf{p}_n\,,\mathsf{J}_k],\,\mathsf{p}_m] \equiv \mathsf{O} \tag{8.71}$$

から形式的にも示される．式 (8.55) と式 (8.70) のため，この恒等式は

$$\mathsf{O} + \sum_s \epsilon_{kms}\,[\mathsf{p}_s\,,\mathsf{p}_n] + \sum_s \epsilon_{nks}\,[\mathsf{p}_s\,,\mathsf{p}_m] = \mathsf{O} \tag{8.72}$$

となるが，式 (8.55) の置き換えをもう一度行えば

$$\sum_{rs} (\epsilon_{kms}\,\epsilon_{snr} + \epsilon_{nks}\,\epsilon_{smr})\, V_r = 0 \tag{8.73}$$

が得られる．たとえば $k = m \neq n$ とすれば $V_n = 0$ となる．したがって，最終的に

$$[\mathsf{p}_m\,,\mathsf{p}_n] = \mathsf{O} \tag{8.74}$$

となる.

注意： 興味深いことには，この議論は記号 ϵ_{mns} の存在しない 2 次元では成り立たない. 平面において，ユークリッド群の生成子は p_x , p_y および $\mathsf{J} \equiv \mathsf{J}_z$ だけであり，それらの交換関係は

$$[\mathsf{J}, \mathsf{p}_x] = i\hbar\, \mathsf{p}_y \qquad \text{と} \qquad [\mathsf{J}, \mathsf{p}_y] = -i\hbar\, \mathsf{p}_x \tag{8.75}$$

である. $[\mathsf{p}_x\,,\,\mathsf{p}_y] = iV\mathbb{1} \neq \mathsf{O}$ と仮定しても代数的矛盾は生じない. 対称性 $x \leftrightarrow y$ に関しては，もし鏡映がユニタリー変換で表されるならば[*15] $[\mathsf{p}_x\,,\mathsf{p}_y]$ の符号は変わるが，$iV\mathbb{1}$ の符号は変えられないから依然として困難が存在する. ここにはまだ一つの可能性 (p_m および J と交換する物理定数 V はユークリッド平面の鏡映のもとで符号を変えるかもしれない) が残されている.

演習問題 8.17 垂直な一様磁場が存在する平面内での荷電粒子の運動を記述するさいに，交換関係 (8.55) と式 (8.75) はどのように利用できるか議論せよ. ⋆

ベクトル演算子およびテンソル演算子

いま私たちは二つの完全に異なったタイプの空間を使用している. その一つは，私たちの住む幾何学的空間 $\mathbf{R}^3$ であり，それはユークリッド群対称性をもっている. もう一つは量子論を定式化するために用いている抽象無限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ である. $\mathcal{H}$ のベクトルは量子状態を表し，$\mathcal{H}$ のエルミート演算子はオブザーバブルに対応している. $\mathbf{R}^3$ における回転は，$\mathcal{H}$ ではユニタリー変換 (8.33) によって表される. 回転が無限小，すなわち $\mathsf{U} \simeq \mathbb{1} - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{J}/\hbar$ の場合，オブザーバブル Ω は

$$\delta\Omega := \Omega' - \Omega = i\,[\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{J}, \Omega\,]/\hbar \tag{8.76}$$

だけ変化する. この結果は Ω の幾何学的性質に依存する. 最もよくある場合を以下に示す.

スカラー演算子は $\mathcal{H}$ で演算子として，そして $\mathbf{R}^3$ でスカラーとしてふるまう. これらは J_k と可換な演算子であり，したがって回転のもとで不変である. たとえば，$\mathbf{p}^2 := \sum \mathsf{p}_m{}^2$ と $\mathbf{J}^2 := \sum \mathsf{J}_m{}^2$ はスカラーである. (混乱しないようであれば，通常この文脈では "演算子" という言葉は省略される.)

ベクトル演算子は交換関係

$$[\mathsf{J}_m\,, \mathsf{V}_n] = i\hbar \sum_s \epsilon_{mns}\, \mathsf{V}_s \tag{8.77}$$

を満たす，三つ組みのオブザーバブル V_n である. x_n , p_n , J_n はベクトル (つまりベクトル演算子) の例である.

---

*15 反ユニタリー変換で表そうとは考えないで欲しい. この解は，ウィグナーの定理によって許されてはいるが，この章の最後で示すように，力学的考察によって排除される.

演習問題 8.18　A_m と B_m がベクトルである場合 $\sum \mathsf{A}_m \mathsf{B}_m$ がスカラーとなることを示せ．逆に，A_m がベクトルで $\sum \mathsf{A}_m \mathsf{B}_m$ がスカラーであれば B_m はベクトルである．

演習問題 8.19　A_m と B_n がベクトル演算子であれば

$$\mathsf{C}_s = \sum_{mn} \epsilon_{smn} \mathsf{A}_m \mathsf{B}_n \tag{8.78}$$

はベクトル演算子となることを示せ．

テンソル演算子は回転のもとでベクトル成分の積としてふるまう．たとえば，9 個の演算子 $\mathsf{T}_{rs} := \mathsf{A}_r \mathsf{B}_s \quad (r, s = 1, 2, 3)$ は

$$[\mathsf{J}_m, \mathsf{T}_{rs}] = i\hbar \sum_n (\epsilon_{mrn} \mathsf{T}_{ns} + \epsilon_{msn} \mathsf{T}_{rn}) \tag{8.79}$$

を満足する．二つ以上の添字をもった高階のテンソルも時おり必要となる．

8.6 量子力学

時間に関する並進もまた一つの対称性である．ある日に行われた実験の記述と，別の日に行われた同様な実験の記述を区別することは不可能である．自然の法則は時間に関して (宇宙論的スケールでの非常にゆっくりした変化を完全に排除することはできないものの) 不変である．時間に関する能動的並進は，力学的発展が進むのを**待つこと**にすぎない．受動的変換は時計のリセット $t \to t' = t - \tau$ である．

演習問題 8.20　時間に関する能動的そして受動的並進を説明する図を描け．

量子状態はどのように時間発展するのだろうか? (長距離干渉の成功のような) 既知の経験的事実からの合理的な外挿によって，以下の規則が示唆されている．

> **量子決定論：** 完全に再現可能な環境のもとで，純粋状態は純粋状態に発展する．

これは，時刻 t_1 において，量子系に対するある一つの**最大**検証があってその結果が予言可能な場合，時刻 $t_2 > t_1$ においてもやはり一つの**最大**検証 (通常は異なるもの) が存在し，系は予言可能な結果を与えるということを意味している．時刻 t_2 に実行可能な他の最大検証に対しては，様々な出力結果の**確率**のみが予言可能となる．

量子決定論を検証するためには，環境を厳格に制御しなければならない．例として図 2.2 に示したような，連続した二つのシュテルン–ゲラッハ装置間を移動する銀原子の地磁気中での歳差を考えてみよう．2 番目のシュテルン–ゲラッハ磁石の入口でスピン純粋状態を得るためには，二つの装置間の磁場は銀電子の再現可能な歳差を保証するに足る精度をもって安定化されていなければならない．この精度の評価は演習問題として残しておく．

演習問題 8.21 二つのシュテルン–ゲラッハ磁石が 10 cm 離れており，地磁気が遮蔽されていない場合の歳差角の大きさを見積もれ．スピン歳差を $1°$ の精度で予言可能とするためには，磁場をどの程度正確に制御する必要があるか?

演習問題 8.22 マイケルソン–モーレイの歴史的実験で，干渉縞の位置が干渉計の熱膨張に影響されないようにするためには，どの位正確に周囲の温度を安定化しておく必要があったか?

本書では，完全に制御され正確にわかった環境のもとで実行される理想的実験をふつう考える．非理想的な環境が量子力学に何をもたらすかは 11 章でしらべる．そこで純粋状態が混合状態へと発展することがわかっても驚くには当たらないだろう．

ユニタリー発展

量子力学は量子状態の発展 $\mathsf{v}(t_1) \to \mathsf{v}(t_2)$ を取り扱う．これがユニタリー変換

$$\mathsf{v}(t_2) = \mathsf{U}(t_2, t_1)\, \mathsf{v}(t_1) \tag{8.80}$$

であり，ユニタリー演算子が群の性質

$$\mathsf{U}(t_3, t_1) = \mathsf{U}(t_3, t_2)\, \mathsf{U}(t_2, t_1) \tag{8.81}$$

を満たしていることは読者は御存知かと思う．おそらく，対称性はユニタリー変換で表されるから，こうならなければ**ならない**という記述を読んだことがあるからではないだろうか．だが，この主張は正しくない．時間は位置などと違って力学変数ではないからである．古典論であれ量子論であれ，力学的定式化において t は普通の数として現われ，すべての力学変数あるいはオブザーバブルとのポアソン括弧式あるいは交換子は 0 である．

空間並進と時間並進の間の根本的違いは以下のようになる．受動的空間並進 $x \to x-a$ は，離散的添字の取り替え $\mathsf{u}_m \to \mathsf{u}_{m-n}$ と同様な，単なる符号の付け替え $\psi(x) \to \psi(x-a)$ にすぎない．スカラー積

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x-a)}\, \psi(x-a)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)}\, \psi(x)\, dx \tag{8.82}$$

はこの符号の付け替えに影響されない．したがって，この変換はユニタリーである．こうなる理由は，オブザーバブル x の数値が，状態のヒルベルト空間を表すために使われている関数 $\psi(x)$ の引数となっているからである．式 (8.82) の和 (積分) はオブザーバブルの数値に関してとられている．

これらの性質の一つとして時間のずらしには当てはまらない．量子状態を表すために時間の関数は使わないし，スカラー積の計算で時刻に関する和をとることもしない．したがって，時間並進がユニタリー変換で表されるべきであると要求する何の理由もない．

正準形式

同様な状況が古典力学にも存在する．ニュートンの第二法則 $dp/dt = F$ から出発した場合，$F = -\partial H/\partial q$ かつ $dq/dt = \partial H/\partial p$ となるようなハミルトン関数 $H(q,p)$ が存在すると仮定する理由は何もない．他の運動法則が書かれてもいいはずである．たとえば，減衰調和振動子に対しては

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{-\gamma t}\left[q(0)\cos\omega t + p(0)\sin\omega t\right] \\ p(t) &= e^{-\gamma t}\left[-q(0)\sin\omega t + p(0)\cos\omega t\right] \end{aligned} \tag{8.83}$$

となる．もし最初の力学変数 $q(0)$ と $p(0)$ がポアソン括弧式の定義に用いられたとすれば，式 (8.83) からは

$$[q(t), p(t)]_{\mathrm{PB}} = e^{-2\gamma t} \tag{8.84}$$

が得られるから，$q(t)$ と $p(t)$ は互いに正準共役な変数ではない[*16]．

演習問題 8.23　式 (8.83) から，dq/dt と dp/dt は，q と p の関数として，時間 t をあらわに含めることなく表現できることを示せ．したがって，時間並進のもとで**不変**であり，式 (8.83) をその解とするような運動方程式 (微分方程式) が存在することになる．

減衰振動子の運動に見られる散逸的性格は，ひとえに 1 自由度による上の記述の不完全さのためである．減衰力 $-\gamma p$ は基本的な力ではない．それは一つの現象論的表現にすぎず，減衰媒質の莫大な数に及ぶ獲得不能で “無関係な” 自由度からの寄与を時間平均して与えている．

一方，古典物理学の**基本**法則は**すべての**自由度を含んだラグランジアンから得られる，と仮定するのが普通である．ラグランジュ形式で時間並進は，空間並進あるいは回転と同じく，一つの**正準**変換である．正準形式によるこの取り組みには，概念的そして計算上での重要な利点があり，場の古典論でも体系的に用いられている [*16]．

ハミルトニアン

古典論との類似から，量子状態の発展は，物理的 $\mathbf{R}^3$ 空間での並進と回転がユニタリー演算子で表されるのと同じように，群の性質 (8.81) を満足するユニタリー変換 (8.80) によって与えられると**仮定**しよう．まず

$$\mathsf{H} := i\hbar\,\frac{d\mathsf{U}(t,t_0)}{dt}\,\mathsf{U}^\dagger(t,t_0) = -i\hbar\,\mathsf{U}(t,t_0)\,\frac{d\mathsf{U}^\dagger(t,t_0)}{dt} \tag{8.85}$$

を定義する．この自己共役演算子は，以下の演習問題で示されるように時間発展をもたらすので，古典論でのハミルトニアンに対応している．

[*16] 古典正準形式に馴染みのない読者には，1 章末の参考文献をお勧めする．

演習問題 8.24　$i\hbar\dot{\mathsf{U}} = \mathsf{HU}$ と $-i\hbar\dot{\mathsf{U}}^\dagger = \mathsf{U}^\dagger\mathsf{H}$ を示せ．これらの結果と式 (8.80) を合せて，シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\, d\mathsf{v}/dt = \mathsf{H}\,\mathsf{v} \tag{8.86}$$

を導出せよ．

演習問題 8.25　式 (8.85) から

$$\mathsf{H}(t) = i\hbar \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathsf{U}(t+\Delta t, t) - \mathbb{1}}{\Delta t} \tag{8.87}$$

を示せ．

式 (8.87) から H は t_0 によらないことがわかる．さらに，物理系に時間依存した外力が加わっていない場合，H もまた t に依存せず，シュレーディンガー方程式[*17]の解は

$$\mathsf{v}(t) = e^{-i\mathsf{H}t/\hbar}\,\mathsf{v}(0) \tag{8.88}$$

となる．この場合，ユニタリー時間発展演算子は

$$\mathsf{U}(t_2, t_1) = e^{-i\mathsf{H}(t_2-t_1)/\hbar} \tag{8.89}$$

であり，これが群の性質 (8.81) を満たしていることは明らかである．

さて交換子 $[\mathsf{H}, \mathsf{p}_n]$ を考えよう．受動的変換 (すなわち，新しい時空座標の使用) という観点からすると，変換 $t \to t-\tau$ が変換 $\mathbf{r} \to \mathbf{r} - \mathbf{a}$ と交換することは自明である．したがって

$$[\mathsf{H}, \mathsf{p}_n] = \mathsf{O} \qquad (?) \tag{8.90}$$

に導かれる．しかし，この方程式は一般には成立しえない．たとえば，

$$\mathsf{H} = \mathsf{p}^2/2m + k\mathsf{x}^2/2 \tag{8.91}$$

によって記述される調和振動子に対して成立していない．(8.90) 式に至るどの推論に誤りがあったのだろうか?

ポイントは，x が演算子であり，x 表示では $\mathsf{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ となるのに対して，t は演算子ではなく，H は $i\hbar\partial/\partial t$ ではないということである．確かに微分演算子 $\partial/\partial x$ と $\partial/\partial t$ は交換するが，p が H と可換である必要はない．このことは，たとえシュレーディンガー方程式 $i\hbar\dot{\psi} = \mathsf{H}\psi$ を満足する波動関数 $\psi(x,t)$ に話を限ったとしても正しい．このときには，恒等式 $\partial^2\psi/\partial x\,\partial t \equiv \partial^2\psi/\partial t\,\partial x$ を

$$\mathsf{p}\mathsf{H}\psi = i\hbar\,\partial(\mathsf{p}\,\psi)/\partial t \tag{8.92}$$

と書くことができるが，式 (8.92) の右辺は，$\mathsf{p}\psi$ がシュレーディンガー方程式の解でなかったとすると，$\mathsf{Hp}\psi$ に等しくない．

[*17] ユニタリー変換 (8.88) は物理過程の発展を表すのではなく，私たちが物理過程に関して予言できることの発展を表しているにすぎないということに注意せよ．量子論は，何が "実際起こっている" かに関する完全な記述は与えない．それは，自然界で実際に目にすることに対して私たちが与えることのできる最良の記述でしかない．

演習問題 8.26　$e^{-i\tau\mathsf{H}/\hbar}\,\psi(x,t)=\psi(x,t+\tau)$ と $e^{-ia\mathsf{p}/\hbar}\,\psi(x,t)=\psi(x-a,t)$ の右辺で符号がなぜ反対となるのか説明せよ．最初の場合，状態 $\psi(x,t)$ は同じ系の後の時刻の状態へと変換されている．2番目の場合，状態は距離 a だけ移動されて，$\langle x^n\rangle \to \langle (x+a)^n\rangle$ となるような別の位置にある．　★

調和振動子のハミルトニアン (8.91) に戻ろう．8.5 節で行ったように，非力学的外部パラメーターを導入すれば，並進対称性の破れは避けられるかもしれない．まず，ポテンシャルエネルギーを $k\mathsf{x}^2/2$ ではなく，$k(\mathsf{x}_1-x_2)^2/2$ と書こう．ここで x_1 は振動子の各瞬間での位置を表す演算子であり，x_2 は通常の数 (古典的平衡点) である．後者は**外部パラメーター**である．しかし，非常に大きな質量 $m_2 \gg m_1$ (振動子の質量は $m_1 \equiv m$) をもった粒子の量子論的力学変数を x_2 として，より基本的な記述もできる．このときには

$$\mathsf{H}=\frac{\mathsf{p}_1{}^2}{2m_1}+\frac{\mathsf{p}_2{}^2}{2m_2}+\frac{k\,(\mathsf{x}_1-\mathsf{x}_2)^2}{2}=\frac{\mathsf{P}^2}{2M}+\frac{\mathsf{p}^2}{2\mu}+\frac{k\,\mathsf{x}^2}{2} \tag{8.93}$$

となる．ここで $M=m_1+m_2$ は全質量，$\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)\simeq m_1$ と $\mathsf{x}=\mathsf{x}_1-\mathsf{x}_2$ は振動子の換算質量と第二の粒子からの距離である．並進の生成子 $\mathsf{P}=\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2$ は明らかに x および相対運動量

$$\mathsf{p}=(m_2\,\mathsf{p}_1-m_1\,\mathsf{p}_2)/(m_1+m_2) \tag{8.94}$$

と交換する．このように，非力学的外部パラメーターのない**完全な**記述では $[\mathsf{H},\mathsf{P}]=\mathsf{O}$ である．同じようにして，**自由な**量子系で $[\mathsf{H},\mathsf{J}_n]=\mathsf{O}$ となることを示すことができる．

非線形シュレーディンガー方程式

ユニタリー発展則 (8.80) とシュレーディンガー方程式 (8.86) は，時間並進のもとでの不変性を使っただけでは，形式上導出できない．それらは，古典正準力学との類似から**仮定された**のだった．状態ベクトルに対して非線形発展方程式を考案することは，事実難しくない．シュレーディンガー方程式のこれらの非線形修正版は数学的には首尾一貫しており，これらを排除できるのは付加的な物理的仮定を導入した場合のみである．

初等的な例を考えよう．まず $\mathsf{v}=\binom{\alpha}{\beta}$ を 2 成分状態ベクトルとする．ここでは簡単のため実数とする．σ_y と σ_z を通常のパウリ行列として $\mathsf{H}=\hbar\mathsf{v}^\dagger\sigma_z\mathsf{v}\,\sigma_y$ としよう．シュレーディンガー方程式は

$$i\,\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=(\alpha^2-\beta^2)\,\sigma_y\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{8.95}$$

となる．この方程式にあらわな時間依存性はない．時間並進のもとで明白に不変である．書き下せば $\dot\alpha=-(\alpha^2-\beta^2)\,\beta$ および $\dot\beta=(\alpha^2-\beta^2)\,\alpha$ となる．これらの方程式

は $\alpha \leftrightarrow \beta$ のもとで不変である．ここで $\alpha\dot{\alpha}+\beta\dot{\beta}=0$ であり，したがって $\alpha^2+\beta^2$ が定数であることは容易にわかる．また

$$d(\alpha/\beta)/dt = 1-(\alpha/\beta)^2 \tag{8.96}$$

であり，こうして 2 組の解

$$\begin{aligned} &|\alpha|<|\beta| \quad \text{の場合} \quad \alpha/\beta = \tanh(t-t_0) \\ &|\alpha|>|\beta| \quad \text{の場合} \quad \alpha/\beta = \coth(t-t_0) \end{aligned} \tag{8.97}$$

が得られる．

これらの解で t_0 は初期条件に依存する積分定数である．時刻 $t=t_0$ でおのおの $\alpha=0$ あるいは $\beta=0$ となる．

演習問題 8.27 時刻 t での状態ベクトル $\binom{\alpha}{\beta}$ をあらわに書き下し，その時間発展がユニタリー変換ではないことを示せ．異なる二つの状態ベクトルのスカラー積は時間に関して保存されない．

これらの結果に数学的矛盾はない．しかしこれらは好ましくない帰結をもたらす．式 (8.96) に従う状態は，どんな初期状態が準備されたかによらず，すべて $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$ となる同じ状態に収束してしまう．特に，無秩序な混合状態として準備された系も，この純粋状態に時間発展してしまうのである．式 (8.96) で提案された力学模型は，したがって，無知の保存則 (31 ページの仮定 C) を破っている．次の章では，シュレーディンガー方程式の非線形修正版が熱力学の第二法則を破るということを，きわめて一般的に証明する．

8.7 ハイゼンベルク描像とディラック描像

古典力学では，慣性系を使った場合に運動方程式が最も簡単となる．それにもかかわらず，地球とともに回転する座標系のように，非慣性系を使う方がより便利な場合が時々ある．(たとえば，砲兵士官は彼らの大砲と標的とが地球の回転のため常に加速され続けているとは考えない．彼らが使うのはむしろ地球に結び付けられた座標系であり，そこでは大砲と標的は静止して見える．弾道を計算するためには，重力および空気力学的な力に加えてコリオリの力と遠心力を考慮しなければならない.)

同様に，量子力学でも時間依存した基底を使うとしばしば便利である．これには以下で議論するように，注目すべき二つの方法があり，ハイゼンベルク描像およびディラック描像として知られる．そして上の節で提示されたアプローチはシュレーディンガー描像とよばれる[*18]．シュレーディンガー描像の精神は古典統計力学 (そこではリウビルの密度関数が 1 階の偏微分方程式を満足する) に近い．一方，ハイゼンベルク描像は，古典力学でのハミルトンの方程式に似た運動方程式を与えるが，ポアソン括

[*18] 古い文献では，**表示**(representation) という言葉が**描像**(picture) のかわりに用いられている．

弧式のかわりに交換子が用いられる．ディラック描像は中間的性質をもっており，摂動論で便利な道具となる．

ハイゼンベルク描像

ハイゼンベルク描像は，基底ベクトル e_m を，あたかもそれが当該の量子系の状態ベクトルのように，シュレーディンガー方程式 (8.86) に従って発展させることによって得られる．したがって状態ベクトル v の成分 $\langle \mathsf{e}_m , \mathsf{v} \rangle$ は定数である．別の方法で同じ結果を得るには "ハイゼンベルクの状態ベクトル" を

$$\mathsf{v}_{\mathrm{H}} := \mathsf{U}^{\dagger}(t, t_0)\, \mathsf{v}(t) \equiv \mathsf{U}(t_0, t)\, \mathsf{v}(t) \equiv \mathsf{v}(t_0) \tag{8.98}$$

で定義する．ここで，添字のない普通の状態ベクトル v はシュレーディンガー描像で与えられているものとする．

同様に，ハイゼンベルクのオブザーバブルを式 (8.33) のように

$$\mathsf{A}_{\mathrm{H}}(t) := \mathsf{U}^{\dagger}(t, t_0)\, \mathsf{A}\, \mathsf{U}(t, t_0) \tag{8.99}$$

で定義する．もし A があらわに時間に依存していなければ，これから

$$\begin{aligned} \frac{d\mathsf{A}_{\mathrm{H}}}{dt} &= \dot{\mathsf{U}}^{\dagger}\mathsf{A}\mathsf{U} + \mathsf{U}^{\dagger}\mathsf{A}\dot{\mathsf{U}} = \dot{\mathsf{U}}^{\dagger}\mathsf{U}\,\mathsf{A}_{\mathrm{H}} + \mathsf{A}_{\mathrm{H}}\,\mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}} \\ &= \mathsf{A}_{\mathrm{H}}\,\mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}} - \mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}}\,\mathsf{A}_{\mathrm{H}} \equiv [\mathsf{A}_{\mathrm{H}} , \mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}}] \end{aligned} \tag{8.100}$$

が得られる．ここで $\mathsf{U}^{\dagger}\mathsf{U} \equiv \mathbb{1}$ と $\dot{\mathsf{U}}^{\dagger}\mathsf{U} + \mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}} \equiv 0$ を用いた．最後の項の $\mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}}$ という表現は式 (8.85) を思い出させるが，実際ハミルトニアンと密接に関係している．このとき

$$i\hbar\, \mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}} = i\hbar\, \mathsf{U}^{\dagger}\dot{\mathsf{U}}\mathsf{U}^{\dagger}\mathsf{U} = \mathsf{U}^{\dagger}\mathsf{H}\mathsf{U} = \mathsf{H}_{\mathrm{H}} \tag{8.101}$$

が得られる．これが，式 (8.99) と同じように定義されたハイゼンベルク描像でのハミルトニアンである．これはシュレーディンガー描像でのハミルトニアン H と，後者が時間に依らない場合に限って一致する．まとめると，

$$i\hbar\, \frac{d\mathsf{A}_{\mathrm{H}}}{dt} = [\mathsf{A}_{\mathrm{H}} , \mathsf{H}_{\mathrm{H}}] \tag{8.102}$$

となる．これが量子論的オブザーバブルに対するハイゼンベルクの運動方程式である．これは，ポアソン括弧式で表された古典運動方程式と似ている．

これらの結果は，シュレーディンガー描像で書かれた演算子が時間にあらわに依存しない場合に正しいということに注意せよ．たとえば，$\mathsf{p} = -i\partial/\partial x$ は時間にあらわに依存していない．したがって，ハイゼンベルク描像では $i\hbar\, d\mathsf{p}_{\mathrm{H}}/dt = [\mathsf{p}_{\mathrm{H}} , \mathsf{H}_{\mathrm{H}}]$ となる．

運動の定数

ハイゼンベルク描像において時間に依存しない行列要素をもった演算子は，**運動の定数**とよばれる．その平均値 (そしてそのすべての高次モーメント) は時間によらない定数である．たとえば，物理系に外部から何の力あるいはトルクも作用しない場合，ユークリッド群の生成子 p_n と J_n は H と交換し，したがってそれらは運動の定数である．

逆に，運動の定数 G はいずれも一つの対称性を生み出す．実際，$\mathcal{H}$ のすべての演算子に対して写像 $\Omega \to e^{i\alpha \mathsf{G}}\,\Omega\, e^{-i\alpha \mathsf{G}}$ を実行したとしよう．このユニタリー写像は，これらの演算子の固有値や，各固有ベクトルとのスカラー積 (それから遷移確率が得られる) といった，演算子の性質に影響を与えない．特に，$d\mathsf{G}/dt = 0$ であるから，ハイゼンベルクの運動方程式 (8.102) は影響を受けない．したがって，変換後の状況でも，最初と正確に同じ法則に従っている．これは正真正銘の対称性である．

ハイゼンベルク描像で書かれた場合，運動の定数はあらわに時間に依存しうるということに注意しておく．例として $\mathsf{H} = \hbar\omega\sigma_z$ を考えよう．シュレーディンガー演算子 σ_x と σ_y は時間に陽によらない．したがってハイゼンベルク演算子 $\sigma_{x\mathrm{H}}$ と $\sigma_{y\mathrm{H}}$ は運動方程式

$$\begin{aligned} d\sigma_{x\mathrm{H}}/dt &= [\sigma_{x\mathrm{H}}\,, \mathsf{H}]/i\hbar = -\omega\sigma_{y\mathrm{H}} \\ d\sigma_{y\mathrm{H}}/dt &= [\sigma_{y\mathrm{H}}\,, \mathsf{H}]/i\hbar = \omega\sigma_{x\mathrm{H}} \end{aligned} \tag{8.103}$$

に従う．これらの方程式の解は

$$\begin{aligned} \sigma_{x\mathrm{H}}(t) &= \sigma_x\,\cos\omega t - \sigma_y\,\sin\omega t \\ \sigma_{y\mathrm{H}}(t) &= \sigma_x\,\sin\omega t + \sigma_y\,\cos\omega t \end{aligned} \tag{8.104}$$

である．ここで新しい演算子 $\tau_{j\mathrm{H}}$ (これらは運動の定数となる) を

$$\begin{aligned} \tau_{x\mathrm{H}} &:= \sigma_{x\mathrm{H}}\,\cos\omega t + \sigma_{y\mathrm{H}}\,\sin\omega t \\ \tau_{y\mathrm{H}} &:= -\sigma_{x\mathrm{H}}\,\sin\omega t + \sigma_{y\mathrm{H}}\,\cos\omega t \end{aligned} \tag{8.105}$$

と定義することができる．これらのハイゼンベルクの運動方程式は

$$d\tau_{j\mathrm{H}}/dt = \partial\tau_{j\mathrm{H}}/\partial t + [\tau_{j\mathrm{H}}\,, \mathsf{H}]/i\hbar = \mathsf{O} \tag{8.106}$$

となる．ここで $\partial\tau_{j\mathrm{H}}/\partial t$ は式 (8.105) のあらわな時間依存性に関しての偏微分である．こうして $\tau_{x\mathrm{H}}$ と $\tau_{y\mathrm{H}}$ が，その定義 (8.105) はあらわに t に関連しているものの，運動の定数であることがわかる．

演習問題 8.28 $\tau_{x\mathrm{H}} = \sigma_x$ と $\tau_{y\mathrm{H}} = \sigma_y$ を示せ．

演習問題 8.29 ハイゼンベルクの運動方程式 (8.102) の成立は，シュレーディンガー演算子 $\mathsf{A} = \mathsf{U}(t, t_0)\,\mathsf{A}_\mathrm{H}\,\mathsf{U}^\dagger(t, t_0)$ にあらわな時間依存性がないための必要十分条件であることを，式 (8.106) のような時間に関する偏微分をせずに示せ．

ディラック描像

相互作用描像ともよばれるディラック描像は，ハミルトニアンが簡単な形の H_0 と小さな摂動 H_1 とから $\mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\mathsf{H}_1$ と書かれるような問題を取り扱うのに便利である．ハイゼンベルク描像の場合と同じく，ユニタリー行列 U_0 を，初期条件 $\mathsf{U}_0(t_0,t_0)=\mathbb{1}$ のもとで

$$i\hbar\,\frac{d\mathsf{U}_0(t,t_0)}{dt}=\mathsf{H}_0\,\mathsf{U}_0(t,t_0) \tag{8.107}$$

と定義する．もし H_0 の形が十分単純でその固有値 E_λ と固有ベクトル u_λ がわかっているならば，式 (8.107) の解を状態和としてあらわに

$$\mathsf{U}_0(t,t_0)=\sum_\lambda \mathsf{u}_\lambda\mathsf{u}_\lambda^\dagger\,\exp[-iE_\lambda(t-t_0)/\hbar] \tag{8.108}$$

と求めることが可能である．この表式はグリーン関数あるいは H_0 の**伝播関数**とよばれる．

ディラックの状態ベクトルは

$$\mathsf{v}_{\mathrm{D}}(t):=\mathsf{U}_0^\dagger(t,t_0)\,\mathsf{v}(t) \tag{8.109}$$

と定義される．この状態は運動方程式

$$i\hbar\,\frac{d\mathsf{v}_{\mathrm{D}}}{dt}=-\mathsf{U}_0^\dagger\mathsf{H}_0\mathsf{v}+\mathsf{U}_0^\dagger\mathsf{H}\mathsf{v}=\mathsf{U}_0^\dagger\mathsf{H}_1\mathsf{U}_0\mathsf{v}_{\mathrm{D}}=\mathsf{H}_{1\mathrm{D}}\,\mathsf{v}_{\mathrm{D}} \tag{8.110}$$

を満足する．ここで $\mathsf{H}_{1\mathrm{D}}:=\mathsf{U}_0^\dagger\mathsf{H}_1\mathsf{U}_0$ はハミルトニアンのディラック描像での摂動項である．

一般に，任意のオブザーバブル A は

$$\mathsf{A}_{\mathrm{D}}=\mathsf{U}_0^\dagger\,\mathsf{A}\,\mathsf{U}_0 \tag{8.111}$$

となる．A が時間にあらわに依存しなければ，これは運動方程式

$$i\hbar\,\frac{d\mathsf{A}_{\mathrm{D}}}{dt}=[\mathsf{A}_{\mathrm{D}},\mathsf{H}_{0\mathrm{D}}] \tag{8.112}$$

を満足する．これから，$\mathsf{H}_{0\mathrm{D}}$ がオブザーバブルの運動をもたらし，その一方で $\mathsf{H}_{1\mathrm{D}}$ が状態ベクトルの運動をもたらしていることがわかる．

8.8 ガリレイ不変性

ハミルトニアン $\mathsf{H}=\mathsf{p}^2/2m$ で記述される 1 次元空間での自由粒子を考えよう．その運動方程式は，ハイゼンベルク描像で $\dot{\mathsf{p}}=0$ および $\dot{\mathsf{x}}=\mathsf{p}/m$ である．(混乱しないようであれば，ハイゼンベルク描像であることを表す下付き添字 H は今後省略する.) 力学変数

$$\mathsf{G}:=\mathsf{p}\,t-m\,\mathsf{x} \tag{8.113}$$

は式 (8.105) の行列 τ_j とちょうど同じように

$$dG/dt = \partial G/\partial t + [G, H]/i\hbar = 0 \tag{8.114}$$

という性質をもっている．したがって G は，ハイゼンベルク描像ではあらわな時間依存性をもった運動の定数である．もし G を無限次元行列として書き下したとすると，そのすべての要素は定数である．(それらは時刻 $t = 0$ での $-m\mathsf{x}$ の行列要素に等しい.)

G は時間に陽に依存しているものの，他の運動の定数と同じく，一つの対称性を生み出す．ユニタリー変換 $e^{-iv\mathsf{G}/\hbar}$ の物理的意味は，物理系を速度 v だけ**ブースト**することである．このことは正準変数の変換則からただちにわかる．

$$e^{iv\mathsf{G}/\hbar}\,\mathsf{x}\,e^{-iv\mathsf{G}/\hbar} = \mathsf{x} + [iv\mathsf{G}/\hbar, \mathsf{x}] + \cdots = \mathsf{x} + vt \tag{8.115}$$

ここで展開 (8.29) を用いた．式 (8.115) の最後の表現は，式 (8.29) の高次項が今の場合恒等的に 0 となるので，有限の v に対しても正確であることに注意しておく．

同じく

$$e^{iv\mathsf{G}/\hbar}\,\mathsf{p}\,e^{-iv\mathsf{G}/\hbar} = \mathsf{p} + [iv\mathsf{G}/\hbar, \mathsf{p}] + \cdots = \mathsf{p} + mv \tag{8.116}$$

となる．したがって，新しいハミルトニアンは

$$e^{iv\mathsf{G}/\hbar}\,\frac{\mathsf{p}^2}{2m}\,e^{-iv\mathsf{G}/\hbar} = \frac{(\mathsf{p}+mv)^2}{2m} = \frac{\mathsf{p}^2}{2m} + v\mathsf{p} + \frac{mv^2}{2} \tag{8.117}$$

となる．H を不変とする並進および回転とは異なり，ブーストはハミルトニアンに影響を及ぼす (つまり，H を表す行列は変更される) が，H と p の関数関係は，もちろん変化しない．

運動座標系でのシュレーディンガー方程式

1 次元ポテンシャル $V(x)$ の下での質量 m の粒子の運動は，シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\,\psi \tag{8.118}$$

で記述される．この方程式を，一様に運動している座標系 $x' = x + vt$ (かつ $t' \equiv t$) に変換しよう．この変換は受動的変換であるが，外部ポテンシャル $V(x)$ の速度 v によるブーストと等価である．量子力学においてこの変換には，座標の置き換えだけでなく，ψ のユニタリー変換が伴う．事実，ψ の値を各時空点で保存しよう (すなわち，ψ をあたかもスカラー場のように扱おう) とすると，変換後の方程式は式 (8.118) とは本質的に異なった形をとらなければならないことになる．すなわち，ここには $i\hbar v\,\partial\psi/\partial x'$ という項が含まれる．この項を消去するためには，ψ の位相を各点で

$$\psi \to \psi' = e^{i(mvx' - mv^2t/2)/\hbar}\,\psi \tag{8.119}$$

と変更しなければならない．ここから望んでいた結果

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} + V(x'-vt)\,\psi' \tag{8.120}$$

が得られるが，これは運動するポテンシャルをもったシュレーディンガー方程式の形をしている．

演習問題 8.30　具体的に計算を実行して式 (8.120) を導出せよ．　⋆

演習問題 8.31　一様に加速された座標系 $x' = x + \frac{1}{2}\gamma t^2$ に対して同じ計算を実行し，変換後の波動関数

$$\psi' = e^{i(m\gamma x' t - m\gamma^2 t^3/6)/\hbar}\,\psi \tag{8.121}$$

が

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} + V(x' - \tfrac{1}{2}\gamma t^2)\,\psi' - m\gamma x'\psi' \tag{8.122}$$

を満たすことを示せ．この方程式の最後の項の物理的意味は何か?　⋆

式 (8.119) の ψ のユニタリー変換は，式 (8.115) と (8.116) で用いられたユニタリー変換 $e^{-iv\mathsf{G}/\hbar}$ と異なっているように見える．この違いの理由は，式 (8.118) と (8.120) が明らかにシュレーディンガー描像で書かれているのに対し，式 (8.113) の演算子 G はハイゼンベルク描像で書かれているからである．これら二つの描像が一致する時刻 $t=0$ で，ユニタリー演算子はともに同じ，すなわち $e^{imvx/\hbar}$ である．すると $t \neq 0$ における演算子 (8.113) の具体形は，それが運動の定数であるということから得られる．一方，式 (8.119) の因子 $\exp(-imv^2t/2\hbar)$ は，新しいエネルギースケールでの 0 を定義する自明な位相調整に過ぎない．

ガリレイ群

ガリレイ群には，時空の並進と 3 次元回転，そしてブーストが含まれる．物理系が質量 m_A の粒子 (その正準座標を x_{Ak} および p_{Ak} とする) から構成されている場合，ブーストはエルミート演算子

$$\mathsf{G}_k = \sum_A (t\,\mathsf{p}_{Ak} - m_A\,\mathsf{x}_{Ak}) \tag{8.123}$$

によって生成される．これは (8.113) の自明な一般化である．ここで

$$[\mathsf{G}_k, \mathsf{G}_l] = \mathsf{O} \tag{8.124}$$

となることは容易にわかる．この性質は $[\mathsf{p}_k, \mathsf{p}_l] = \mathsf{O}$ と似ており，単に異なる方向へのブーストが可換であるという事実を表しているだけである．

式 (8.123) からは

$$[\mathsf{G}_k, \mathsf{J}_l] = i\hbar\,\epsilon_{klm}\,\mathsf{G}_m \tag{8.125}$$

も得られるが，これはブーストの生成子がベクトル演算子であることを物語っている．最終的に，

$$[\mathsf{G}_k, \mathsf{p}_l] = -i\hbar\,\delta_{kl}\sum_A m_A \tag{8.126}$$

が得られる．この最後の方程式は新しい特徴を示している．その右辺は c 数 (あるいは，こちらの言い方の方がよければ，恒等演算子の定数倍) である．この c 数が $[\mathsf{G}_k, \mathsf{p}_l]$ の値を導出する過程でいかに現れることになったかを [式 (8.67) の $[\mathsf{J}_m, \mathsf{p}_n]$ の値を回転と空間並進とを交互に考えることによって導いたように] 一連の並進とブーストの**幾何学的**性質にもとづいて理解することは有益である．同じ方法に従えば，座標の並進とブーストは交換することがわかる．したがって，量子論で $[\mathsf{G}_k, \mathsf{p}_l]$ は，

$$[\mathsf{p}_k, \mathsf{p}_l] = i\hbar^2\sum_s \epsilon_{kls}\,V_s\,\mathbb{1} \tag{8.55}$$

のベクトル $\mathbf{V}$ のように，すべてと交換する c 数でなければならない．しかし，$[\mathsf{G}_k, \mathsf{p}_l]$ と $[\mathsf{p}_k, \mathsf{p}_l]$ の間には重要な違いがある．後者は添字 kl に関して反対称であるのに対して，$[\mathsf{G}_k, \mathsf{p}_l]$ に対してはそのような反対称性の要請は何もない．このことは式 (8.126) の右辺を構成する上でより柔軟性をもたらす．というのは，添字に関しては**対称的**な不変記号 δ_{kl} があり，さらに $\mathsf{Gp}/\hbar$ と同じ次元をもった**質量**という物理量であるからである．こうして式 (8.126) の右辺は系の全質量に対する幾何学的定義となる．**時空変換性**において**質量**ははっきりとした役割を演じる．

まだ交換子 $[\mathsf{G}_k, \mathsf{H}]$ の計算が残っている．もし，H によって生成される時間並進が対称性をもてば (すなわち，能動的変換と受動的変換が等価であれば)，この交換子も時空並進とブーストを交互に考えることで式 (8.36) から同様にして求めることができる．これらは，おのおのユニタリー変換 $\Omega \to e^{\mathsf{A}}\Omega e^{-\mathsf{A}}$ と $\Omega \to e^{\mathsf{B}}\Omega e^{-\mathsf{B}}$ によって表される．ここで

$$\mathsf{A} = i\tau\,\mathsf{H}/\hbar \qquad \text{および} \qquad \mathsf{B} = i\sum_k v_k\,\mathsf{G}_k/\hbar \tag{8.127}$$

である．しかし，対応する幾何学的変換を指定するさいには注意が必要である．ユニタリー演算子 e^{B} は式 (8.115) のようにブースト $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ を引き起こすが，演算子 e^{A} は，時間 t が力学変数ではないから，これを変えない．e^{A} の実際の作用はすべての力学変数を次のように変更することである．各変数は新しい変数に置き換えられるが，新しい変数の現在の値は，古い変数の時間 τ 後の値に等しい．たとえば，$\mathbf{r}$ は $\mathbf{r} + \tau\dot{\mathbf{r}}$

となる．(τ の高次は無視されている.) こうして，式 (8.67) と同じように，

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &\xrightarrow{\mathsf{A}} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \tau\,\dot{\mathbf{r}} \\ &\xrightarrow{\mathsf{B}} \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{v}\,t = \mathbf{r} + \tau\,\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v}\,t \\ &\xrightarrow{-\mathsf{A}} \mathbf{r}''' = \mathbf{r}'' - \tau\,\dot{\mathbf{r}}'' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\,t - \mathbf{v}\,\tau \\ &\xrightarrow{-\mathsf{B}} \mathbf{r}'''' = \mathbf{r}''' - \mathbf{v}\,t = \mathbf{r} - \mathbf{v}\,\tau\end{aligned} \tag{8.128}$$

が得られる．これら一連の変換の結果は無限小ベクトル $-\mathbf{v}\,\tau$ による並進である．再び式 (8.36) を用いて，

$$\left[\sum_k v_k\,\mathsf{G}_k\,,\tau\,\mathsf{H}\right] = -i\hbar\sum_k v_k\,\tau\,\mathsf{p}_k \tag{8.129}$$

が得られる．これはあらゆる τ と v_k の値に対して成立するから，

$$[\mathsf{G}_k,\mathsf{H}] = -i\hbar\,\mathsf{p}_k \tag{8.130}$$

となる．

演習問題 8.32　式 (8.130) は次の形をした任意のハミルトニアン

$$\mathsf{H} = \sum_A (\mathbf{p}_A{}^2/2m_A) + \sum_{AB} V(\mathsf{r}_{AB}) \tag{8.131}$$

ただし $\mathsf{r}_{AB} = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|$，つまり V は粒子間距離にのみ依存し，個々の位置には依存しないポテンシャルに対して満たされることを示せ．

8.9　相対論的不変性

物理学の法則は，$v \ll c$ の極限でもガリレイ変換，つまり $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ かつ $t' = t$ のもとで不変ではない．方程式 $t' = t$ は時間を測定するために使われる時計の運動とは独立な，普遍的時間の存在を意味している．これは非物理的仮定である．勝手な運動をする離れた時計を同期させるためには，それらの間で情報を伝達する必要があるが，これを瞬時に行える物理的作用は存在しない．利用可能な最善の同期法は，光の信号 (あるいは等価な電磁気学的方法) を用いたものである．その理由は，後者がおのおのの慣性座標系で，同じ再現可能な速度をもっているからである．これは，一様な相対運動をしている座標系 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ の時間，t と t' が

$$c^2t^2 - \mathbf{r}^2 = c^2t'^2 - \mathbf{r}'^2 \tag{8.132}$$

と関係していることを意味する．ここで c は不変な信号速度である．これより，無限小空間変換

$$\mathbf{r} \;\to\; \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t \tag{8.133}$$

とともに，時間変換

$$t \ \rightarrow \ t' = t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2 \tag{8.134}$$

がなければいけないことになる．これら二つの方程式は無限小ローレンツ変換を定義している．式 (8.134) はいくらでも大きな $\mathbf{r}$ に対して成立しなければならないから，これは $v \ll c$ でもガリレイ変換に帰着しない．$v \ll c$ の場合，v^2/c^2 のオーダーの項は無視できるが，$\mathbf{v}$ の 1 次の項は無視できない．

演習問題 8.33 有限の $\mathbf{v}$ に対するローレンツ変換が

$$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{v} = \gamma\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} + v^2\,t) \qquad \text{と} \qquad \mathbf{r}'\times\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} \tag{8.135}$$

および

$$t' = \gamma\,(t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2) \tag{8.136}$$

で与えられることを示せ．ただし，$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ である．**ヒント**：式 (8.132) が $\mathbf{v}$ のすべてのオーダーで成立していること，そして無限小変換 (8.133) と (8.134) が v^2/c^2 以上の v/c の高次項を無視して再現されることを示せ．

時間変換則 (8.136) は位置 $\mathbf{r}$ をあらわに含んでいる．このことから，“双子のパラドックス” のような，直観に反した面白い現象が導かれる．冗談は抜きにしても，これは正準形式において，力学変数 $\mathbf{q}$ を幾何学的座標 $\mathbf{r}$ のように変換させ，$\mathbf{q}$ に空間での位置としての物理学的意味をもたせようとするさいに困難を生じる．明らかに，正準形式で $t' = t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}/c^2$ とはできない．t と t' が数値パラメーター (c 数) であるのに対し，$\mathbf{q}$ が力学変数 (あるいは量子論では演算子) であるからである．このことは，いくつかの粒子が存在している場合にはさらに明白となる．この場合，相対速度 $\mathbf{v}$ をもった二つの座標系のおのおので，各粒子はそれぞれの位置変数 $\mathbf{q}_A$ をもつのに対して，(正準形式，あるいはシュレーディンガー形式で) 時間は一つ (t あるいは t') しかないのである．

相対論的正準力学

相対性理論は，時間と空間を一つの概念 (4 次元ミンコフスキー時空) として密接に統合したものとして提案されるのが通例である．力学法則は “固有時” $d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2/c^2$ に関する微分を用いて，簡潔かつ整然と書き表すことができる．方程式の相対論的不変性は，そのテンソル添字をしらべるだけでただちに確立することができる．

残念ながら，この 4 次元形式は，正準量子化を考えようとすると，きわめて扱いづらくなる．量子化された形式で $\sum g_{\mu\nu}\, p^\mu\, p^\nu = m^2c^2$ というような代数学的拘束を扱うのは困難だからである．さらに，いくつかの粒子が関与する場合，粒子数と同じだ

けの固有時があるのに対して，多粒子系の量子相関を記述するためには一つの波動関数が用いられなければならない．したがって，簡潔な 4 次元形式を捨てて，時空変数を分離した古い形式に戻るのが望ましい．しかし，もはやこのとき方程式の相対論的不変性を単にそのテンソル添字の点検だけで証明はできない．理論が相対論的であるか否かを判定するための，より精巧な方法が必要となる．マクスウェルの方程式の発表から，これらの方程式がローレンツ群のもとで不変であるというローレンツの証明の間には 30 年以上の年月が経っていたことを思い起こそう．

伝統的に，古典系[*19]を量子化する第一歩は，運動方程式を正準形式で書き下すことである．これらの正準運動方程式と特殊相対性からの要請とが両立する条件は，最終的にディラック[*20]によって解析されるまで，長い間明らかでなかった．ディラックの議論の本質は，もし正準形式がある一つのローレンツ系で可能ならば，(相対性の原理より) それはいかなるローレンツ系でも可能なはずである，ということだった．したがって，(通常の空間回転が正準変換であるのと同じ理由で) ローレンツ変換は力学変数の正準変換でなければならない．

こうして相対論的正準形式の存在は，座標変換 (8.135) と式 (8.136) のもとでの力学法則の不変性を要求するとともに，さらに，各粒子の力学変数 $\mathbf{q}_A$ と $\mathbf{p}_A$ の正準 (あるいはユニタリー) 変換が存在して，各 $\mathbf{q}_A$ が式 (8.135) の幾何学的座標 $\mathbf{r}$ のようにふるまうことを要求する．これらすべての要求が同時に満足できる (すなわち，正準形式が相対論と両立する) のかどうかは自明でない．

まず正準変数 $\mathbf{q}(t)$ と $\mathbf{p}(t)$ をもった 1 個の自由粒子をしらべよう．ローレンツ変換の正準 (あるいはユニタリー) 表現が存在することは以下のようにして示される．まず

$$\mathbf{q}(t) \ \to\ \mathbf{q}'(t) \equiv \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t) \tag{8.137}$$

を考えよう．この方程式に現れているのは一つの時間 t である (t' はない) ことに注意しよう．実際，古典的 [*19] 正準変換，あるいは量子論的ユニタリー変換は，力学変数ではない時間を変更しない．ローレンツ変換の効果は，$\mathbf{v}$ の 1 次までで

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)\\ &= \mathbf{q}'(t' - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2) - \mathbf{q}(t)\\ &= \mathbf{q}'(t') - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\dot{\mathbf{q}}'(t') - \mathbf{q}(t)\end{aligned} \tag{8.138}$$

となる．ここで時間に対する無限小変換 (8.134) と $\mathbf{v}$ の 1 次までの展開結果を使った．さらに，力学変数 $\mathbf{q}$ が幾何学的座標 $\mathbf{r}$ として変換すれば，式 (8.133) のために

$$\mathbf{q}'(t') = \mathbf{q}(t) + \mathbf{v}t \tag{8.139}$$

となることに注意しよう．このことは，与えられたローレンツ変換を満たす正準変換のもとで世界線が不変であることを意味している．そこで式 (8.138) の $\mathbf{r}$ を $\mathbf{q}$ で置き

[*19] ここで，“古典的” という言葉は (“相対論的” の反対ということではなく)“量子化された” の反対として用いられている．
[*20] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949) 392.

換えることができる．また $\dot{\mathbf{q}}'(t')$ を $\dot{\mathbf{q}}(t)$ で置き換えることもできる．その差は $\mathbf{v}$ の1次であるが，これ自身にはすでに $\mathbf{v}$ が掛かっているからである．こうして

$$\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}t - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}/c^2)\,\dot{\mathbf{q}}(t) \tag{8.140}$$

が得られるが，これはポアソン括弧式を使って

$$\delta\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q},\ \mathbf{v}t\cdot\mathbf{p}]_{\mathrm{PB}} - [\mathbf{q},\ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}/c^2)\,H]_{\mathrm{PB}} \tag{8.141}$$

と書くことができる．

こうして，無限小変換 (8.137) が $\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}$ によって生成される正準変換であることがわかった．ここで

$$\mathbf{K} := t\,\mathbf{p} - H\mathbf{q}/c^2 \tag{8.142}$$

はローレンツ・ブースト生成子である．対応する量子論の表現は

$$\mathsf{K}_j := t\,\mathsf{p}_j - (\mathsf{H}\,\mathsf{x}_j + \mathsf{x}_j\,\mathsf{H})/2c^2 \tag{8.143}$$

となる．ガリレイ・ブースト演算子 (8.123) と比較すると，質量 m のかわりに H/c^2 が現れていることがわかる．これは非自明な力学変数であり，m とは違って，何とでも可換というわけではない．

ポアンカレ群の代数

ポアンカレ群 (非斉次ローレンツ群ともよばれる) は時空並進と回転およびローレンツ・ブーストから構成される．これらは，おのおの $\mathsf{p}_n, \mathsf{H}, \mathsf{J}_n$ および K_n から生成される．

K_n と他の生成子との交換関係を求めよう．もし物理系が空間並進と回転のもとで不変であり，したがって H が p_m および J_m と可換であるとすると，式 (8.143) から

$$[\mathsf{p}_m\,, \mathsf{K}_n] = i\hbar\,\delta_{mn}\,\mathsf{H}/c^2 \tag{8.144}$$

および

$$[\mathsf{J}_m\,, \mathsf{K}_n] = i\hbar\sum_s \epsilon_{mns}\,\mathsf{K}_s \tag{8.145}$$

が得られる．H の具体的な知識なしに $[\mathsf{H}, \mathsf{K}_n]$ を求めるために，$[\mathsf{H}, \mathsf{G}_n]$ の導出と同様，時間並進とブーストを交互に考える．ここでの新しい状況は，ブーストが，単純に $\delta\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ ではなく，式 (8.140) で与えられるということである．それにもかかわら

ず，最終結果は式 (8.128) と同じである．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} \xrightarrow{\mathsf{A}} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \tau\,\dot{\mathbf{r}} \\
\xrightarrow{\mathsf{B}} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}\,t - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'/c^2)\,\dot{\mathbf{r}}' \\
&= \mathbf{r} + \tau\,\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v}\,t - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} - \tau\,(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{r}}/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} - \tau\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\ddot{\mathbf{r}} \\
\xrightarrow{-\mathsf{A}} \mathbf{r}''' &= \mathbf{r}'' - \tau\,\dot{\mathbf{r}}'' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\,t - \mathbf{v}\,\tau - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} \\
\xrightarrow{-\mathsf{B}} \mathbf{r}'''' &= \mathbf{r}''' - \mathbf{v}\,t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'''/c^2)\,\dot{\mathbf{r}}''' = \mathbf{r} - \mathbf{v}\,\tau
\end{aligned} \tag{8.146}
$$

この導出過程で τ^2 あるいは v^2 に比例した項はすべて捨てられた．こうして，式 (8.130) のように，

$$
[\mathsf{H}, \mathsf{K}_n] = i\hbar\,\mathsf{p}_n \tag{8.147}
$$

が得られる．

一方，1 個の粒子という特別な場合，式 (8.143) に与えた K_n に対するあらわな表現から

$$
[\mathsf{H}, \mathsf{K}_n] = -(\mathsf{H}\,[\mathsf{H}, \mathsf{x}_n] + [\mathsf{H}, \mathsf{x}_n]\,\mathsf{H})/2c^2 = i\hbar\,(\mathsf{H}\,\dot{\mathsf{x}}_n + \dot{\mathsf{x}}_n\,\mathsf{H})/2c^2 \tag{8.148}
$$

が得られる．式 (8.147) と比較すると $\dot{\mathsf{x}}_n = c^2\mathsf{p}_n/\mathsf{H}$ が得られる．同じ結果は，式 (8.144) と (8.147) のおかげで

$$
[\mathsf{H}^2 - \mathbf{p}^2c^2, \mathsf{K}_n] = \mathsf{O} \tag{8.149}
$$

となることから求めることができる．$(\mathsf{H}^2 - \mathbf{p}^2c^2)$ は H と p_n，そして J_n とも交換するから，ローレンツ・スカラー (c 数か，あるいは物理系のローレンツ不変な内部特性にのみ依存する演算子) でなければならない．こうして，系の全**質量**を

$$
m^2c^4 := \mathsf{H}^2 - \mathbf{p}^2c^2 \tag{8.150}
$$

で定義することができる．

演習問題 8.34 上の関係式から $\dot{\mathsf{x}}_n = c^2\mathsf{p}_n/\mathsf{H}$ を導出せよ．

私たちにはまだ交換子 $[\mathsf{K}_m, \mathsf{K}_n]$ を求めることが残っている．式 (8.146) で用いたのと同じ方法を使い，速度 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のブーストを続けて考えよう．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} \xrightarrow{\mathsf{A}} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{u}\,t - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} \\
\xrightarrow{\mathsf{B}} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}\,t - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'/c^2)\,\dot{\mathbf{r}}' \\
&= \mathbf{r} + \mathbf{u}\,t + \mathbf{v}\,t - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\,t/c^2)\,\dot{\mathbf{r}} \\
&\quad + (\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,\dot{\mathbf{r}}/c^4 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{r}})\,\dot{\mathbf{r}}/c^4 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,\ddot{\mathbf{r}}/c^4 \\
&\quad - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{8.151}
$$

わずか 2 ステップを終えた段階で，この結果には驚かされる．実際，ほとんどの項が $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の交換に対して対称であり，さらに $-\mathbf{u}$ と $-\mathbf{v}$ のブーストを実行すれば消えてしまい，まったく関係なくなってしまうのである．このことは式 (8.36) のかわりに式 (8.37) を使って見ることができる．その方程式に $\lambda\mathsf{A} = \mathbf{u}\cdot\mathsf{K}/i\hbar$ と $\lambda\mathsf{B} = \mathbf{v}\cdot\mathsf{K}/i\hbar$ を代入すると，演算子 $\Omega_{\mathrm{H}} = \mathbf{r}$ に対して

$$
\begin{aligned}
-[\,[\mathbf{u}\cdot\mathsf{K}/i\hbar,\ \mathbf{v}\cdot\mathsf{K}/i\hbar],\mathbf{r}\,] &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/c^2)\,\mathbf{u} \\
&\equiv (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{r}/c^2
\end{aligned}
\tag{8.152}
$$

が得られる．式 (8.151) の右辺に現れていたその他の項は，すべて相互に打ち消し合う．式 (8.152) の最終結果は無限小角度 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})/c^2$ の回転によるハイゼンベルク演算子 $\mathbf{r}$ の変化，すなわち $\delta\mathbf{r} = -[(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathsf{J}/i\hbar c^2, \mathbf{r}]$ と同じである．こうして

$$
\left[\sum_m u_m\,\mathsf{K}_m, \sum_n v_n\,\mathsf{K}_n\right] = -i\hbar\sum_{mns}(\epsilon_{mns}\,u_m\,v_n/c^2)\,\mathsf{J}_s \tag{8.153}
$$

が得られるが，これは各 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ に対して成立するから，

$$
[\mathsf{K}_m, \mathsf{K}_n] = -i\hbar\sum_{mns}\epsilon_{mns}\,\mathsf{J}_s/c^2 \tag{8.154}
$$

となる．

次のような疑問を感じた読者がいるかもしれない．「なぜ，**非線形変換** (8.140) にもとづいた，こんな面倒な式 (8.154) の導出を行ったのか? **線形変換** (8.133) と (8.134) からポアンカレ群のリー代数を導出する方がずっと簡単で，これらの結果を (たいていの教科書のように) 完全な 4 次元共変形式を用いて求める方がずっと容易だったはずなのに.」 この長い導出を行った理由は，特殊相対性と正準形式 (あるいは量子論) との首尾一貫性を示すために，ローレンツ・ブーストを **正準**(あるいはユニタリー) 変換として書き下したかったからである．このことは，次節で示すように，決して自明ではない．

8.10 相対論的力学の形式

スピンをもたない自由粒子の状態ベクトルを $\psi(\mathbf{q},t)$ とすると，ポアンカレ群の生成子は $\mathbf{p} = i\hbar\partial/\partial\mathbf{q}$，$\mathsf{H} = (m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2)^{1/2}$, $\mathsf{J} = \mathbf{q}\times\mathbf{p}$ および式 (8.143) の K である．もし，相互作用しないいくつかの粒子があって状態ベクトル $\psi(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,t)$ で記述されているとすると，生成子は和，すなわち $\mathbf{p} = \sum\mathbf{p}_A$，$\mathsf{H} = \sum\mathsf{H}_A$ などで与えられるのが普通である．各粒子は三つの座標 (そして運動量) をもっているが，正準形式で**時間は一つしか**ないことに注意しよう．

困難は，相互作用を導入しようとすると現れる．もし $\mathsf{H} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{V}$，あるいはより一般的に $\mathsf{H} \neq \sum\mathsf{H}_A$ と書こうとすると，式 (8.144) ($[\mathsf{p}_m, \mathsf{K}_n] = i\hbar\,\delta_{mn}\,\mathsf{H}/c^2$) の有効性を保証するためには，$\mathbf{p}$ もしくは K は (あるいは両方ともが)，相互作用項を取り込

んで変更されなければならない．この交換子は，ローレンツ・ブーストと時空並進との間の**運動学的**関係を表しており，ローレンツ不変な力学的相互作用の存在によって影響されるはずがないからである．

一方，もし力学変数 $\mathbf{q}_A$ を空間における**物理的位置**と解釈しようとすると，私たちは関係式 $\mathbf{p} = -i\hbar\sum_A \partial/\partial\mathbf{q}_A$ を保持し，また $\mathbf{K}$ をローレンツ変換則 (8.140) が満たされるように定義しなければならない．多粒子系の場合，この変換則は

$$\delta\mathbf{q}_A(t) = \mathbf{v}t - [(\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_A)\,\dot{\mathbf{q}}_A + \dot{\mathbf{q}}_A\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_A)]/2c^2 \tag{8.155}$$

となる．すでに説明したように，これは世界線が正準ローレンツ変換 (速度 $\mathbf{v}$ のブースト) のもとで不変に保たれるための必要条件である．

演習問題 8.35　最後の記述を，波束と平均値を使った量子論の言葉で言い換えよ．

変換則 (8.155) は，式 (8.143) のように

$$\mathbf{K} = t\,\mathbf{p} - (\mathsf{H}\,\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_A\,\mathsf{H})/2c^2 - \mathbf{Z}_A \tag{8.156}$$

であれば成立する．ただし，$\mathbf{Z}_A$ は $\mathbf{q}_A$ と可換な任意のベクトル演算子である．しかし，生成子 $\mathbf{K}$ は物理系全体に属しており，その形が A という名前の粒子に対して特別な立場を与えることはありえない．$\mathsf{H} = \sum \mathsf{H}_A$ となる，**相互作用していない**粒子の場合，このことは何の困難も引き起こさない．というのも

$$\mathbf{Z}_A = \sum_{B\neq A} [\mathsf{H}_B\,(\mathbf{q}_B - \mathbf{q}_A) + (\mathbf{q}_B - \mathbf{q}_A)\,\mathsf{H}_B]/2c^2 \tag{8.157}$$

のようにとることができるので，式 (8.156) で $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_A$ が得られるからである．一方，もし H が相互作用を含むとすると，この問題には純粋な接触ポテンシャル (つまり，$\mathbf{q}_A = \mathbf{q}_B$ のときに限って $\mathsf{H} \neq \mathsf{H}_0$ となる) 以外の解がないことを示すことができる[*21,*22]．

正準座標 $\mathbf{q}_A$ を粒子の物理的位置と同定する伝統を緩めて，この "非存在定理" を克服しようとする試みもあった．一見すると，(ポアンカレ群のもとで幾何学的座標として変換する) 物理的位置 $\mathbf{r}_A$ が正準変数 $\mathbf{q}_A$ と $\mathbf{p}_A$ の複雑な関数であっても，特に悪くはないように見える．$\mathbf{r}_A$ が互いに交換しないことも起こりうる．結局のところ，その他にも $\mathbf{J}$ の成分のように可換でなく，したがって同時に明確な値を与えることのできない，立派な力学変数が存在しているのである．古典的ラグランジアンをこれらの変数とその時間微分で書き下すことができないことを除けば，これは何ら悪いことではない．したがって，正準座標 $\mathbf{q}_A$ が幾何学的座標のように変換するという要請は簡単に捨て去ることができるように思われる．

しかし，そうではないのだ．もし，正準座標 $\mathbf{q}_A$ がローレンツ変換のもとでどのようにふるまうかに関して何の制約も課されなかったとすると，相対性原理は無意味と

*21 D. G. Currie, T. F. Jordan, and E. C. G. Sudarshan, *Rev. Mod. Phys.* 35 (1963) 350.
*22 H. Leutwyler, *Nuovo Cimento* 37 (1965) 556.

なってしまう．通常の交換関係を満足する，どんな **H**, **P** および **J** が与えられても，やはり必要とされるすべての交換関係を満たすベクトル演算子 **K** は常に構成可能である[*23]．したがって，ポアンカレ群生成子の代数を満足する力学変数の存在は，それ自身，ローレンツ不変性を保証するものではない．正しい物理的解釈を得るには，クラスター分解のような，他の要求が満たされなければならない [*23]．

その他の取り組み

ディラック [*20] は正準形式を徹底的に修正してこれらの困難を克服しようとした．状態は与えられた t の値に対しては定義できず，それが定義できるのは，双曲面 $c^2t^2 - \mathbf{r}^2 = a^2$ あるいはヌル平面 $ct = z$ といった，ローレンツ不変な超曲面上である．この新しい取り組みによって，より対称的な局面の与えられた方程式もあったが，ディラックの期待に反して，それは非自明な相互作用の導入を許さなかった．

現時点で知られている，相互作用を取り込んだ唯一の相対論的正準形式が**場の理論**である．場 $\Phi(x,y,z,t)$ は**無限個の**力学変数の集合である．空間座標 x, y, z は演算子ではなく，これらの変数に対する**ラベル**として使われる数値パラメーター (c 数) である．その役割は，有限な粒子集合を記述する力学変数 $\mathbf{q}_A$ と $\mathbf{p}_A$ に付けられたラベル A と同様なものである．力学的場の変数が無限個であることは新たな困難を引き起こす．**状態に関する和が発散**するのであり，これは有限個の連続変数のときに現れるものよりはるかに質が悪い．この新たな困難については，4 章の最後で簡潔に議論したが，**繰り込み**とよばれるテクニックによって克服できる．(しかし，この話題は本書の範囲を大幅に逸脱している.)

場の理論が相対論的であるために満たすべき条件は，同時刻交換関係[*24,*25]

$$[\mathcal{H}(\mathbf{x}), \mathcal{H}(\mathbf{y})] = -i\hbar \sum_k [\mathcal{P}^k(\mathbf{x}) + \mathcal{P}^k(\mathbf{y})] \frac{\partial}{\partial x^k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{8.158}$$

である．$\mathcal{H}(\mathbf{x})$ は場のハミルトニアン密度，$\mathcal{P}^k(\mathbf{x})$ は運動量密度である．以下の演習問題にその例を与えておく．

演習問題 8.36 ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(c^{-2}\dot{\Phi}^2 - \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi - \kappa^2\Phi^2)$ をもった実スカラー場に対して，式 (8.158) の有効性を確かめよ．

演習問題 8.37 ラグランジアン密度が $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ となる電磁場に対して，式 (8.158) の有効性を確かめよ． ⋆

相対論的量子力学には，最初ハイゼンベルク[*26]によって提案され，1960 年代にたいへん流行した別の定式化がある．これが S 行列理論であり，そこでは連続的な時間

*23 A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* 27 (1971) 1666.
*24 P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* 34 (1962) 592.
*25 J. Schwinger, *Phys. Rev.* 127 (1962) 324.
*26 W. Heisenberg, *Z. Phys.* 120 (1943) 513, 673.

発展を記述するのではなく，$t \to \pm\infty$ での漸近状態を関係づけることだけが目指された．S 行列要素は**散乱振幅**とよばれる．S 行列理論の基本的公理は，散乱振幅の (入射および散乱粒子の運動学的変数の関数としての) 解析性とユニタリー性，そして交差対称性である．後者は，与えられた入射粒子に対する振幅は対応する散乱反粒子に対する振幅の解析接続であり，その逆も成り立つということを要求している[*27,*28]．

S 行列形式は散乱問題に限られるわけではない．S 行列要素は，平面波 (運動量の"固有状態") で分類するのが便利ではあるものの，有限時刻で準備され観測される波束のように，初期状態および終状態はこれらの平面波の任意の線形重ね合せであってもよい[*29,*30]．S 行列の解析性，特にその**極構造**から，終状態 (観測過程) が初期状態 (準備過程) の前方光円錐の外側に局在する場合，観測できる確率は無視できるくらいに小さくなると証明できる．準備過程の前方光円錐の外側で観測は存在しないということを，理論とは無関係な条件として課す必要はない．必要なのは，準備 ("能動的" 入力) と観測 ("受動的" 出力) との間の明白な区別だけである．

さて，**最初から**計算できないというのが "純粋な" S 行列理論の弱点である．解析性とユニタリー性，そして交差対称性という一般原理は，オブザーバブルの間に多くの有益な関係式をもたらしたが，完全な計算が実行できるほど強力ではない．提唱者の大胆な努力にもかかわらず，相対論的量子論への主導的取り組みとして S 行列理論が場の量子論に取って代わることはなかった．

8.11 空間反転と時間反転

多くの物理法則は，座標系の並進と回転のもとで不変であるだけでなく，空間そして/あるいは時間座標の反転のもとでも不変である．一般に物理的物体を反転することは不可能であるものの，もとの物体の鏡映となる物体を準備することは可能であることが多い．このとき，反転された物体の映像と鏡に映ったもとの物体の映像とは区別できない．この章の冒頭で定義したように，これは一つの**対称性**である．同様に，時間を逆転はできないが，理想的な振り子の運動のような多くの基本的物理現象が時間反転のもとで不変である．振り子の映画をつくってこれを逆に回した場合，その結果は，同じ振り子の可能な運動の一つを表すだろう．

量子論では，時間が数値パラメーター (c 数) であるのに対して粒子の空間座標は力学変数であり，演算子で表されるから，これら二つの対称性は根本的に異なった方法で取り扱われる．さらに，鏡映反転はある平面に関して，たとえば $(x, y, z) \to (x, y, -z)$ のように定義される．同様に空間反転は，$(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$ のように原点に関して定義される．これら二つの操作は z 軸のまわりの $180°$ の回転によって結び付い

---

*27 G. F. Chew, *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, Benjamin, New York (1962).
*28 R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, and J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, Cambridge Univ. Press (1966).
*29 H. P. Stapp, *Phys. Rev. B* 139 (1965) 257.
*30 A. Peres, *Ann. Phys. (NY)* 37 (1966) 179.

ている．一方，時間反転は t を $-t$ とする形式的な名前の付け替えではない．それは一つの**過程**の反転であり，これによって初期状態は終状態に，そして終状態は初期状態になる．

空 間 反 転

空間反転が物理系の対称性であれば，遷移確率は保存される．したがって，ウィグナーの定理から，ヒルベルト空間での表現 $\psi \to \psi' = \mathsf{R}\psi$ はユニタリー写像であるか，反ユニタリー写像であるかのいずれかである．それがユニタリーでしかありえないことを以下で示す．

反転を表す最も簡単な方法は $\psi'(x) = \psi(-x)$ である．

$$\int \overline{\phi'(x)}\,\psi'(x)\,dx = \int \overline{\phi(-x)}\,\psi(-x)\,dx = \int \overline{\phi(x)}\,\psi(x)\,dx \tag{8.159}$$

であるから，これはユニタリー変換である．

演習問題 8.38 もし $\mathsf{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ であれば，$\langle \mathsf{R}^\dagger \mathsf{p} \mathsf{R}\rangle = -\langle \mathsf{p}\rangle$ となることを示せ．

反ユニタリー変換則 $\psi'(x) = \overline{\psi(-x)}$ が認められないことは容易にわかる．上の演習問題のように，$\langle \mathsf{p}\rangle$ の符号は変わることが予想されるが，この変換は $\langle \mathsf{p}\rangle$ を不変にする．さらに，エネルギー固有状態 $\psi = e^{-iEt/\hbar}f(x)$ は，エネルギーの符号が反対となった $e^{+iEt/\hbar}f(-x)$ になる．ハミルトニアンが下に有界で半無限のスペクトルをもっている (すなわち，系に基底状態が存在する) 場合，これは不可能である．

より一般的なユニタリー変換は $\mathsf{R}\psi(x) = e^{i\alpha}\psi(-x)$ である．ここで α は任意の位相である．二つの反転を引き続いて行うことによってもとの状態を回復しようとすれば，$e^{i\alpha} = \pm 1$ でなければならない．$\pm$ の符号は，当該の粒子に特有な性質である．この符号はその粒子の**内部パリティ**とよばれるが，その効果は相互作用でこのタイプの粒子が生成されたり吸収されたりするさいに明白となる．

演習問題 8.39 $\mathsf{J}_m = \sum \epsilon_{mns}\,\mathsf{x}_n\,\mathsf{p}_s$ が反転のもとで不変であることを示せ．

時 間 反 転

時間反転 (もっとよい名前は**運動反転**であろう) は次のように定義される．ユニタリー発展

$$\mathsf{v}(t_2) = \mathsf{U}(t_2, t_1)\,\mathsf{v}(t_1) \tag{8.80}$$

を考えよう．もし，系の力学的性質が時間反転のもとで対称的であれば，ある写像 $\mathsf{v}(t_j) \to \mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_j)$ が存在して，$\mathsf{v}(t_1)$ を $\mathsf{v}(t_2)$ に変換するユニタリー演算子 $\mathsf{U}(t_2, t_1)$ そ

のものが $\mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_2)$ を $\mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_1)$ に変換する．

$$\mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_1) = \mathsf{U}(t_2, t_1)\, \mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_2) \tag{8.160}$$

すると，式 (8.80) と (8.160) から

$$\langle \mathsf{v}(t_2), \mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_1) \rangle = \langle \mathsf{v}(t_1), \mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_2) \rangle \tag{8.161}$$

が得られる．これら二つの内積は $\mathsf{v}(t_1)$ と $\mathsf{v}(t_2)$ に関して反線形であるから，$\mathsf{v}^{\mathrm{T}}(t_j)$ は $\mathsf{v}(t_j)$ の反線形関数でなければならない．したがって時間反転は**反ユニタリー写像**である．

この結果はウィグナー[*31]によって最初に導出された．時間反転を別な仕方で定義しようとした試み[*32,*33]もあるが，今日広く採用されているのはウィグナーの定義である．

演習問題 8.40　$\langle \mathsf{p} \rangle$ と $\langle \mathsf{J} \rangle$ が時間反転のもとで符号を変えることを示せ．

もう一つの重要な対称性が**荷電共役** (もっとよい名前は，粒子–反粒子交換だろう) である．場の量子論の基本定理は，ローレンツ不変な局所場の理論はいずれも，空間反転と時間反転と荷電共役を組み合わせた操作のもとで不変でなければならない[*34,*35]と述べている．

8.12 参考文献

これらの話題についてより詳しくは，以下にあげるような専門書を参照していただきたい．

F. R. Halpern, *Special Relativity and Quantum Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1968).

J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton Univ. Press (1964).

P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley, Redwood City (1989).

J. Wess and J. Barger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (1983).

超対称性は相対論的時空対称性の拡張であり，そこには粒子の内部性質が取り込まれている．ボソンとフェルミオンは同じ超多重項表現に現れることが許される．

推 薦 図 書

E. P. Wigner, "On the unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group," *Ann. Math.* 40 (1939) 149 [*Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 6 (1989) 9 中に採録].

*31 E. P. Wigner, *Göttinger Nachrichten, Math.-Phys.* 31 (1932) 546.
*32 G. Racah, *Nuovo Cimento* 14 (1937) 322.
*33 J. Schwinger, *Phys. Rev.* 82 (1951) 914.
*34 G. Lüders, *Ann. Phys. (NY)* 2 (1957) 1.
*35 R. Jost, *Helv. Phys. Acta* 30 (1957) 409.

P. A. M. Dirac, "Forms of relativistic dynamics," *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949) 392; "The conditions for a quantum field theory to be relativistic," *ibid.* 34 (1962) 592.

L. L. Foldy, "Synthesis of covariant particle equations," *Phys. Rev.* 102 (1956) 568.

R. Peierls, "Spontaneously broken symmetries," *J. Phys. A* 24 (1991) 5273.

S. N. Mosley and J. E. G. Farina, "Quantum mechanics on the light cone: I. the spin zero case; II. the spin $\frac{1}{2}$ case," *J. Phys. A* 25 (1992) 4673, 4687.

9
情報と熱力学

9.1 エントロピー

既知の方法で準備された物理系に対して量子検証を行おう．検証に先立ってできることは，可能な結果の出現**確率**の予言だけである．検証が実行されると，これらの結果のうちの一つが実現され，結果は確実となる．この検証において得られると期待される平均的情報量に対する定量的な尺度は，次のように定義することができる．私たちが実行しようとしている検証の様々な結果に対する既知の確率を $p_1, \cdots, p_N$ としよう．すなわち，まったく同じように準備された n 個の系に同じ検証を行うと考え，n が大きな数であれば，結果 j は約 $n_j = np_j$ 個得られると期待するわけである．物理系の状態準備に対する知識から，これらの結果の相対頻度は予言できるが，(7 ページの図 1.3 の例に見られるように) 個々の結果の起こる順番は予言できない．これら n 個の結果を並び替えて得られる組合せは $n!/(n_1!n_2!\cdots)$ 通りである．もし $n \to \infty$ であれば，n_j はすべて大きな数であるので，スターリングの近似を使って

$$\log \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots} \simeq n \log n - n - \sum_j (n_j \log n_j - n_j) = -n \sum_j p_j \log p_j \tag{9.1}$$

が得られる．次の表式

$$S := -\sum_{j=1}^{N} p_j \log p_j \tag{9.2}$$

は確率分布 $\{p_1, \cdots, p_N\}$ の**エントロピー**とよばれる．これは検証に先立つ私たちの無知の程度を表す一つの規準である．

p_j がすべて $1/N$ に等しいときに S が最大となることは容易にわかる．拘束 $\sum p_j = 1$ を考慮して，式 (9.2) を

$$S = -\sum_{j=1}^{N-1} p_j \log p_j - p_N \log p_N \tag{9.3}$$

と書こう．ここで p_N は

$$p_N \equiv 1 - \sum_{j=1}^{N-1} p_j \tag{9.4}$$

と定義され，他の p_j はすべて独立変数と考えられる．すると

$$\partial S/\partial p_k = -\log p_k + \log p_N \tag{9.5}$$

が得られるが，これは $p_k = p_N = 1/N$ のとき 0 となる．これが S の唯一の極値を与える．

一般に，エントロピーは準備過程だけでなく，確率 p_k の定義される検証の選択にも依存する．**あらゆる**検証に対して私たちの無知が最大，すなわち $p_k = 1/N$ の場合，その状態準備は**ランダム混合**(31 ページの仮定 C を参照) とよばれ，これは密度行列

$$\rho_{mn} = \delta_{mn}/N \tag{9.6}$$

で表される．たとえば，熱光源からの光子は，**どんな**偏極検証でも，それが公正に実施されれば，どの向きの結果も等しく起こるので，"偏極していない" とよばれる．

別の極端な場合が，73 ページの式 (3.80) のように $\rho^2 = \rho$ となる**純粋状態**である．この関係式は，

$$\rho_{mn} = v_m \overline{v_n} \tag{9.7}$$

となるベクトル v の存在を意味している．式 (9.7) のような純粋状態は，量子系の準備過程で与えうる最大の情報量に対応している (30 ページの仮定A)．73 ページの式 (3.78) のような中間の場合は，状態準備に関する**部分的情報**に対応する．

演習問題 9.1 70% の確率で右回りの円偏光を生成し，30% の確率で左回りの円偏光を生成するような過程によって光子を準備するとする．円偏光の検証においてこれらの光子のエントロピーはいくらか? 直線偏光の検証の場合はいくらか?

解答：それぞれ，0.61086，0.69315.

演習問題 9.2 70% の確率で右回りの円偏光を生成し，30% の確率で x 方向の直線偏光を生成するような過程によって光子を準備するとする．円偏光の検証においてこれらの光子のエントロピーはいくらか? x 方向の直線偏光の検証の場合はいくらか?

解答：それぞれ，0.42271，0.64745.

エントロピーの概念はもともと古典熱力学で生じ，その後シャノン[*1]によって情報理論に導入された．エントロピーに対するこれら二つの定義の間には密接な関係のあることが，この章の後半で示される．特に，不可逆現象で生ずる熱力学的時間の矢は，情報処理過程に固有な，過去と未来の間の非対称性に等価である．

物理学者はエントロピーの定義にボルツマン定数に等しい余分な因子を含めるのが普通である．情報理論家は底 2 の対数を用いる．後者の場合，エントロピーの (すなわち，情報の) 単位は (**2 進値**の略語から) ビットとよばれる．

[*1] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* 27 (1948) 379, 623.

凸　関　数

エントロピーの重要な性質は，$S(p)$ がその引数 $p_1, \cdots, p_N$ の**凸関数**であるということである．これは，任意の二つの確率分布 $\{p'_j\}$ および $\{p''_j\}$ と，$0 \le \lambda \le 1$ となる任意の λ に対して，

$$S[\lambda p' + (1-\lambda) p''] \ge \lambda S(p') + (1-\lambda)\, S(p'') \tag{9.8}$$

となることを意味する.「異なる確率分布を混ぜると一様性だけが増す」というのがこの不等式の物理的意味である．式 (9.8) の証明は

$$\frac{d^2 S[\lambda p' + (1-\lambda) p'']}{d\lambda^2} \equiv -\sum_j \frac{(p'_j - p''_j)^2}{\lambda p'_j + (1-\lambda)\, p''_j} \le 0 \tag{9.9}$$

から得られるが，これは関数が凸であるための十分条件である[*2]．さらに，この 2 階微分はあらゆる j に対して $p'_j = p''_j$ となる場合にのみ 0 となる．

演習問題 9.3　もし $\lambda_\mu > 0$ で $\sum \lambda_\mu = 1$，そしてまた $p_{\mu j} \ge 0$ で $\sum_j p_{\mu j} = 1$ ならば，

$$S(\sum_\mu \lambda_\mu\, p_{\mu j}) \ge \sum_\mu \lambda_\mu\, S(p_{\mu j}) \tag{9.10}$$

となることを帰納法で証明せよ．

量子系の性質が，その系に対して実行可能な，ある最大検証 T の出力結果の確率 p_m を与えることで指定されると仮定してみよう．この確率分布のエントロピーは，検証 T の実際の結果に関する私たちの無知の尺度である．次に，**異なる**最大検証を選択したとしても，このエントロピーは**決して減少しない**ことを証明しよう．それは，検証 T の**かわりに**実行してもよいし，あるいは，検証 T を繰り返せるならば，その**後**で実行してもよい．

実際，検証 T に対する確率が p_m であれば，引き続く検証の確率は $p'_\mu = \sum_m P_{\mu m} p_m$ となる．$P_{\mu m}$ は 2.4 節で定義した 2 重に確率的な行列である．したがって新しいエントロピーは[*3]

$$S(p'_\mu) \ge S(p_m) \tag{9.11}$$

となる．上の不等式は

$$\begin{aligned}\sum_m p_m \log p_m - \sum_\mu p'_\mu \log p'_\mu &= \sum_m p_m\,(\log p_m - \sum_\mu P_{\mu m} \log p'_\mu) \\ &= \sum_{m\mu} p_m\, P_{\mu m} \log\,(p_m/p'_\mu)\end{aligned} \tag{9.12}$$

[*2] R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Interscience, New York (1936) vol. II, p. 326.

[*3] この不等式はエントロピーだけでなく，任意の凸関数に対して成立する．G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press (1952) p. 89 を参照せよ．

から証明することができる[4]．ここで $\sum_\mu P_{\mu m}=1$ を使った．$\log x \geq 1-x^{-1}$ である (等号は $x=1$ の場合に限って成立する) から，

$$S(p'_\mu)-S(p_m) \geq \sum_{m\mu} p_m\, P_{\mu m}\,(1-p'_\mu/p_m) \equiv 0 \tag{9.13}$$

となる．ただし，等号は $P_{\mu m}$ が置換行列である場合，つまり $\{p_m\}$ と $\{p'_\mu\}$ が同一の集合の場合に限って成立する．

どんな検証でも私たちの無知の程度を減らすことはできないと，逆説的に読者は思われるかもしれない．誤解を避けるために言っておくが，確率 p'_μ は検証に**先立って**予言されるものである．(検証の後には，確率は存在しない．あるのは確定した結果である.) これらの p'_μ はもともと与えられた確率 p_m よりも，常により一様な分布に近づく．(もっと正確には，一様性が**減少した**分布とはなりえない.) さらに検証を行えばさらにエントロピーを増加させるだけである．検証しようとすればするほど，最終的な結果について予言できることはますます少なくなる．もちろん，検証の後である**選択**を行い，それによって新しい状態に関する完全な知識を獲得することは可能である．しかし，この選択は新しい状態を準備することに相当し，もとの状態に関するあらゆる知識を消し去ってしまう．

準備状態のエントロピー

密度行列 ρ で表される状態準備がなされても，異なる検証には異なる確率 p_m の集合が対応しており，したがって，異なるエントロピーが対応する．**準備状態のエントロピー**を，その準備がなされてから行われる任意の完全検証に対して，表式 (9.2) のとりうる最低値として定義しよう．すると，最適な検証 [これは式 (9.2) を最小にする] は，密度行列 ρ の固有ベクトルによって構成された正規直交基底 v_μ

$$\rho\,\mathsf{v}_\mu = w_\mu\,\mathsf{v}_\mu \tag{9.14}$$

に対応しているということを示そう．この基底で ρ は対角的である．固有値 w_μ は

$$0 \leq w_\mu \leq 1 \qquad \text{そして} \qquad \sum_\mu w_\mu = 1 \tag{9.15}$$

を満足している．

ここで，与えられた状態に準備された物理系のアンサンブルに関する統計的性質が密度行列 ρ によって**完全に指定される**，というのが仮定 K (75 ページ) の主張であることを思い起こそう．$\langle \mathsf{A}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho \mathsf{A})$ から得られるすべての統計的予言は，あたかも w_μ の割合で系が確実に状態 v_μ にあるような通常の (古典的) 混合があったとした場合と同じである．したがって，もし基底 v_μ に対応する最大検証が繰り返せるように

[4] E. T. Jaynes, *Phys. Rev.* 108 (1957) 171.

なっていれば，確率 w_μ は不変であり[*5]，それゆえにエントロピー S も定数となる．他のどんな検証を選んでも，たったいま見たように，エントロピーを増加させるのみである．こうして，エントロピーが最小となる最適な検証は，密度行列を対角化する基底 v_μ に対応したものであることが証明された．こうして準備状態のエントロピーは

$$S = -\sum_\mu w_\mu \log w_\mu = -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho) \tag{9.16}$$

と書くことができる．ただし，演算子の対数は 67 ページの式 (3.58) で定義されている．

演習問題 9.4　演習問題 9.2 における ρ の固有値と固有ベクトルを求めよ．これらの固有ベクトルの物理的意味は何か? この準備状態のエントロピーはいくらか?

解答：0.36535.

複　合　系

複合系のエントロピー的性質は無数の不等式に従う[*6]．以下でそのうちのいくつかを証明し，この章の後半で用いる．まず，次の補題が必要である．

$\{\mathsf{v}_m\}$ と $\{\mathsf{e}_\mu\}$ を同じ物理系に対する二つの正規直交基底とし，$\rho = \sum w_m \mathsf{v}_m \mathsf{v}_m^\dagger$ と $\sigma = \sum \omega_\mu \mathsf{e}_\mu \mathsf{e}_\mu^\dagger$ を二つの異なる密度行列とする．両者の**相対エントロピー** $S(\sigma|\rho)$ を

$$S(\sigma|\rho) = \mathrm{Tr}\,[\rho\,(\log \rho - \log \sigma)] \tag{9.17}$$

で定義する．この表現を，ρ を対角的にする基底 v_m で評価しよう．$\log \sigma$ の対角要素は

$$(\log \sigma)_{mm} = \langle \mathsf{v}_m, \sum_\mu \log \omega_\mu\ \mathsf{e}_\mu \mathsf{e}_\mu^\dagger\, \mathsf{v}_m \rangle = \sum_\mu \log \omega_\mu\, |\langle \mathsf{e}_\mu, \mathsf{v}_m \rangle|^2 \tag{9.18}$$

となる．行列 $P_{\mu m} = |\langle \mathsf{e}_\mu, \mathsf{v}_m \rangle|^2$ は 2 重に推計的であり，式 (9.12) の証明のときと同じように，

$$S(\sigma|\rho) = \sum_m w_m\,(\log w_m - \sum_\mu P_{\mu m}\, \log \omega_\mu) \geq 0 \tag{9.19}$$

が得られる．等号は $\sigma = \rho$ の場合に限って成立する．上の証明は，ω_μ が $\sum P_{\mu m} w_m$ に等しくなくても成立していることに注意せよ．

さて，密度行列 $\rho_{m\mu,n\nu}$ (2 重添字の意味は 5 章と同じ) をもった複合系を考えよう．二つの部分系の縮約された密度行列は

$$(\rho_1)_{mn} = \sum_\lambda \rho_{m\lambda,n\lambda} \qquad \text{と} \qquad (\rho_2)_{\mu\nu} = \sum_j \rho_{j\mu,j\nu} \tag{9.20}$$

[*5] ここで，各系の状態も不変のままであると言いたくなるかもしれないが，これは実験的には確かめられない．単に，確率 w_μ が定数となることを示せるだけである．

[*6] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* 50 (1978) 221.

である．このとき

$$S(\rho) \le S(\rho_1) + S(\rho_2) \tag{9.21}$$

となることを示すことができる．**劣加法性**[*6]とよばれるこの不等式は，相関をもった一対の系には，二つの系が別々に考えられた場合よりも**より多くの情報**が含まれていることを意味している．

演習問題 9.5 一重項状態にある二つのスピン j 粒子に対して劣加法性を確認せよ．

解答：式 (9.21) は $0 < 2\log(2j+1)$ となる．

不等式 (9.21) を証明するには，まず

$$S(\rho_1) + S(\rho_2) \equiv S(\rho_1 \otimes \rho_2) \tag{9.22}$$

となることに注意する．それは，

$$\sum_m w_m \log w_m + \sum_\mu \omega_\mu \log \omega_\mu \equiv \sum_{m\mu} W_{m\mu} \log W_{m\mu} \tag{9.23}$$

だからである．ただし，w_m，ω_μ，$W_{m\mu} = w_m \omega_\mu$ はおのおの ρ_1，ρ_2，$\rho_1 \otimes \rho_2$ の固有値である．さて，ここで相対エントロピー

$$\begin{aligned} S(\rho_1 \otimes \rho_2 \,|\, \rho) &= \mathrm{Tr}\left[\rho\left(\log\rho - \log\ \rho_1 \otimes \rho_2\right)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\rho\left(\log\rho - \log\rho_1 - \log\rho_2\right)\right] \end{aligned} \tag{9.24}$$

を考えよう．式 (9.19) のおかげでこれは負でない量である．一方，

$$\mathrm{Tr}\,(\rho\log\rho_1) \equiv \sum_{m\mu n\nu} \rho_{m\mu,n\nu}\,(\log\rho_1)_{nm}\,\delta_{\nu\mu} \equiv \mathrm{Tr}\,(\rho_1\log\rho_1) \tag{9.25}$$

であり，同様な式が $\mathrm{Tr}\,(\rho\log\rho_2)$ に対しても得られる．これよりただちに劣加法性 (9.21) が従う．

また

$$S(\rho) \ge |S(\rho_1) - S(\rho_2)| \tag{9.26}$$

であって[*7]，$S(\rho)$，$S(\rho_1)$ および $S(\rho_2)$ が三角不等式に従うことも示される．

情報の消去

さて，なぜ情報処理に不可逆的な時間の矢が関係するのか考えてみよう．計算過程の論理に本質的な不可逆性は何もない．しかし，初期段階で，まずメモリーに**データを読み込まなければならない**．簡単のため，2 進値，1 と 0 が，おのおの直交状態，u

[*7] H. Araki and E. H. Lieb, *Comm. Math. Phys.* 18 (1970) 160.

と v で表されるように記憶素子が構成されているとしよう[*8]．さらに，最後に行われた計算によって，記憶素子は同じ確率で状態 u および v になったと仮定しよう．したがって，各記憶素子の状態は密度行列 $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ で表され，そのエントロピーは $\log 2$ である．

計算を始める前には，まず各記憶素子を v というような標準状態にリセットしなければならない．どんなユニタリー発展でも混合状態 $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ を純粋状態 $\mathsf{v}\mathsf{v}^\dagger$ にすることはできないから，このような 1 ビットの情報の消去あるいは上書きは，少なくとも 1 ビットのエントロピーを環境に移行することになる[*9]．メモリーを 0 にリセットする唯一の方法は，最初**既知**の純粋状態 w にあった熱浴にそれを結合させ，結合系全体をユニタリー発展

$$(\tfrac{1}{2}\mathbb{1})\otimes \mathsf{w}\mathsf{w}^\dagger \ \to\ \mathsf{v}\mathsf{v}^\dagger \otimes (\tfrac{1}{2}\mathbb{1}) \tag{9.27}$$

させることである．これによって，メモリーは望み通り標準状態に設定されたが，その一方で，1 ビットのエントロピーは熱浴に捨て去られており，混合状態になった熱浴を再び利用することはできない．

演習問題 9.6

$$\mathsf{U}(\mathsf{v}\otimes\mathsf{w}) = \mathsf{v}\otimes\mathsf{w} \qquad \text{かつ} \qquad \mathsf{U}(\mathsf{u}\otimes\mathsf{w}) = \mathsf{v}\otimes\mathsf{x} \tag{9.28}$$

となるユニタリー演算子 U をあらわに書き下せ．ここで x は w に直交している．

9.2 熱力学的平衡

ボルツマン分布 (**ギブス状態**ともよばれる) は次のような密度行列 ρ で表される．その固有状態はハミルトニアンの固有状態と同一であり，固有値 w_μ はエネルギー準位 E_μ と

$$w_\mu = e^{-\beta E_\mu}/Z \tag{9.29}$$

という関係にある．このとき，和

$$Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \tag{9.30}$$

は系の**分配関数**とよばれ，式 (9.29) を満たす準備状態は温度 $T = 1/\beta$ の**熱力学的平衡**にあるといわれる．(温度に対してエネルギー単位系を用いると，ボルツマン定数が 1 となって便利である.) 31 ページの仮定 C を満足するランダム混合は $\beta = 0$，すなわち温度無限大の熱平衡に対応している．

---

*8 純粋状態ではなく密度行列を用いるのがより現実的な仮定である．しかし，こうしても結論は変わらない．

*9 R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* 5 (1961) 183.

式 (9.29) と (9.30) から，平均エネルギーはただちに

$$\langle E\rangle = \sum_\mu w_\mu\, E_\mu = -\partial(\log Z)/\partial\beta \tag{9.31}$$

となる．

演習問題 9.7 ギブス状態は，与えられた $\langle E\rangle$ の値と矛盾しない最大のエントロピーをもっていることを示せ．

演習問題 9.8 $\partial\langle E\rangle/\partial\beta = \langle E\rangle^2 - \langle E^2\rangle < 0$ を示せ．

熱力学的平衡が保たれるぐらいのゆっくりした過程では，

$$d\langle E\rangle = \sum_\mu (w_\mu\, dE_\mu + E_\mu\, dw_\mu) \tag{9.32}$$

となる．$\sum w_\mu\, dE_\mu$ という項は，外部パラメーターの変化によって引き起こされたエネルギー準位のずれに起因している．これは系になされた**仕事**とよばれ，一方，

$$\delta Q = \sum_\mu E_\mu\, dw_\mu = d\langle E\rangle - \sum_\mu w_\mu\, dE_\mu \tag{9.33}$$

は系に移行した**熱** (熱移行の効果はエネルギー準位の出現確率を変えること) である．

その一方で，式 (9.29) からは

$$dS = -\sum_\mu \log w_\mu\, dw_\mu = \sum_\mu \beta E_\mu\, dw_\mu \tag{9.34}$$

となる．ここで $\sum dw_\mu = 0$ を用いた．式 (9.33) と (9.34) を比較すると

$$dS = \delta Q/T \tag{9.35}$$

が得られるが，これは良く知られた熱力学的なエントロピーの定義である[*10]．この定義が熱平衡にある系に対してのみ適応可能であるのに対し，より一般的な定義 (9.2) は常に有効であるということを心に留めておくべきである．

ここで，多くの場合なぜ物理系が熱平衡に移行することになるのか，説明しなくてはならない．**孤立**した系がそうならないのは確かである．その密度行列を $\rho = \sum w_\mu \mathsf{v}_\mu \mathsf{v}_\mu^\dagger$ とすれば，各 v_μ は $\mathsf{v}_\mu(t) = \mathsf{U}\mathsf{v}_\mu(0)$ のように線形的に発展するが，係数 w_μ は定数のままである．したがって，式 (9.16) で与えられるエントロピーもまた定数となる．[同じことは，古典統計力学 (そこではエントロピーが位相空間でのリュウビル密度によって定義されている) でも正しい.] 以下の議論[*11]は，量子系の熱平衡化が，すでに熱平衡にある**他の**系との多重衝突に起因しているという可能性を示している．

*10 F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, New York (1965) pp. 218–219.
*11 M. H. Partovi, *Phys. Letters A* 137 (1989) 440.

衝　突

当初相関のなかった二つの量子系の衝突において，結合密度行列は

$$\rho_a \otimes \rho_b \to \mathsf{U}\,[\rho_a \otimes \rho_b]\,\mathsf{U}^\dagger = \rho'_{ab} \tag{9.36}$$

のように発展する．全エントロピー $S(\rho'_{ab}) = S(\rho_a) + S(\rho_b)$ はこのユニタリー変換のもとで定数のままである．しかし，衝突後の二つの部分系の終状態を**別々**に考えたとすると，これらは**縮約された**密度行列

$$\rho'_a = \mathrm{Tr}_b(\rho'_{ab}) \qquad \text{および} \qquad \rho'_b = \mathrm{Tr}_a(\rho'_{ab}) \tag{9.37}$$

で与えられ，劣加法性の不等式 (9.21) のおかげで

$$S(\rho'_a) + S(\rho'_b) \geq S(\rho_a) + S(\rho_b) \tag{9.38}$$

が得られる．全エントロピーのこの増大は，$\rho'_{ab} \to \rho'_a \otimes \rho'_b$ という置き換えによって，私たちが衝突過程でつくられた相関を “忘れる” ことで生じている．この増大は力学過程ではない．ひとえに問題がどう定式化されたかということである．ここには時間の非対称性のミステリーなど存在しない．もし (衝突後の) 最終的な縮約された密度行列が与えられて，相関のない初期密度行列に対する最善の評価を求められたとすれば，その答にもまた，与えられたデータが供給している以上のエントロピーが含まれることだろう．

式 (9.38) を

$$\Delta S_a + \Delta S_b \geq 0 \tag{9.39}$$

と書こう．一般に記号 Δ は，衝突による物理量の増分を表している．たとえば，エネルギー保存から

$$\Delta\langle E_a\rangle + \Delta\langle E_b\rangle = 0 \tag{9.40}$$

となる．

ギブス状態 (9.29) にある系に対しては，

$$S - \beta\langle E\rangle = -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho + \beta\rho\mathsf{H}) = \log Z \tag{9.41}$$

が得られる．この系が他の系と衝突した場合，その終状態 ρ' は，一般にはギブス状態ではないが，それでもなお $S(\rho') - \beta\langle E'\rangle$ という量が考えられる．ここで β^{-1} は衝突前の**初期**状態の温度である．このとき

$$\begin{aligned} -\Delta(S - \beta\langle E\rangle) &= \mathrm{Tr}\,(\rho' \log \rho' + \beta\rho'\mathsf{H}) + \log Z \\ &= \mathrm{Tr}\,[\rho'\,(\log \rho' + \beta\,\mathsf{H} + \log Z)] \\ &= \mathrm{Tr}\,[\rho'\,(\log \rho' - \log \rho)] \end{aligned} \tag{9.42}$$

が得られる．この表現は式 (9.17) で定義されていた相対エントロピー $S(\rho|\rho')$ であり，すでに見たように負にならない．

平衡への接近

任意の初期状態にあった系 a と温度 β^{-1} の初期ギブス状態にあった系 b との衝突を考えよう．式 (9.42) からは

$$\Delta(S_b - \beta\langle E_b\rangle) \leq 0 \tag{9.43}$$

が得られる．この結果と式 (9.39) および (9.40) を結び付けて，

$$\Delta(S_a - \beta\langle E_a\rangle) \geq 0 \tag{9.44}$$

が得られる．

したがって，任意の初期状態にあった系 a が，初期にすべて温度 β^{-1} のギブス状態にあった別の系と多重衝突すると，表式 $S_a - \beta\langle E_a\rangle$ は決して減少せず，究極的にはある極値に接近するだろう．もし選択則がなければ (すなわち，もし系 a のあるエネルギー準位 E_μ 間の遷移を禁止するような保存則がなければ)，この極値は，拘束 $\sum w_\mu = 1$ のもとで

$$S_a - \beta\langle E_a\rangle = -\sum_\mu w_\mu \left(\log w_\mu + \beta E_\mu\right) \tag{9.45}$$

を最大とするものである．ラグランジュの未定乗数法を使うと，その解はギブス状態 (9.29) であることが容易にわかる．

熱力学の第零法則

初期に異なる温度，β_a^{-1} と β_b^{-1} のギブス状態にあった二つの系の相互作用を考えよう．式 (9.43) から

$$\Delta(S_b - \beta_b\langle E_b\rangle) \leq 0 \tag{9.46}$$

となり，同様に

$$\Delta(S_a - \beta_a\langle E_a\rangle) \leq 0 \tag{9.47}$$

となる．式 (9.39)，(9.40) と合わせて，

$$(\beta_a - \beta_b)\,\Delta\langle E_a\rangle = \beta_a\,\Delta\langle E_a\rangle + \beta_b\,\Delta\langle E_b\rangle \geq \Delta(S_a + S_b) \geq 0 \tag{9.48}$$

が得られるが，これは熱が高温系から低温系に流れることを意味している．

熱力学の第二法則

最後に，系 a と様々な初期温度 β_n^{-1} のギブス状態にあった一群の系 b_n との多重相互作用を考えよう．各段階において，式 (9.44) より

$$\Delta_n S_a \geq \beta_n\,\Delta_n\langle E_a\rangle \equiv -\beta_n\,\delta Q_n \tag{9.49}$$

が得られる．ここで δQ_n は n 番目の熱浴に熱として移行されたエネルギーである．循環過程では系 a の初期状態と終状態は同一であるから，$\sum_n \Delta_n S_a \equiv 0$ となり，したがって，$\sum_n \beta_n \delta Q_n \equiv \sum_n \delta Q_n / T_n \geq 0$ である．系 a はある過程を循環するものの，熱浴の全エントロピーは減少してはいけないのである．

9.3　理想量子気体

さて，量子論的エントロピー (9.16) が正真正銘のエントロピーであって，標準的な熱力学でのエントロピーと完全に等価であることを示そう．まず，希薄な不活性理想気体の混合エントロピーが

$$S = -N \sum_j c_j \log c_j \tag{9.50}$$

で与えられるという証明を思い出そう．$N = \sum N_j$ は全気体分子数，$c_j := N_j/N$ は気体 j の濃度である．以下では，異なる 2 種類の気体の場合について式 (9.50) を導出する．そこでは，j タイプの分子に対して透明で，他の分子に対しては不透明な半透膜の存在が仮定される．これらの膜は，図 9.1 に示したように，温度 T の恒温槽に浸された，摩擦のない理想機関におけるピストンとして用いられる．

分離の第一段階は，固いロッドで結ばれた 1 対のピストンを右に移動させることである．気体 A は (A に対して透明な) 左のピストンに何の圧力も及ぼさないが，気体 B は両方のピストンに同じ圧力を及ぼす．したがって，この可逆な分離を行うさいに仕事は必要でない．各気体はその体積が c_j 倍になるまで等温圧縮され，最終的な全体積は最初と同じである．理想気体 j を等温圧縮するのに必要な仕事は

$$-\int p_j \, dV = -N_j T \int dV/V = -N_j T \log c_j = -NT c_j \log c_j \tag{9.51}$$

である．この仕事は熱浴に解放され熱に変わる．全体は巨視的に可逆過程であるから，全エントロピーは保存される．したがって，初期状態の混合エントロピーは式 (9.50)

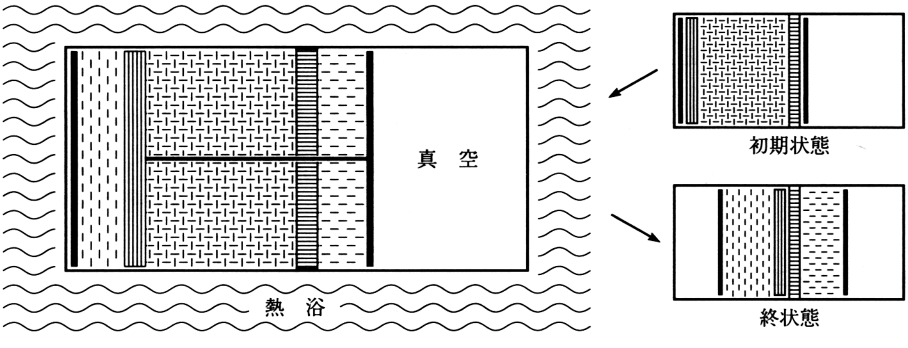


図 9.1　気体 A (を左に)，B を (右に) 分離する理想機関．縦，横にハッチを付けた半透膜ピストンは，おのおのの気体 A と B に対して透明である．初期状態を終状態へと移行させるためになされた機械的な仕事は，熱浴へ熱として解放される．

で与えられる．逆に，TS は理想気体の等温的混合によって機械的仕事に変換できる最大熱量である．(熱浴の無数の自由度にわたって無秩序に分布したエネルギーが熱という名前でよばれており，私たちはそれに対する詳細な記述の可能性をあきらめてしまった，ということを思い起こそう.)

量子論的なエントロピーの定義は，上の議論と密接に対応している．そこでは，やはり量子検証を実行するさいに利用できる半透膜の存在が仮定されている．これらの膜は，直交状態を効率 100% で分離する．ここでの基本的問題は，量子**状態**を様々な古典的理想気体と同じように取り扱うことが正当であるか，ということである．

初期の "前期" 量子論の時代にアインシュタイン*12は，この問題を次のように明確化した．量子系のアンサンブルを考え，各系を大きな不透明な箱に入れて互いに相互作用しないようにする．これらの箱はさらに大きな容器に収められ，各箱は**理想気体としてふるまう**．なぜならば各箱は，古典力学がその運動に対して有効に働くぐらい重いのである．(つまり，ボーア–ゾンマーフェルトの量子化規則は必要でないのだ．アインシュタインの議論が 1914 年に提出されたことを思い起こそう.) 容器自体は理想的な壁と，必要に応じて完全伝導，あるいは完全断熱，もしくは半透膜と同じ性質のピストンをもっている．後者にはある自動装置が付いていて，箱の中を覗いてそこに取り込まれた量子系の状態が検証できるようになっている．このとき，この機械全体は図 9.1 の装置と同じように機能することができる．

同様な仮定は後にフォン・ノイマン*13が用いたが，彼は，実際上実現可能性がなくてもアインシュタインの素晴らしいアイデアの実証的威力は損なわれないと力説した．すなわち,「現象論的熱力学の意味からすれば，想定されている過程は，熱力学の二つの基本法則に矛盾しない限り，いずれも正当性を主張できる.」フォン・ノイマンは，各量子系の状態を表す密度行列 ρ を用いて混合エントロピー (9.50) が $S = -N\,\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$ と書けることを示した．式 (9.50) の c_j は ρ の固有値に対応するものである．

アインシュタインの状態選別器の量子化

この古典–量子の混成論理は不満足なものである．というのも，古典系と量子系の相互作用に対する首尾一貫した力学形式は存在しないからである．ここでは，フォン・ノイマンのエントロピー (9.16) と古典熱力学における通常のエントロピーの等価性の証明の概要を，純量子論的立場から紹介しよう．

量子系のすべての内部自由度を集合的に $\mathbf{q}$ で示し，その質量中心を $\mathbf{R}$ とする．$\mathbf{R}$ の成分はアインシュタインが考えた不透明で古典的な箱の座標と同じ役割を果たすが，そ

*12 A. Einstein, *Verh. Deut. Phys. Gesell.* 16 (1914) 820.

*13 J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) p. 191 [transl. by E. T. Beyer: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press (1955) p. 359].

れらは**量子**変数である．量子系のハミルトニアンは

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_0(\mathsf{q}) + \mathbf{P}^2/2M \tag{9.52}$$

である．ここで，$\mathbf{P}$ は $\mathbf{R}$ に共役な運動量，M は系の質量，H_0 には内部変数のみが関与している．この段階で，内部自由度 q と並進自由度 $\mathbf{R}$ および $\mathbf{P}$ との間に相互作用は存在しない．

さて，アインシュタインの考えた大きな容器 (これは熱浴としての役割も果たす) を導入する．熱力学で通例となっているように，この容器の性質はきわめて理想化され，その自由度は二つに分類される．それは集合的に X と記される少数の巨視的変数 (質量中心の位置，空間的向き，ピストンの配置など) と，x と記され，容器の原子構造を記述している莫大な数にのぼる微視的変数である．(記号 X と x には運動量も含まれる.) ここでの理想化は，10^3 個ないしは 10^9 個の原子が関与する集団励起のような，微視的でも巨視的でもない“中間的 (メゾ) 変数”が存在しないとしたことである．このような理想的容器は想像の産物である．それにもかかわらず，これは，物理学の既知の法則を破らない限り，新法則を発見するうえでまったく合法的な道具である (上記のフォン・ノイマンの本からの引用を参照).

巨視的変数の特徴的性質は，初期時刻でそれらの観測可能値が明確に与えられる，つまり $\langle \mathsf{X}^2\rangle \simeq \langle \mathsf{X}\rangle^2$ ならば，それは力学発展全体を通して明確な値に留まるということである．この性質は，個々の分子の位置や運動量 (それらは多重散乱によってただちに大きな分散をもってしまう) のような微視的変数には当てはまらない．分子は容器とも衝突するが，1 回の衝突は後者に対して非常に小さな効果しか及ぼさない．認知できるのは**全体の**効果だけである．これが壁とピストンに及ぼされる**圧力**であり，容器が非常に大きく，その中にたくさんの量子系が含まれている場合，この圧力のゆらぎは小さい．

x と X に対するハイゼンベルクの運動方程式は

$$d\mathsf{x}/dt = f(\mathsf{X}, \mathsf{x}, \mathsf{q}, \mathbf{R}, \mathbf{P}) \tag{9.53}$$

および

$$d\mathsf{X}/dt = F(\mathsf{X}, \mathsf{x}, \mathsf{q}, \mathbf{R}, \mathbf{P}) + F_{\text{ext}} \tag{9.54}$$

という形になる．F_{ext} (c 数) は，ピストンを動かしたりバルブの開閉などを行っている実験家が直接制御できる外部作用によるものである．

最後の方程式の平均値をとると

$$d\langle \mathsf{X}\rangle/dt = \langle F(\mathsf{X}, \mathsf{x}, \mathsf{q}, \mathbf{R}, \mathbf{P})\rangle + F_{\text{ext}} \tag{9.55}$$

が得られる．変数 X の分散が小さいおかげで，式 (9.53) と (9.55) の右辺の X は $\langle \mathsf{X}\rangle$ で (あるいは，こちらの方がよければ $\langle \mathsf{X}\rangle\,\mathbb{1}$ で) 置き換えることができ，また $\langle \mathsf{X}\rangle$ は古

典的変数として考えることができるので，単に X と書くことにする．一般に，古典的力学変数と量子論的力学変数を混ぜてしまうと矛盾に陥ることが知られている．しかし，変数 X を，規定された時間依存性をもつ単なる**数値パラメーター**として扱う限り，何の矛盾も生じない．

さらに，これらのパラメーター X の運動はきわめてゆっくりであって，微視的変数は各時刻で熱平衡にあると仮定する．それらは温度 β^{-1} のギブス分布

$$\rho_{\mathrm{c}} = \exp(-\beta \mathsf{H}_{\mathrm{c}})/\mathrm{Tr}\,[\exp(-\beta \mathsf{H}_{\mathrm{c}})] \tag{9.56}$$

にある．ここで H_{c} は容器のハミルトニアンであり，x と数値パラメーター X に依存する．変数 X の分散が常に小さいまま保持されるのは，この熱平衡のおかげである．

最後に，問題にしている量子系とそれを取り囲む容器との**相互作用**を導入する．この相互作用は量子系と壁およびピストンとの多重散乱を引き起こす．ここで本質的なのは，量子系のエネルギーの広がり $\Delta \mathsf{H}$ が巨視的容器の平均的エネルギー準位間隔よりもずっと大きく，したがって量子系が容器のスペクトルの不連続性を感じることはないということである．

ここで，容器に量子系の内部変数と相互作用する半透膜の仕切りがあるか，単に通常の壁とピストンだけであるかによって，これら二つの場合を区別しなければならない．後者の場合，ハミルトニアンの相互作用項には (古典的パラメーターと見なされる) 巨視的変数 X と (量子化された) 微視的変数 x，そして量子系の位置変数 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{P}$ が含まれるが，その内部変数 q は含まれない．したがって，その時間発展は他の変数の発展からは完全に切り離されている．ここで前節の結果を適用することができる．変数 $\mathbf{R}$ および $\mathbf{P}$ に対する $S - \beta\langle E\rangle$ の最終値は，熱浴と同じ温度 β^{-1} のギブス状態に対応している．つまり，ハミルトニアン (9.52) で記述される量子系のアンサンブルは，質量 M の自由粒子からなる古典的理想気体と同じ統計的性質をもっている．特に，容器の壁には正確に同じ圧力を及ぼすことになる．

直交状態の選択

半透膜の仕切りが導入された場合，状況はずっと興味深くなる．これは，q, $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$ および X を含む相互作用項によって記述できる．古典的パラメーター X (これには可動な仕切りの位置も含まれる) が与えられた時間の関数であるということを思い起こそう．その時間依存性は，変数 x, $\mathbf{R}$ および $\mathbf{P}$ に関わる時間尺度ではきわめてゆっくりでなければならず，したがって，これらの変数は常に熱平衡状態にある．

式 (9.52) の右辺に $\mathsf{H}_{\mathrm{int}}(\mathsf{q}, \mathbf{R}, X)$ という項を加えた場合には，変数 q と $\mathbf{R}$ が相関をもった絡み合い状態が生成される．きわめて単純化した模型として 1 次元容器を考えよう．相互作用

$$\mathsf{H}_{\mathrm{int}} = -V_0\,\sigma_z\,\tanh K(\mathsf{R} - X) \tag{9.57}$$

によって，スピン上向きの粒子は位置 X に置かれた仕切りの一方に，スピン下向きの粒子はもう一方に集められる．ここで V_0 と K は大きな定数であり，記号 “tanh” は適当に滑された階段関数を表している．この相互作用は，量子系が半透膜の仕切りの位置 X の近傍にある場合，力 $\sim\sigma_z V_0 K$ を量子系に及ぼす．この結果はシュテルン–ゲルラッハの実験に似ている．σ_z の値が反対の粒子は反対方向に加速され，最終的な波動関数は (座標表示で) 二つの項の和となる．その各項において，$(\langle \mathsf{R}\rangle - X)$ の符号は $\langle\sigma_z\rangle$ と同じである．

演習問題 9.9 任意の演算子 A の異なる固有値を 3 次元容器の異なる領域へと分類する相互作用を書き下せ． ⋆

この簡単な抽象模型は，少なくとも理論上，**直交**状態にある量子系を $\mathbf{R}$ 空間の異なった領域に送り出せることを示している．それらは，ちょうど異なった種類の古典的理想気体の混合であるかのようにふるまう．したがって，フォン・ノイマンのエントロピー (9.16) が古典熱力学でのエントロピーに等価であることは明白である．(この記述は，エネルギー，運動量，角運動量などの量子論的概念が同じ名前の古典的概念と等価であるといわれるさいに付随する曖昧さと同じ意味合いの曖昧さをもっていると理解してほしい.)

純粋状態の自由エネルギー

一方，ある状況下では，量子系のアンサンブルが古典的理想気体の混合とはかなり異なった熱力学的性質を示すこともある．これは，本質的に非古典的な**非直交**状態が存在するためである．これらの状態は，部分的に似通っている．つまり，同一でもなければ，お互い完全に異なっているわけでもない．以下で示すように，これらは，任意の量子状態から別の勝手な量子状態への**連続的**な変換を可能にしている (具体例としては，7 ページの演習問題 1.1 を参照).

演習問題 9.10 v と w をある量子系の二つの直交状態とする．λ を実数として，$\mathsf{U}=\exp[\lambda(\mathsf{v}\mathsf{w}^\dagger-\mathsf{w}\mathsf{v}^\dagger)]$ が v と w で張られる部分空間を回転させるユニタリー行列

$$\mathsf{U}\mathsf{v}=\cos\lambda\,\mathsf{v}-\sin\lambda\,\mathsf{w},\qquad \mathsf{U}\mathsf{w}=\sin\lambda\,\mathsf{v}+\cos\lambda\,\mathsf{w} \tag{9.58}$$

であることを示せ．

以下の議論では，式 (9.58) に見られるようなユニタリー発展が，いずれも原理的に実験室で実現可能であると仮定する．これは定エントロピー過程であり，供給されたエネルギーは可逆的に取り戻すことが可能である．(あるいは，v と w が縮退したエネルギー固有状態となるような環境に系を置いてもよい.)

さて，任意の**純粋**状態にある n 個の量子系からなるアンサンブルは，温度 T の熱浴からエネルギーを取り出せることを示そう．実際，これらの系の半分を取り出し，式

(9.58) のようにそれらの純粋状態を直交状態へと可逆的に回転する．次に，これら二つの部分アンサンブルを定エントロピー的かつ可逆的に混合する．ここで $nT\log 2$ だけのエネルギーが熱浴から取り出される．より一般的には，この過程で用いられる量子系に N 個の直交状態があれば，純粋状態に用意されたアンサンブルをまったく同じ N 個の部分アンサンブルに分け，その内の $N-1$ 個を相互に直交する状態へと可逆的に回転し，最後にそれらを混合する．こうすることで，熱浴から $nT\log N$ だけのエネルギーが取り出せる．

9.4 実現不可能な過程

前節でしらべた概念的過程は，実際に実現することはこの上なく困難かもしれないが，基本的物理原理は何も破っていなかった．ここでは，真に実現不可能な過程について記述し，量子論の (たとえばユニタリー性のような) 基本原理を破っている力学的発展と，熱力学の第二法則で禁止された過程との間には密接な関係のあることを示す．

このように，何を量子論の基本公理とするかに関して，熱力学は厳しい制約を課しているようである．しかしこの主張は，フォン・ノイマンのエントロピーと通常の熱力学的エントロピーとの等価性に大きく依存している．この等価性の証明では (熱平衡の存在を導出するための) **ハミルトン**力学の有効性が仮定されているが，ここには**論点の先取り**(*petitio principii*) として知られる，論理的矛盾の存在する可能性がある．**ハミルトン**力学を拠り所としてある定理を証明し，そしてそれらの定理の系として非ハミルトン力学は首尾一貫していないと主張しているからである．この議論から引き出されるべき最終結論は，量子論の公理論的構造の保全が厳密に尊重されていない場合には，理論の**あらゆる**局面を改めて考え直さなければならないということである．

非直交状態の選択

式 (9.57) の相互作用およびその多次元への一般化によって，エルミート演算子の**異なる固有値**(これはある量子系の**直交**状態に対応している) が区別できるようになる．もっと一般的な検証はありえるのだろうか? あるずる賢い発明家が，曖昧さなしに非直交状態を選別する半透膜の仕切りをつくり出したと主張しているとしよう．以下に示すように，これによって彼は恒温槽から熱を際限なく引き出し仕事に変えることができる．読者はこの新技術に投資するだろうか?

この驚くべき発明がどのように機能するのかをしらべる前に，まず，そのような過程は完全性の仮定 K [これは，密度行列 ρ がアンサンブルの物理的性質のすべてを**完全**に記述していると主張している (75 ページ参照)] を破っていることに注意しよう．実際，P_1 と P_2 で量子系の二つの純粋状態を表し，ρ_0 はそれらを分離するために構築された装置の初期状態としよう．適切に構成された装置との相互作用は，次のよう

な力学的発展をもたらす.

$$\mathsf{P}_1 \otimes \rho_0 \to \mathsf{P}_1 \otimes \rho_1 \qquad \text{および} \qquad \mathsf{P}_2 \otimes \rho_0 \to \mathsf{P}_2 \otimes \rho_2 \tag{9.59}$$

ここで終状態 ρ_1 と ρ_2 は直交している. (すなわち, $\rho_1\rho_2 = \mathsf{O}$ である.) たとえば, ρ_1 と ρ_2 は異なる空間領域にあるかもしれない[*14]. 量子系の初期状態が混合 $\frac{1}{2}(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2)$ であれば, この分離器の効果は

$$\tfrac{1}{2}(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2) \otimes \rho_0 \;\to\; \tfrac{1}{2}(\mathsf{P}_1 \otimes \rho_1 + \mathsf{P}_2 \otimes \rho_2) \tag{9.60}$$

となる. この関係は仮定 K から従うものである. その理由は, 表式 $\frac{1}{2}(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2)$ によって表された統計的アンサンブルは, このアンサンブルがあたかもその要素の 50% が状態 P_1 にあり, 50% が状態 P_2 にあるかのようにふるまうことを意味しているからである. 初期状態が混合であれば 2 成分間の干渉効果は存在しないから, ここで線形性を仮定する必要はない.

式 (9.60) で表された力学過程は, 混合の P_1 および P_2 成分を, 最終的に各成分が装置の異なる終状態と相関をもつように分離している. 式 (9.60) の両辺の 2 乗をとると, $\frac{1}{4}$ の因子を除いて

$$(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1) \otimes {\rho_0}^2 \;\to\; \mathsf{P}_1 \otimes {\rho_1}^2 + \mathsf{P}_2 \otimes {\rho_2}^2 \tag{9.61}$$

が得られる. ここで ${\mathsf{P}_j}^2 \equiv \mathsf{P}_j$ と $\rho_1\rho_2 = \mathsf{O}$ を用いた. 式 (9.61) から (9.59) の **2 乗**を引くと $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathsf{O}$ となる. したがって, 式 (9.60) は, 状態 P_1 と P_2 が直交している場合, その場合に限って無矛盾となる.

さて, 図 9.2 に示した, 二つの非直交光子状態が関与する循環過程を考えよう. 容器の中には n 個の光子があるとする. そのうちの半分は鉛直方向の直線偏光状態に, 残りの半分は鉛直と 45° 方向の直線偏光状態に準備されている. 最初の状態 (**a**) にお

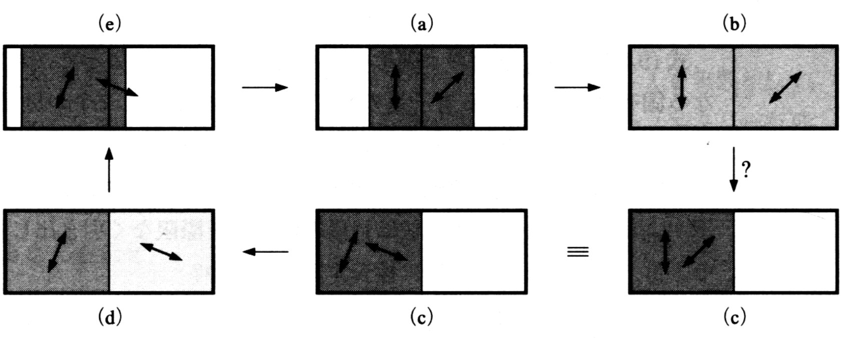


図 9.2　この循環過程は, 非直交光子状態を選別する仮想的な半透膜の仕切りを用いて, 恒温槽から熱を取り出し仕事に変換する. 二重矢印は光子の偏極を示している.

*14 演習問題 5.10 に示すように, 補助的なヒルベルト空間を導入すれば, ρ_0 を純粋状態 (これは ${\rho_0}^2 = \rho_0$ を満足する) と考えることは常に可能である. しかしこの偽ヒルベルト空間は力学発展には関与せず, ρ_1 と ρ_2 が再び純粋状態であるとすることはできない.

いて，それらは同じ体積の二つの部屋を占めている．循環過程の第一段階では，**(b)** に示すような等温膨張によってこれらの体積を倍にする．この膨張過程で，熱浴の温度を T として，$nT\log 2$ だけの仕事が (外部に対して) なされる．この段階で，二つの光子気体を分けていた不透膜の仕切りを，図 9.1 のような半透膜の仕切りで置き換える．しかし，これらの膜は**非直交**状態を選別するという特異な性能をもっているとする．その内の一つは，鉛直方向に偏極した光子に対して透明であるが，鉛直から 45° 方向に偏極した光子は反射する．もう一つの膜はこれと反対の性質をもっている．すると，図 9.1 に見られるような摩擦のない二重ピストンによって，仕事も熱の移行も伴なうことなくこの機関を状態 **(c)** へと移行することができる．こうして，密度行列

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{\dagger} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^{\dagger}\right] = \begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.25 & 0.25\end{pmatrix} \tag{9.62}$$

で表される，二つの偏極状態の**混合**が得られる．ρ の固有値は (鉛直から 22.5° 方向の偏極光子に対応した) 0.854 と (それと直交した偏光に対する) 0.146 である．

ここで，“魔法の” 膜を，これら二つの直交偏極状態を可逆的に分離する通常の膜で置き換えると，状態 **(d)** に至る．次のステップは等温圧縮であり，これによって，状態 **(a)** と同じ圧力および同じ全体積の状態 **(e)** に導かれる．この等温圧縮では

$$-nT\,(0.146\,\log\,0.146 + 0.854\,\log\,0.854) = 0.416\,nT \tag{9.63}$$

だけの仕事を費やす必要があり，これは熱として熱浴に解放される．この仕事は **(a)** から **(b)** の等温膨張で (私たちが) 得た仕事 $nT\log 2$ よりも小さい．正味の利得は $0.277\,nT$ である．最後に，式 (9.58) のような偏極ベクトルの適当な回転によって **(e)** から **(a)** に戻す段階で，仕事は関与しない．こうして，恒温槽から無制限に熱を取り出して仕事に変換するという閉じた回路の存在を示すことになったが，これは熱力学の第二法則を破っている．

非線形シュレーディンガー方程式

様々な動機から多くの著者が提案[*15,*16]しているように，シュレーディンガー方程式に対して非線形な修正が施されると，同様な第二法則の破れが生ずる．非線形シュレーディンガー方程式は，重ね合せの原理 G (49 ページ) を破らない．後者は物理系の純粋状態が複素線形空間内の射線で表現できることを主張しているが，これらの射線の時間発展が線形方程式に従うことは要求していないのである．

$\mathsf{u}(0)$ が $\mathsf{u}(t)$ に，$\mathsf{v}(0)$ が $\mathsf{v}(t)$ に発展するとき，$\mathsf{u}(0)+\mathsf{v}(0)$ で表される純粋状態が $\mathsf{u}(t)+\mathsf{v}(t)$ ではなく，他の純粋状態へと発展するような性質をもった，シュレーディンガー方程式の非線形版を考案することは難しくない (たとえば 242 ページを参照).

[*15] L. de Broglie, *Une Tentative d'Interprétation Causale et Nonlinéaire de la Mécanique Ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris (1956).
[*16] S. Weinberg, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 6 (1989) 67; *Ann. Phys. (NY)* 194 (1989) 336.

ここでは，もし**量子力学のその他の仮定がそのまま保たれている**のであれば，このような非線形発展は熱力学の第二法則を破ってしまうということを示そう．特に，前節で示された，フォン・ノイマン・エントロピーと通常の熱力学的エントロピーの等価性は保持されることになる．

密度行列

$$\rho = \lambda\,\mathsf{P}_{\mathsf{u}} + (1-\lambda)\,\mathsf{P}_{\mathsf{v}} \tag{9.64}$$

で表される量子系の**混合**を考えよう．P_{u} と P_{v} はおのおの純粋状態 u と v への射影演算子であり，$0<\lambda<1$ である．ρ の 0 でない固有値は，$x=|\langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle|^2$ として

$$w_j = \tfrac{1}{2} \pm [\tfrac{1}{4} - \lambda(1-\lambda)(1-x)]^{1/2} \tag{9.65}$$

である．この混合のエントロピー $S=-k\sum w_j \log w_j$ は任意の λ に対して $dS/dx<0$ を満足している．したがって，純粋状態が $\mathsf{u}(0)\to\mathsf{u}(t)$ および $\mathsf{v}(0)\to\mathsf{v}(t)$ と発展するとき，$x(t)\le x(0)$，すなわち

$$|\langle \mathsf{u}(t),\mathsf{v}(t)\rangle|^2 \le |\langle \mathsf{u}(0),\mathsf{v}(0)\rangle|^2 \tag{9.66}$$

である限り，混合 ρ のエントロピーは減少しない．(すなわち，混合がより非一様となることはない．) 特に，もし $\langle \mathsf{u}(0),\mathsf{v}(0)\rangle = 0$ であれば，やはり $\langle \mathsf{u}(t),\mathsf{v}(t)\rangle = 0$ となって，直交状態は直交状態に留まる．

さて，直交完全系 u_k を考えよう．このとき各 v に対して

$$\sum_k |\langle \mathsf{u}_k,\mathsf{v}\rangle|^2 \equiv 1 \tag{9.67}$$

である．したがって，$|\langle \mathsf{u}_m(t),\mathsf{v}(t)\rangle|^2 < |\langle \mathsf{u}_m(0),\mathsf{v}(0)\rangle|^2$ となる m があれば，やはり $|\langle \mathsf{u}_n(t),\mathsf{v}(t)\rangle|^2 > |\langle \mathsf{u}_n(0),\mathsf{v}(0)\rangle|^2$ となるある n が存在しなければならない．すると u_n と v の混合エントロピーは閉じた系において自発的に減少することになる．これは熱力学の第二法則を破っている．

第二法則を保持するためには，あるゆる u と v に対して $|\langle \mathsf{u}(t),\mathsf{v}(t)\rangle|^2 = |\langle \mathsf{u}(0),\mathsf{v}(0)\rangle|^2$ でなければならない．するとウィグナーの定理 (8.2 節) から，適当な位相を選ぶと写像 $\mathsf{v}(0)\to\mathsf{v}(t)$ はユニタリーであることが導かれる．(反ユニタリーという選択は連続性から除外される.) したがって，もし量子論の**その他の**仮定を変更せず保持するならば，シュレーディンガー方程式は線形でなければならない．

非複製定理

3.5 節で示したように，**多数の**量子系が同じ状態に準備されていることがわかれば，その状態は適当な量子検証によって曖昧さなしに決定できる．その一方でたったいま，**一つの**系の非直交状態が明確に区別できないことを見た．ちょうどコピー機で手紙を

複製するように，この系の複製をたくさんつくることで，この困難をなぜ克服できないのだろうか?

任意の状態に準備された量子系を複製できる**増幅器**が存在して，最初，状態 Ψ にあったとしてみよう．すなわち，複製後の増幅器の状態を Ψ' として

$$\Psi \otimes \mathsf{v} \;\to\; \mathsf{U}(\Psi \otimes \mathsf{v}) = \Psi' \otimes \mathsf{v} \otimes \mathsf{v} \qquad (?) \tag{9.68}$$

である．同様に，量子系の異なる入力状態に対しては

$$\Psi \otimes \mathsf{w} \;\to\; \mathsf{U}(\Psi \otimes \mathsf{w}) = \Psi'' \otimes \mathsf{w} \otimes \mathsf{w} \qquad (?) \tag{9.69}$$

となるだろう．これら二つの方程式の内積をとろう．ユニタリー性は

$$\langle \Psi, \Psi \rangle \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle = \langle \Psi', \Psi'' \rangle \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \qquad (?) \tag{9.70}$$

を意味する．この方程式において，適当に v と w を選ぶと $0 < |\langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle| < 1$ となり，また $\langle \Psi, \Psi \rangle \equiv 1$ である．これから $\langle \Psi', \Psi'' \rangle \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle = 1$ となるが，これは $|\langle \Psi', \Psi'' \rangle| \leq 1$ であるから不可能である．したがって，このような増幅器は存在しえない[*17,*18]．

9.5 量子検証の一般化

量子系の状態に関する情報を獲得する最も効率的な方法が，常に (2 章で定義されたような) 最大検証とは限らない．時には，標準状態に用意された補助量子系を導入し，双方の系に対して組み合わされた量子検証を一緒に実行する方が好ましい場合もある．ここでは，これらの間接的量子検証をしらべることにするが，実際上これらが最も普通なのである．今まで考えられてきた最大検証は，便利な概念だが，実際にはめったに実現されない．

問題の定式化

量子論の基礎に関する古典的論文はフォン・ノイマンの本[*13]である．歴史的には，首尾一貫した物理的解釈を伴った，量子論に対する厳密な数学的定式化は，これが最初であった．この本は量子方法論にひずんだ影響を及ぼした．特に，その後の "量子論的観測問題" の研究の大部分が，位置，運動量，エネルギーなどなどといった，古典対応をもつ力学変数の数値決定ということを中心に展開することになった．フォン・ノイマンの取り組みで，これらの力学変数 (古典的には $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ の関数) は $\mathcal{H}$ (量子状態のヒルベルト空間) に作用する自己共役演算として表されている．一つの量子検証の様々な出力結果は相互に排他的であり，その確率の和は 1 となるから，これらのスペクトルは**恒等演算子の直交分解**に対応している．

---

*17 W. K. Wootters and W. H. Zurek, *Nature* 299 (1982) 802.
*18 D. Dieks, *Phys. Letters A* 92 (1982) 271.

その後，フォン・ノイマンの量子観測理論では狭すぎることが理解されるようになった．それは，良く定義された物理状況に関する単純な質問を許さなかったのである．一例として，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子が純粋状態に準備されたとしよう．その波動関数 ψ は，$\mathbf{n}$ をある単位ベクトルとして，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\psi=\psi$ を満足する．$\mathbf{n}$ が与えられれば，状態 ψ は (無関係な位相を除いて) 一意に定義される.「$\mathbf{n}$ は何か?」という質問には，明らかに古典的な対応 (「角運動量の方向は何か?」) が存在する．これは系の準備に関して尋ねる正当な方法である．この準備は，どんな "量子論的不確定さ" をも伴わない**巨視的**過程である．しかし，$\mathbf{n}$ は量子論的力学変数 ($\mathcal{H}$ に作用する自己共役演算子) ではない．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の "量子論的オブザーバブル" は $\boldsymbol{\sigma}$ の成分とその線形結合だけである．

上に述べた状況は実際の実験で起こりうる．凝縮系では，磁場測定のために偏極した中性子がプローブ (テスト物体) として用いられている．このとき知りたいのは，中性子の磁気モーメントの歳差である．これは (量子論ではユニタリー演算子によって表される) 良く定義された物理概念である．しかし，もし 1 個の中性子しか使えなかったとすると，この歳差が測定できる可能性はない．歳差角の良い評価を得るためには，同じ状態に準備された中性子がきわめて多数個必要である．これは，同種粒子が豊富にある実験固体物理学では重大な障害とはならないものの，わずかな数の量子しか利用できないような物理の他の領域では，そうなる可能性がある．たとえば，遠い星からの少数の光子を検出した場合，それらの偏極はどのくらい精度良く決定できるだろうか? 最も効率的な方法は，まもなくわかるが，最大検証ではない．

量子論におけるシャノン・エントロピー

量子論が持ち込んだ新しい状況とは，**巨視的に異なる**状態準備によって**直交していない**，したがって明確にお互いを区別することができない状態が生成可能であるということである．たとえば，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の状態が，シュテルン–ゲルラッハの実験で上側のビームを選択することによって準備されたとしよう．ここで，磁石を $\mathbf{n}_1$ の方向か，あるいは $\mathbf{n}_2$ の方向に向けるかという選択肢が考えられる．その結果，対応したビームの量子状態 ψ_1 および ψ_2 は $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_j\,\psi_j=\psi_j$ で与えられる．一般にこれらの状態は直交していない．それらの重なり合いは

$$|\langle\psi_1,\psi_2\rangle|^2=\tfrac{1}{2}\,(1+\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) \tag{9.71}$$

である．この表式は，ψ_1 を準備した後に尋ねられた「準備された状態は ψ_2 であるか?」という質問に対する回答が肯定的となる確率である．回答を確実に予言することは不可能である．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子は，いったん，それを準備した巨視的装置から分断されてしまうと，準備過程に関する完全な情報を持ち合わせていないのである．いくつかの質問は曖昧となり，それらの回答には**確率**を割り当てることしかできない．

この状況は，古典物理学に広く行き渡った状況とは根本的に異なっている．したがって，量子検証は，古典的測定 (力学変数の数値がそこで知りたいことのすべてである)

の単なる模倣に過ぎないとは限られないのである．量子論の規則に適合した，より一般的な過程が考えられなければならない．

非直交状態の特異な性質のため，シャノン・エントロピー $-\sum p_i \log p_i$ とフォン・ノイマン・エントロピー $-\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$ を区別する必要がある．たとえば，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対して N 個の別々な準備過程があるかもしれない．もしそれらが同様に確からしければ，シャノン・エントロピー $\log N$ はいくらでも大きくなりうる．一方，フォン・ノイマン・エントロピーは決して $\log 2$ を越えない．こうして，逆説的なことに，量子物理学における私たちの無知の量は，古典物理学より**少ない**のである．これは，私たちに許された**異なる**(すなわち，直交した) 質問の数が少なく，それゆえに未知の回答も少ししか存在しないからである．はっきりとこれら二つの種類のエントロピーを区別するため，以後シャノン・エントロピーは，情報理論で普通となっているように (S ではなく) H と記すことにする．(ハミルトニアンと混同する心配はない.)

演習問題 9.11 スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対する三つの異なる状態準備が，ベクトル $\binom{1}{0}$ と $\frac{1}{2}\binom{-1}{\pm\sqrt{3}}$ で表されている．これらが同様に確からしければ，シャノン・エントロピーは $\log 3$，フォン・ノイマン・エントロピーは $\log 2$ となる．このような粒子が n 個存在して，すべて**同じ**方法で準備された場合，フォン・ノイマン・エントロピーが $n \to \infty$ で漸近的に $\log 3$ に近づくことを示せ．**ヒント**：等角度をなす三つの実単位ベクトル，$i \neq j$ ならば $\langle \mathsf{u}_i, \mathsf{u}_j \rangle = c$，を考えよ．$\sum \mathsf{u}_i \mathsf{u}_i^\dagger$ の固有値が $1-c$, $1-c$, $1+2c$ となることを示せ． ★

量子情報利得

非直交状態はどれほどよく区別できるのだろうか? まず，既知の密度行列 ρ_i によって表される異なる N 個の状態準備が存在すると仮定し，p_i を準備 i に対する既知の**ア・プリオリ (先験的)** 確率としよう．さらに，検証は n 個の異なる出力結果を生むと仮定する．(一般に $n \neq N$ である.) もし検証に関与する物理過程を十分良く理解していれば，準備 i が結果 μ をもたらす条件確率 $P_{\mu i}$ を計算できる．ある特定の結果 μ を見出した後，私たちは準備 i の見込み [すなわち，**ア・ポステリオリ (帰納的)** 確率] $Q_{i\mu}$ を計算することができる．これはベイズの定理 (2 章の付録を参照) によって

$$Q_{i\mu} = P_{\mu i}\, p_i / q_\mu \tag{9.72}$$

と与えられる．ここで

$$q_\mu = \sum_j P_{\mu j}\, p_j \tag{9.73}$$

は結果 μ の起こる**ア・プリオリ**確率である．

結果 μ を見いだす前にわかっていたのは確率 p_i だけである．私たちの無知の尺度であるシャノン・エントロピーは $-\sum p_i \log p_i$ であった．結果 μ を見いだした後に

はア・ポステリオリ確率 $Q_{i\mu}$ が計算でき，新しいエントロピーは

$$H_\mu = -\sum_i Q_{i\mu} \log Q_{i\mu} \tag{9.74}$$

となる．ある結果に対しては H_μ が初期エントロピーよりも大きくなり，検証の結果が不確定さを増すことになるかもしれない．ここにウフィンク (Uffink) による面白い例がある．私の鍵は 90% の確率で私のポケットにある．そうでなければ，同じ確率で他の 100 箇所にある．するとシャノン・エントロピーは $-0.9 \log 0.9 - 0.1 \log 0.001 = 0.7856$ である．もしポケットを探して鍵が見つからないとすると，シャノン・エントロピーは $-\log 0.01 = 4.605$ に**増加する**．こうしてシャノン・エントロピーは，無知の客観的水準を測っているのではなく，むしろ無知に対する私たちの主観的感覚を測っていることがわかる．

しかし，**平均**的には，量子検証はシャノン・エントロピーを減少させる．平均的な情報利得は

$$I_{\rm av} := H_{\rm initial} - \langle H_{\rm final} \rangle = -\sum p_i \log p_i - \sum_\mu q_\mu H_\mu \tag{9.75}$$

である．必要な数学的道具を用意した上で，この情報利得の最適化についてしらべよう．

正値演算子測度

情報利得 (9.75) は，状態 ρ_i に準備された系において結果 μ を得る条件確率 $P_{\mu i}$ に依存している．$P_{\mu i}$ の値は検証の過程によって決定される．次の 2 段階操作模型を考えよう．まず，**アンシラ (補助物)**[*19]とよばれる補助量子系を**既知の**状態 $\rho_{\rm aux}$ に用意する．もとの量子系とこのアンシラとの相関のない結合状態は

$$(\rho_i \otimes \rho_{\rm aux})_{m\mathbf{r},n\mathbf{s}} = (\rho_i)_{mn}\, (\rho_{\rm aux})_{\mathbf{rs}} \tag{9.76}$$

となる．**斜字**と**太字**の添字は，おのおのもとの量子系と補助量子系を参照している．

次に結合ヒルベルト空間において，ある最大検証を実行する．強い重ね合せの原理 G*(54 ページ) のおかげで，これは原理的に常に実行可能である．この完全検証は恒等演算子の直交分解として表される．異なる出力結果は

$$\mathsf{P}_\mu \mathsf{P}_\nu = \delta_{\mu\nu} \mathsf{P}_\nu \qquad \text{と} \qquad \sum_\mu \mathsf{P}_\mu = \mathbb{1} \tag{9.77}$$

を満足する**直交**射影演算子に対応している．このような検証において，結果 μ が準備 i に従う確率は

$$P_{\mu i} = {\rm Tr}\,[\,\mathsf{P}_\mu\, (\rho_i \otimes \rho_{\rm aux})] \equiv \sum_{m\mathbf{r},n\mathbf{s}} (\mathsf{P}_\mu)_{m\mathbf{r},n\mathbf{s}}\, (\rho_i)_{nm}\, (\rho_{\rm aux})_{\mathbf{sr}} \tag{9.78}$$

[*19] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York (1976) pp. 74–83.

である．これは

$$P_{\mu i} = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\mu \rho_i) \tag{9.79}$$

と書くことができる．ここで

$$(\mathsf{A}_\mu)_{mn} = \sum_{\mathbf{rs}} (\mathsf{P}_\mu)_{m\mathbf{r},n\mathbf{s}}\,(\rho_{\mathrm{aux}})_{\mathbf{sr}} \tag{9.80}$$

はもとのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子である．

エルミート行列 A_μ は一般には可換でないが，

$$\sum_\mu \mathsf{A}_\mu = \mathbb{1} \tag{9.81}$$

を満足している．A_μ の集合は，各 A_μ が正値演算子 (74 ページの定義参照) であるため，**正値演算子測度**[*20,*21](POVM) とよばれる．これらの POVM とフォン・ノイマンの**射影演算子測度**との主要な違いは，用いることのできる準備状態の数と出力結果の数が両者で異なりうること，そしてそれはまたヒルベルト空間の次元とも異なりうるということである．結果 μ の得られる確率は，フォン・ノイマンの $\mathrm{Tr}\,(\mathsf{P}_\mu\,\rho)$ にかわって，$q_\mu = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\mu\,\rho)$ で与えられる．

最　適　化

与えられた p_i と ρ_i の集合に対して，平均的な情報利得 I_{av} を最大にしたいというのが普通である．最適化の戦略を見いだすことは困難な問題であり，一般的な解は知られていない．しかし部分的な結果はいくつか入手可能である．最適化された POVM が階数 1 の行列で構成されること

$$\mathsf{A}_\mu = \mathsf{u}_\mu\,\mathsf{u}_\mu^\dagger \tag{9.82}$$

は証明できる[*22]．ここでベクトル u_μ は，一般には規格化されていないし，直交もしない．異なった A_μ として要請される数 n は不等式[*22]

$$d \le n \le d^2 \tag{9.83}$$

を満たす．ここで d は，異なった状態準備 ρ_i によって張られた $\mathcal{H}$ の部分空間の次元である．

また平均的な情報利得が有界

$$I_{\mathrm{av}} \le S(\sum_i p_i\,\rho_i) - \sum_i p_i\,S(\rho_i) \tag{9.84}$$

[*20] J. M. Jauch and C. Piron, *Helv. Phys. Acta* 40 (1967) 559.
[*21] E. B. Davies and J. T. Lewis, *Comm. Math. Phys.* 17 (1970) 239.
[*22] E. B. Davies, *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-24 (1978) 596.

であり，等号はすべての ρ_i が可換である場合に限って成立することを証明することができる[*23,*24]．復元可能な情報は決してフォン・ノイマン・エントロピーを上回れないのである．

演習問題 9.12　(a) 四つの行列 $(\mathbb{1} \pm \sigma_x)/4$ および $(\mathbb{1} \pm \sigma_z)/4$ は階数 1 であり，一つの POVM を構成していることを示せ．(b) スピン $\frac{1}{2}$ 粒子が，これら四つの状態に対して同じ確率で σ_x あるいは σ_z の固有状態に準備されたとする．このとき確率行列 $P_{\mu i}$ と $Q_{i\mu}$ を計算せよ．上記の POVM を検証する前後でシャノン・エントロピーの値はいくらか?

解答：おのおの $\log 4$ と $\log 4 - \frac{1}{2}\log 2$ (すべての出力結果に対して同じ)．　★

演習問題 9.13　上の演習問題と同じ準備状態で，四つのやはり階数 1 の行列 $[\mathbb{1} \pm (\sigma_x \pm \sigma_z)/\sqrt{2}]/4$ からなる POVM に対する最終的なシャノン・エントロピーを計算せよ．　★

解答：$P_{\mu i}$ と $Q_{i\mu}$ に対するすべての要素は $(1 \pm 1/\sqrt{2})/4$ に等しく，最終的なエントロピーは $\log 4 - 0.27665$ となる．(情報利得は前の演習問題よりも少ない.)

場合によっては，[量子暗号 (9.8 節参照) の場合のように] **平均的な情報利得** I_{av} を最大にすることにではなく，ある明確な状態準備が用いられたのか，あるいは用られなかったのかを**確実**に述べている**部分**が回答に含まれることに興味をもつことがある．たとえば，同様に確からしい二つの準備状態

$$\mathsf{u} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{および} \qquad \mathsf{v} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{9.85}$$

を考えよう．ただし，$0 < \alpha < \pi/4$ である．私たちが欲しているのは，これら二つの状態に対する**ア・ポステリオリ**確率を与えるような検証ではなく，これらの状態が u だったのか，v だったのか，あるいは「私にはわからない」という確実な答を与える検証である．これらの解答を与えるのに適した POVM は次のようにして構成することができる．u および v に直交した状態への射影演算子は，おのおの

$$\mathsf{P}_{\neg\mathsf{u}} := \mathbb{1} - \mathsf{u}\mathsf{u}^\dagger \qquad \text{と} \qquad \mathsf{P}_{\neg\mathsf{v}} := \mathbb{1} - \mathsf{v}\mathsf{v}^\dagger \tag{9.86}$$

である．$S = \langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \sin 2\alpha$ として，三つの正値演算子

$$\mathsf{A}_\mathsf{u} = \mathsf{P}_{\neg\mathsf{v}}/(1+S), \qquad \mathsf{A}_\mathsf{v} = \mathsf{P}_{\neg\mathsf{u}}/(1+S), \qquad \mathsf{A}_? = \mathbb{1} - \mathsf{A}_\mathsf{u} - \mathsf{A}_\mathsf{v} \tag{9.87}$$

が求める POVM である．

演習問題 9.14　$\mathsf{A}_? \equiv S\,(1+S)^{-2}\,(\mathsf{u}+\mathsf{v})\,(\mathsf{u}+\mathsf{v})^\dagger$ となること，そしてわからないという回答の確率が S であることを示せ．

[*23] L. B. Levitin, in *Proc. Fourth All-Union Conf. on Information and Coding Theory*, Tashkent (1969) p. 111 [ロシア語].
[*24] A. S. Holevo, *Probl. Inform. Transmission* 9 (1973) 110, 177 [ロシア語からの英訳].

わからないという回答の後でも，シャノン・エントロピーは依然として初期値 $\log 2$ のままである．したがって，この方法での情報利得の**平均**は $I_{\mathrm{av}} = (1 - S)\log 2$ である．

まったく非確定的な回答も混じった，たまにしかない確実性ではなく，**確率**を私たちが認めれば，より大きな利得が得られる．この大きな I_{av} を得るためには，固有値 $\pm\cos 2\alpha$ をもつ演算子 $\mathsf{u}\mathsf{u}^\dagger - \mathsf{v}\mathsf{v}^\dagger$ を測定する．状態準備 u あるいは v の後でこれらの固有値を得る確率は $P_\pm = (1 \pm \cos 2\alpha)/2$ であり，平均的な情報利得は

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{av}} &= \log 2 + P_+ \log P_+ + P_- \log P_- \\ &= [(1+\cos 2\alpha)\log(1+\cos 2\alpha) + (1-\cos 2\alpha)\log(1-\cos 2\alpha)]/2 \end{aligned} \tag{9.88}$$

となる．

演習問題 9.15 この結果を α の関数として図に描き，これが以前の方法で得られた値 $I_{\mathrm{av}} = (1 - \sin 2\alpha)\log 2$ よりも常に大きくなることを示せ．**ヒント**：これらの式を $\cos 2\alpha$ で微分してみよ． ⋆

9.6 ナイマルクの定理

さて，与えられた行列 A_μ によって表される適切な POVM を生成する**物理的機構**(すなわち，実験的に実現可能な手続き) は常に存在することを示そう．この結果はナイマルクの定理[*25,*26]から得られる．この定理は，A_μ の定義されている状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を次のように拡張できると主張している．すなわち，拡張された空間 $\mathcal{K}$ においては，$\sum \mathsf{P}_\mu = \mathbb{1}$ を満たすような**直交射影演算子** P_μ の集合が存在し，A_μ は P_μ を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ へ射影した結果となる．[この集合 P_μ の現実的実現可能性は，強い重ね合せの原理 (54 ページ参照) によっている.]

ここで，デーヴィスの定理[*22]のおかげで，話は式 (9.82) のような階数 1 の行列 A_μ に限定できる．添字 μ は 1 から，異なる出力結果の数 N (もしすべての A_μ が階数 1 であれば $N \geq n$ となり，等号はそれらが直交している場合に限られるということに注意) まで走る．互いに直交し，式 (9.82) のすべての u_μ と直交する単位ベクトル v_s を導入して，$\mathcal{H}$ に余分な $N - n$ 次元を付け加えよう．添字 s は $n + 1$ から N まで走る．ここで

$$\mathsf{w}_\mu := \mathsf{u}_\mu + \sum_{s=n+1}^{N} c_{\mu s}\,\mathsf{v}_s \tag{9.89}$$

を考えよう．$c_{\mu s}$ はこれから決定すべき複素係数である．ベクトル w_μ は，

$$\langle \mathsf{w}_\lambda, \mathsf{w}_\mu \rangle = \langle \mathsf{u}_\lambda, \mathsf{u}_\mu \rangle + \sum_{s=n+1}^{N} \overline{c_{\lambda s}}\, c_{\mu s} = \delta_{\lambda\mu} \tag{9.90}$$

[*25] M. A. Neumark, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 4 (1940) 53, 277; *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 41 (1943) 359.

[*26] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Ungar, New York (1963) Vol. 2, pp. 121–126.

である限り，拡大された空間 $\mathcal{K}$ における完全正規直交系を形成している．ここには未知係数 $c_{\mu s}$ の数以上の方程式が存在している．しかし，u_μ は任意ではない．それらは閉包関係 $\sum \mathsf{u}_\mu \mathsf{u}_\mu^\dagger = \sum \mathsf{A}_\mu = \mathbb{1}$ に従う．あらわに書けば，

$$\sum_{\mu=1}^{N} \overline{u_{\mu i}}\, u_{\mu j} = \delta_{ij} \tag{9.91}$$

となる．ここで i と j は 1 から n (もとのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の次元) まで走る．同じ記法であらわに書けば式 (9.90) は

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{u_{\lambda i}}\, u_{\mu i} + \sum_{s=n+1}^{N} \overline{c_{\lambda s}}\, c_{\mu s} = \delta_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots, N) \tag{9.92}$$

となる．

さて，N 次元正方行列

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} u_{\alpha 1} & \cdots & u_{\alpha n} & c_{\alpha, n+1} & \cdots & c_{\alpha N} \\ u_{\beta 1} & \cdots & u_{\beta n} & c_{\beta, n+1} & \cdots & c_{\beta N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N1} & \cdots & u_{Nn} & c_{N, n+1} & \cdots & c_{NN} \end{pmatrix} \tag{9.93}$$

を考えよう．最初の n 列は与えられた $u_{\lambda i}$ であり，残りの $(N-n)$ 列は未知の $c_{\lambda s}$ である．式 (9.92) は単に M がユニタリー行列であることを意味している．最初の n 列は，整合条件 (9.91) を満足しており，N 次元空間における n 個の正規直交ベクトルと考えることができる．このとき，残った列に対して他の $N-n$ 個の正規直交ベクトルを構成する方法は無限に存在する．こうして式 (9.89) で定義された N 個の正規直交ベクトル w_μ が具体的に得られる．それらの $\mathcal{H}$ への射影が式 (9.82) の u_μ である．

演習問題 9.16 式 (9.87) の POVM に対して行列 M をあらわに書き下せ． ⋆

(有限次元ヒルベルト空間に対する) ナイマルクの定理の形式的証明は与えられたが，実際にベクトル v_s によって張られる余分の次元をどう構成するかという問題は依然として残っている．なかには簡単な場合もある．式 (9.82) の集合 u_μ が量子系に利用可能な状態の部分空間のみを張り，量子系がすべての v_s を取り込むのに十分な状態をもっているというような状況である．(無限次元ヒルベルト空間で有限個の A_μ のみを使用する場合にそうなることは自明である.) しかし，以下に示すように，一般には，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への拡張にはアンシラ *19 の導入が必要とされる．

事例研究：三つの非直交状態

簡単な例として，$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ および $\mathbf{n}_3$ を，互いに 120° の角度をなし，したがって $\sum \mathbf{n}_\mu = 0$ となる三つの単位ベクトルとしよう．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考え，3 対の規格化

された状態を

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_\mu\,\chi_\mu=\chi_\mu \qquad \text{および} \qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_\mu\,\psi_\mu=-\psi_\mu \tag{9.94}$$

で定義する．三つの正値演算子

$$\mathsf{A}_\mu=\tfrac{2}{3}\,\psi_\mu\,\psi_\mu^\dagger \tag{9.95}$$

の和が $\mathbb{1}$ となり，したがって一つの POVM を定義していることは容易に確かめられる．

次のような情報が与えられたと仮定しよう．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子は，上で定義した三つの量子状態 χ_μ のうちの一つに準備することができ，これらの三つの状態準備は等しい**ア・プリオリ**確率をもっている．もし三つの χ_μ のうちどれが実際遂行されるかが伝えられていなければ，シャノン・エントロピーは $H=\log 3$ である．ここでの問題は，できるたけたくさんの情報を与える (つまり，可能な限り H を減少させる) 手続きを考案することである．

演習問題 9.17 この場合，レヴィタン–ホレヴォ不等式 (Levitin–Holevo inequality)(9.84) が $I_{\rm av}<\log 2$ となることを示せ．

達成可能な最善の結果は H の値を $\log 2$ まで減少させ，したがって実際の情報利得が $\log(3/2)$ となることを示そう．この結果は，許された三つの状態から一つを排除し，他の二つの状態に対して等しい**ア・ポステリオリ**確率を残すことによって得られる (次の演習問題を参照)．

実際の機構は次のように記述することができる．やはりスピン $\frac{1}{2}$ 粒子であるアンシラは，初期状態 ϕ_0 に準備する．ϕ' を ϕ_0 に直交した状態としよう．ψ をもとの粒子の任意の状態とし，ψ' を直交状態とする．$\mu\neq\nu$ の場合 $\langle\psi_\mu,\psi_\nu\rangle=-\frac{1}{2}$ となるように位相を選ぼう．このとき三つの状態 *19

$$\zeta_\mu=\sqrt{2/3}\,\phi_0\otimes\psi_\mu+\sqrt{1/3}\,\phi'\otimes\psi \tag{9.96}$$

は正規直交し，四つ目の正規直交状態は $\phi'\otimes\psi'$ である．したがって，四つの直交射影演算子 $\mathsf{P}_\mu=\zeta_\mu\zeta_\mu^\dagger$ は恒等演算子を**直交**分解し，原理的には一つの最大検証で測定可能である．さらに，($\mu=1,2,3$ に対して) $\langle\phi_0,\zeta_\mu\rangle=(2/3)^{1/2}\,\psi_\mu$ となる*27から，式 (9.80) のように

$$\langle\phi_0,\mathsf{P}_\mu\,\phi_0\rangle=\langle\phi_0\,,\zeta_\mu\rangle\,\langle\zeta_\mu\,,\phi_0\rangle=\mathsf{A}_\mu \tag{9.97}$$

となる．この特別な場合には，式 (9.95) の A_μ が $I_{\rm av}$ を最大にする最適集合であることを示すことができる *22．

演習問題 9.18 $P_{\mu i}={\rm Tr}\,(\mathsf{A}_\mu\,\rho_i)=\frac{1}{2}\,(1-\delta_{\mu i})$ となることと最終的なエントロピーが $H_\mu=\log 2$ (すべての出力結果に対して同じエントロピー) となることを示せ．

*27 ここで $\langle\phi_0,\zeta_\mu\rangle$ はアンシラ状態 ϕ_0 と結合状態 ζ_μ との "部分内積" を表している．結合状態は大きなヒルベルト空間，つまりアンシラのヒルベルト空間と，もとの $\mathcal{H}$ とのテンソル積において定義されている．したがって，この部分内積の値は $\mathcal{H}$ でのベクトルである．

任意の A_μ に対するアンシラの状態準備

この構成法は任意の A_μ 集合へと一般化される．ϕ_0 をアンシラの初期状態，$\phi_{n+1}, \cdots, \phi_N$ を，アンシラのヒルベルト空間において ϕ_0 とともに正規直交基底を形成する，その他の状態とする．(すなわち，アンシラは $N-n+1$ 次元系である.) 同様に，e_κ が $\mathcal{H}$ における正規直交基底を表しているとする．式 (9.89) 同様，

$$\zeta_\mu := \phi_0 \otimes \mathsf{u}_\mu + \sum_{s=n+1}^{N} c_{\mu s}\, \phi_s \otimes \mathsf{e}_1 \tag{9.98}$$

を定義する．計算はちょうど前の場合と同じように進むが，$\mathcal{K}$ が $n\,(N-n+1)$ 次元であるため，ζ_μ は $\mathcal{K}$ の部分空間しか張っていない．残りの $(N-n)(n-1)$ 個の正規直交状態は，$\kappa = 2, \cdots, n$ として，$\phi_s \otimes \mathsf{e}_\kappa$ ととることができる．これらの状態はすべて ϕ_0 に直交し，したがって式 (9.97) の有効性には影響を及ぼさない．

演習問題 9.19　POVM (9.87) に対してベクトル ζ_μ を構成せよ[*28,*29]．　★

演習問題 9.20　正四面体の中心と各頂点を結ぶ四つの単位ベクトル $\mathbf{n}_\mu$ を考えると，これらの中からとられた二つのベクトルのなす角度はいずれも $\pi - \arccos\frac{1}{3}$ となる．式 (9.94) および (9.95) のように χ_μ と ψ_μ および A_μ を定義する．このとき式 (9.93) の行列 M をあらわに構成せよ．四つの入力状態 ψ_μ が同様に確からしいと仮定して，情報利得が $\log(4/3)$ となることを示せ．　★★

実際には，必ずしも式 (9.98) のアルゴリズムで POVM が用意されるわけではない．与えられた POVM を具現化する別の方法は無限に存在する．ナイマルクの定理の重要性は，有限個の要素をもった任意の POVM が，独立に準備された補助量子系 (アンシラ) を導入することで，量子論の規則を破ることなく，原理的に最大検証に変換可能であるという証明にある．

POVM に起因する量子状態

繰り返しが可能な最大検証の実行後，量子系の新しい状態はその検証で見いだされた結果に対応する純粋状態である．ある POVM を実行した後はどうなるのだろうか? 結果は，その POVM がどのように実行されたかに本質的に依存する[*30]．たとえば，たった今記述したような方法を使って結果 μ が見いだされたとすると，結合系の状態は式 (9.98) で与えられる．もとの量子系に対する縮約された密度行列は，アンシラに関する部分トレースをとることで [*27]

$$\rho'_{(\mu)} = \sum_j \langle \phi_j\,, \zeta_\mu\, \zeta_\mu^\dagger\, \phi_j \rangle = \sum_j |\langle \phi_j\,, \zeta_\mu \rangle|^2 = \mathsf{u}_\mu \mathsf{u}_\mu^\dagger + \mathsf{e}_1 \mathsf{e}_1^\dagger \sum_{s=n+1}^{N} |c_{\mu s}|^2 \tag{9.99}$$

[*28] D. Dieks, *Phys. Letters A* 126 (1988) 303.
[*29] A. Peres, *Phys. Letters A* 128 (1988) 19.
[*30] S. L. Braunstein and C. M. Caves, *Found. Phys. Lett.* 1 (1988) 3.

のように与えられる．式 (9.90) で $\lambda = \mu$ とすればわかるように，最後の和は $1 - \|\mathsf{u}_\mu\|^2 = 1 - \mathrm{Tr}\,\mathsf{A}_\mu$ である．したがって，**上記の方法によって**POVM の μ 番目の出力を見いだすと，量子系の状態は

$$\rho'_{(\mu)} = \mathsf{A}_\mu + (1 - \mathrm{Tr}\,\mathsf{A}_\mu)\,\mathsf{e}_1\,\mathsf{e}_1^\dagger \tag{9.100}$$

となる．もし量子系が状態 ρ にあったとすると，出力結果 μ を見いだす確率は $\mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\mu\,\rho)$ である．したがってこの POVM を実行した後で期待される状態は

$$\rho' = \sum_\mu \rho'_{(\mu)}\,\mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\mu\,\rho) \tag{9.101}$$

となる．この結果の特別な場合がフォン・ノイマンの**射影演算子測度**であり，その場合 $\mathsf{A}_\mu = \mathsf{P}_\mu$ である．このとき $\mathrm{Tr}\,\mathsf{A}_\mu = 1$ であり，

$$\rho' = \sum_\mu \mathsf{P}_\mu\,\mathrm{Tr}\,(\mathsf{P}_\mu\,\rho) = \sum_\mu \mathsf{P}_\mu\,\rho\,\mathsf{P}_\mu \tag{9.102}$$

となる．

演習問題 9.21　式 (9.102) の最後の表現を導出せよ．

演習問題 9.22　同じ POVM を再び検証した場合，結果 ν が得られる確率は

$$P_{\nu\mu} = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\nu\,\rho'_{(\mu)}) = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\mu\,\mathsf{A}_\nu) + (1 - \mathrm{Tr}\,\mathsf{A}_\mu)\,\langle \mathsf{e}_1\,, \mathsf{A}_\nu\,\mathsf{e}_1\rangle \tag{9.103}$$

となることを示せ．

9.7 客観性の限界

偏極粒子を供給する人 (加速器ビームの物理学者) が上向きスピンの中性子を生成したと主張したとすると，これは確かめられるのだろうか? 読者が論理実証主義者ならば，ある記述はその真偽が**経験的**に確立できる場合に限って意味をもつ．今の場合，これらの中性子の中から一つをとってきて，シュテルン–ゲルラッハ型の実験が遂行できることは明白である．結果が "下向き" だったら，だましたビーム物理学者を捕まえたことだろう．しかし，結果が "上向き" だったとしても，彼が真実を語ったことの証明にはならない．"上向き" から角度 θ に偏極した中性子は，シュテルン–ゲルラッハの実験において $\cos^2(\theta/2)$ の確率で "上向き" の結果をもたらすのである．偏極していない中性子 ($\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$) は 50% の確率でその検証を首尾よく通過してしまう．

真偽の概念は，量子現象の論理において新しい意味を獲得する．量子状態準備に関する記述が真実であることを一つの検証によって確立することは，原理的に**不可能**である．1 個以上の中性子を検証することで信頼水準は上げられるが，しかし今度は，準備された中性子の均一性をどこまで信頼するかに依存することになる．この問題そのものは検証できるが，それは他の適当な仮定がなされた場合に限られる．一般に，量子

検証の後に残されたエントロピー (すなわち，不確定さ) は，検証の前に入手可能だった情報の量とタイプに依存する．これは ($I_{\rm av}$ が**ア・プリオリ**確率 p_i に依存するから) 古典情報理論でも正しいが，その影響は，より微妙な方法で供給されうる量子論的情報に対してずっと著しい．

状態の確認

初等的な例から始めよう．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子が σ_z の二つの固有状態の一つに，同じ確率で準備されるとする．シャノン・エントロピーは $\log 2$ であり，$\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ であるから，これはまたフォン・ノイマン・エントロピーでもある．z 方向のシュテルン–ゲルラッハ検証は初期状態を確実に決定できる．このときの情報利得は $\log 2$ である．

さて，スピンの準備過程に関して，二人の観測者が矛盾した報告をするとしてみよう．一人は (いずれの符号に対しても同じ確率で) σ_x の固有状態の一つであるといい，もう一人は (やはりいずれの符号に対しても同じ確率で) σ_y の固有状態の一つであると主張している．二人の観測者を同じように信用する (あるいは，しない) ならば，シャノン・エントロピーは $\log 4$ である．あなたはシュテルン–ゲルラッハ検証の実行を決断することになる．

演習問題 9.23 x 方向の検証が実行された場合，情報利得はいくらか? x 軸と y 軸を二等分する方向の検証の場合はいくらか?

解答：おのおの，$I_{\rm av} = 0.34657$ および 0.27665.

上の演習問題は，異なる検証方法によって異なる量の情報がもたらされうることを示しているが，これは予想できないことではない．しかし，どんな検証であろうと，二人の観測者のどちらが真実を語っていたのかは決定できない．たとえ検証すべき粒子が際限なくたくさん与えられたとしても，これは不可能である．この不可能性は基本的である．(これは 75 ページの仮定 K による.) 実際もしそうでなかったとしたら，6 章で示したように，彼らの中間に置かれた共通の粒子源から発生する相関をもった粒子対を使うことによって，離れた観測者間の瞬間的情報伝達が可能となることだろう．

連続変数：事例研究

初期状態が純粋状態であったということだけが，σ_z の検証に先立つ唯一の情報だとしよう．それは，単位ベクトル $\mathbf{n}$ のあらゆる方向に対して，同じ確率で $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\psi = \psi$ を満足していた．$\mathbf{n}$ はどのようにしたら決定できるか?

まず $\mathbf{n}$ を，z 軸からの極角 θ と方位角 ϕ で表示しよう．σ_z に対する検証の結果が ± 1 となる確率は

$$P_{\pm,\theta} = \tfrac{1}{2}\,(1 \pm \cos\theta) \tag{9.104}$$

である．したがって，この検証は (軸対称性から明らかなように)ϕ に関する情報を与えない．

スピン方向 $\mathbf{n}$ が等方的な分布をしているとき，ϕ の値によらず極角が θ となる**ア・プリオリ確率** p_θ は，$p_\theta\, d\theta = \sin\theta\, d\theta \oint d\phi/4\pi = \sin\theta\, d\theta/2$ で与えられる．ここで新しい変数 $u = \cos\theta$ を導入し，さらに u の領域を，N を大きな数として大きさ $du = 2/N$ に等分しよう．これらの小区間の一つに対する**ア・プリオリ確率**はいずれも

$$p_u = p_\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\sin\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\, du = N^{-1} \qquad (-1 < u < 1) \tag{9.105}$$

となる．初期シャノン・エントロピーは

$$H_0 = -\sum_u p_u \log p_u = -\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\, du \log\left(\tfrac{1}{2}\, du\right) = \log N \tag{9.106}$$

である．$N \to \infty$ の極限で H_0 の値は無限大となるが，以下でわかるように H_0 は無関係な付加定数であるので，何の差しつかえもない．(同様な無限大は，古典統計力学におけるエントロピーの定義でも生じている[*31].)

演習問題 9.24 σ_z を対角的にする表現で，与えられた $u = \cos\theta$ の値に対応する密度行列は何か?

σ_z の検証で結果 ± 1 が得られる**ア・プリオリ確率**は

$$q_\pm = \sum_u P_{\pm,u}\, p_u = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(1 \pm u)\ \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2} \tag{9.107}$$

である．したがって，ベイズの定理から，u に対する**ア・ポステリオリ確率**は

$$Q_{u,\pm} = P_{\pm,u}\, p_u / q_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm u)\, du = (1 \pm u)/N \tag{9.108}$$

となり，結果 ± 1 を観測した後の最終的なシャノン・エントロピーは

$$\begin{aligned} H_\pm &= -\sum_u Q_{u,\pm} \log Q_{u,\pm} = -\int_{-1}^{1} \left[\tfrac{1}{2}(1 \pm u)\right] du\ \log\left[(1 \pm u)/N\right] \\ &= H_0 - \tfrac{1}{2} \textstyle\int_{-1}^{1} (1 \pm u) \log(1 \pm u)\, du \end{aligned} \tag{9.109}$$

となる．こうして平均的な情報利得は

$$I_{\mathrm{av}} = H_0 - H_\pm = \tfrac{1}{2} \int_0^2 z \log z\, dz = \log 2 - \tfrac{1}{2} = 0.19315 \tag{9.110}$$

となる．予想されたように，この情報利得は，$u = \cos\theta$ の値として二，三の異なる可能性だけしかなかった前の例よりも少ない．

演習問題 9.25 上の議論を $\mathbf{n}$ の方向に対するア・プリオリ確率が等方的でない場合に一般化せよ． ⋆

[*31] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, New York (1965) p. 245.

もし初期の状態準備に関してまったく何も知らなかったらどうなるだろうか? 奇妙に感じられるかもしれないが，現在の状況では“何も知らない”という可能性は存在しない．正しい質問は次のような種類のものだけである．様々な状態準備に対する**ア・プリオリ**確率が与えられたとして，検証の結果を知った後の，それらの**ア・ポステリオリ**確率を評価せよ．この論理的枠組の中で，初期状態が無秩序な混合 $\rho \sim \mathbb{1}$ であるということには，**ア・プリオリ**確率を与える余地が残されていない．それは状態準備の**完全**な指定である．シャノン・エントロピーは 0 であり，これ以上の情報は求められない．統計的問題として意味があるのは，いくつかの異なる選択肢が考えられる場合だけである．

均質な集合

n を大きな数として，タイプのわかった n 個の独立な量子系を考えよう．その供給者は，これらの系がすべて同じ方法で準備されたと主張している．その状態が何であるかが明かされない場合，これを経験的に決定することは容易である．ρ (N 次元の密度行列) の要素は，適当に選ばれた N^2-1 個の演算子の平均値を測定することで得られる[*32]．(2×2 密度行列の例は，75 ページで詳しく議論された.) 問題は，これら n 個の系が実際同じ仕方で準備されたこと (たとえば，これらの系を生成している粒子源が十分よく安定していること) の確認にある．

独立に準備された n 個の部分系は，量子論では密度行列 $\mathcal{R}=\rho_1\otimes\rho_2\otimes\cdots\otimes\rho_n$ によって記述されていることを思い起こそう．これは直積であり，ρ_j はおのおの N 次元行列である．$\mathcal{R}$ は N^n 次元行列であり，この集合を一つの複合系として扱っている．もし部分系がすべて同じように準備されたとすれば，行列 ρ_j はまったく同じものとなる．それらは実験的に測定可能な N^2-1 個のパラメーターに依存している[*32]．さて，$n \gg N^2$ であれば状態準備の一様性は確認可能であることを示そう．

まず n 個の部分系を (勝手にではなく) 適切な**体系的**方法によって ν 個の集合に分割する．そのさい，準備過程において疑わしい，均質性からの体系的なずれはいかなるものも消去することがないようにする．たとえば，粒子源が安定していないのではないかと思われる場合には，昨日のサンプルはそれ以前のものと混ぜない．n 個のサンプルを ν 個の集合に分ける便利な方法の一つは，$n \gg \nu \gg N^2$ となるように $\nu \sim N\sqrt{n}$ ととることである．私たちは，これらの集合の N^2-1 個を使って ρ の行列要素の評価を求め，この過程を多数回繰り返すことで異なるサンプルの結果が無矛盾であることを確認する．通常予想される統計的なゆらぎを越えて矛盾が見いだされなければ，n 個の部分系が同じ方法で準備されたとして満足し，対応する 1 粒子密度行列 ρ を測定したことになる．

ここで注意しておくべきことは，私たちが求めようとしていたのは，**可能なすべてのうち，非常に小さな部分集合の質問**のみであったということである．ρ を決定する

[*32] W. Band and J. L. Park, *Found. Phys.* 1 (1971) 339; *Am. J. Phys.* 47 (1979) 188.

ためには異なる N^2-1 個の質問だけが必要とされるが，最大検証は N^n (これは $\mathcal{R}$ の次元である) 個の異なる出力結果を，出そうとすれば出せるのである．物理系の量子論的記述から古典論的記述への移行には，その系に関わる微視的情報のほとんどすべてを捨て去ることが要求されているということを，12 章で再認識することになる．

9.8 量子暗号とテレポーテーション

暗号とは，それを敵に傍受されても理解できないような仕方で情報を伝達する技術である．**平文**とよばれるもとの情報は，有限個の語彙からとられた言葉や表現からなり，明確な文法に従って組み立てられている．**暗号化**は反転可能な決定論的写像であり，これらの規則のいずれにも適合せず，無秩序で無意味なように見える**暗号文**を生み出す．したがって，公共の通信チャンネルを通して安全に伝達することができる．

安全性が実証可能な暗号化の方法にはヴァーナム暗号 (Vernam cipher) がある．その平文はビット (0 あるいは 1) の列として書かれる．これに，**鍵**とよばれるもう一つ別の**ランダム**列を，ビットごとに 2 を法として加える．この加算はブール演算の XOR(排他的OR) と等価である．この結果得られる暗号文は，同じ鍵を使ってそれを XOR することで解読できる．ここでメッセージと同じ長さの鍵を用いることと，それを再び使うことは**決してしない**ことが本質的である[*33]．

これから取り組もうとしている問題は，最初何の秘密情報も共有していない何人かの観測者に，敵対する盗聴者の検閲を被るおそれのある伝達チャンネルを使って，暗号の鍵 (秘密のビット列) を配布する方法である．古典的手段のみが使われた場合，これは実現不可能な課題である．これに対して，量子現象は様々な解をもたらす．この違いの理由は，印刷された文書のように，古典的な形で蓄積された情報が，それを壊さないことはもとより，それを一切 (つまり，検知可能な仕方で) 変更することなく客観的にしらべられるのに対して，たとえば光子の偏極のように，未知の非直交状態に暗号化され，量子化された情報ではそうすることが不可能だからである．量子情報を秘密の伝達に対して理想的なものとしているのは，その捕捉困難性である．

EPR による鍵の配布

アスペの実験 (166 ページの図 6.8 を参照) のような，相関をもった光子対源を考えよう．遠く離れた二人の観測者はこれらの光子を受け取り，互いに角度 45° をなす $\boldsymbol{\alpha}$ 方向あるいは $\boldsymbol{\beta}$ 方向の偏極を検証する．もとのアスペの実験に反して，ここでは双方の観測者が**同じ** 1 組の方向を用いる．各観測者は，各光子ごとに $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ をランダムに選び，すべての偏極テストの結果の記録を保持している．十分な数の光子対を分析し

[*33] 二つのメッセージが同じ鍵で XOR されたとすると，それらの暗号文の XOR は平文の XOR と同一である．この結果は，一つのメッセージの暗号化のために，もう一つのメッセージをランダムでない鍵として用いることと同等である．有限個の語彙が使用されているなら，両者のメッセージを解読するのは暗号問題では容易である．

た後，二人の観測者は彼らが選んだ一連の方向 ($\boldsymbol{\alpha}$ あるいは $\boldsymbol{\beta}$) を公開するが，対応する検証の結果は公表しない．双方の観測者は，そのうちの約半分の場合に同じ方向を選んでいたことがわかるが，そのときの彼らの結果は同じでなければならない，というのも光子は相関をもってるからである．この一連の結果は二人の観測者だけが知っており，秘密の鍵として使用できる．異なった方向の偏極検証の結果は捨ててしまっても構わないし[*34]，盗聴制御に使ってもよい[*35](以下を参照).

通常，二人の観測者に誤認させるべく，いくつかの光子を横取りして相関のない他の光子に取り換えるような盗聴者は存在しないことを確認する必要がある．さらに，ほとんど同時に 2 対の光子が放出され，各対のうちの 1 個の光子だけが各観測者によって検出される可能性がある．これは二つの鍵の不整合をもたらし，暗号化–解読過程に誤りを生じる可能性がある．両者の鍵が同じであることを保証するため，観測者は勝手に選んだビットの部分集合の和の**パリティ**を明かしてもよい．(そして，盗聴者に情報が漏れないように，各部分集合の最初のビットは捨てる.) この目的のために，巧妙な“プライバシーの増強”と確認の方法が開発されてきており[*36]，量子暗号は絶対に安全な伝達手段となっている．

二つの非直交状態を使った鍵の配布

EPR 相関をもった粒子は，それらがまったく情報をもっていないので，暗号の鍵の配布のためにはたいへん安全なものと思える．離れた観測者がこれらの粒子を必要とする限り蓄えておけるならば，メッセージを伝達するのに必要とされるときにのみ，鍵は生き返る．しかし，他の方法の方が簡単に実行できるかもしれない．たとえば，二つの非直交状態 u と v だけを次のように利用することができる[*37]．一人の観測者は，ランダムに u あるいは v に準備された量子を次々と放出する．他の一人は式 (9.87) タイプの POVM を実行し，量子状態が明確に同定された場合を，もちろんそれが u あるいは v であったかを語ることなく，公表する．こうして得られる u と v の列は，二人の観測者だけが知っており，暗号の鍵となる．

倍密度の符号化

上で議論した EPR による鍵の配布では，各 EPR 対によって 1 ビットが伝達されている．(もし，異なる設定のさいに失われた EPR 対も勘定に入れれば，平均的には半ビットだけが伝達されたことになる.) 驚くことに，次のような手続きをすれば，一つの EPR 対で **2** ビットを伝送することができる[*38]．離れた二人の観測者に配布された

[*34] C. H. Bennett, G. Brassard, and N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 557.
[*35] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 661.
[*36] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail, and J. Smolin, *J. Crypto.* 5 (1992) 3.
[*37] C. H. Bennett, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 3121.
[*38] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 2881.

一つの EPR 対を考える．話を簡単にするために，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に適した記号を使うことにする．この対は一重項状態 $(\mathsf{u}_1\,\mathsf{v}_2-\mathsf{v}_1\,\mathsf{u}_2)/\sqrt{2}$ にある．ただし $\mathsf{u}=\binom{1}{0}$，$\mathsf{v}=\binom{0}{1}$ である．

メッセージを符号化するため，発信者は彼の粒子にユニタリー操作

$$00\sim\mathbb{1}\qquad 01\sim\sigma_x\qquad 10\sim\sigma_y\qquad 11\sim\sigma_z \tag{9.111}$$

を施し，もう一人の観測者に送る．後者は相関をもった一対の粒子を保有することになるが，それは (無関係な位相を除いて) 状態

$$(\mathsf{u}_1\,\mathsf{v}_2\pm\mathsf{v}_1\,\mathsf{u}_2)/\sqrt{2}\qquad \text{あるいは}\qquad (\mathsf{u}_1\,\mathsf{u}_2\pm\mathsf{v}_1\,\mathsf{v}_2)/\sqrt{2} \tag{9.112}$$

のいずれかにある．これら四つの状態は直交していて，一つの最大検証によって明確に識別できるから，どのユニタリー操作がほどこされたかはこれで明らかになる．一方，情報の担い手を傍受しようという盗聴者は，(同じユニタリー操作の同じ手続きが多数回繰り返された場合) 役に立たない無秩序混合 $\rho=\frac{1}{2}\mathbb{1}$ を見いだすだけである．

量子テレポーテーション

さらに驚くべきことはこの逆過程である．それは，一つの EPR 対と 2 ビットの古典情報による**未知の**量子状態の “テレポーテーション” である[*39]．この過程の第一段階では，標準的一重項状態にある EPR 対が離れた観測者 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ に配布される．$\mathcal{A}$ は，粒子 1 の他に，0 と名づけられ，未知の状態 ϕ にある別のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を保有しており，状態 ϕ は $\mathcal{B}$ に伝えられなければならないとしよう．(粒子そのものは送られない．送られるのは**未知の**状態にあるという情報だけである.) これは次のようにして実現できる．

粒子 0 と 1 は，当初**相関をもっていなかった**が，$\mathcal{A}$ によって固有状態

$$\Psi_\pm=(\mathsf{u}_0\,\mathsf{v}_1\pm\mathsf{v}_0\,\mathsf{u}_1)/\sqrt{2}\qquad \text{および}\qquad \Phi_\pm=(\mathsf{u}_0\,\mathsf{u}_1\pm\mathsf{v}_0\,\mathsf{v}_1)/\sqrt{2} \tag{9.113}$$

をもつ最大検証にかけられる．これらは式 (9.112) の状態に類似している．この検証の四つの出力結果は，未知の状態 ϕ によらず同じ確率をもっている (以下の演習問題を参照)．検証の結果 (見かけ上無秩序な 2 ビットの情報) は公共のチャンネルを介して $\mathcal{B}$ に伝えられる．この結果に応じて，$\mathcal{B}$ は粒子 2 に集合 (9.111) から適当なユニタリー操作を実行する．すると粒子 2 の状態は ϕ になるが，これは $\mathcal{A}$ によって検証される前の粒子 0 の状態と同一である．この段階で，この状態は $\mathcal{A}$ には入手できないし，$\mathcal{B}$ にとっては依然として未知である．

上で述べられたことの**実験的意味**は次のようになる．$\mathcal{A}$ が状態 Ψ_- を見いだす確率は 25% ある．このとき，もし $\mathcal{B}$ が任意の射影演算子 P を測定すると，結果 1 を得る

[*39] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 1895.

確率は $\langle\phi, \mathsf{P}\phi\rangle$ となる．同様に，$\mathcal{A}$ が状態 Ψ_+ を見いだし，$\mathcal{B}$ が P を測定すれば，結果 1 が得られる確率は $\langle\sigma_z\phi, \mathsf{P}\sigma_z\phi\rangle$ である．以下同様である．詳しい証明は次の演習問題でやってみよう．

演習問題 9.26 $\mathcal{A}$ が検証する前の 3 粒子の結合状態，すなわち $\psi = \phi_0(\mathsf{u}_1\mathsf{v}_2 - \mathsf{v}_1\mathsf{u}_2)/\sqrt{2}$ が

$$\psi = \tfrac{1}{2}\left[-\Psi_-\,\phi_2 - \Psi_+\,(\sigma_z\,\phi_2) + \Phi_-\,(\sigma_x\,\phi_2) - \Phi_+\,(i\sigma_y\,\phi_2)\right] \tag{9.114}$$

とも書けることを示せ．ヒント：α と β を未知係数として，$\phi_0 = \alpha\mathsf{u}_0 + \beta\mathsf{v}_0$，同様に $\phi_2 = \alpha\mathsf{u}_2 + \beta\mathsf{v}_2$ と書いてみよ． ⋆

線形性のおかげで，テレポーテーションは純粋状態 ϕ だけでなく，混合状態に対しても機能する．最初粒子 0 がずっと遠方の第 4 の粒子と相関をもっていたという可能性も，この中に含まれている．このとき，粒子 2 は遠く離れたこの 4 番目の粒子と相関をもっていることが判明するだろう．SF (サイエンスフィクション) のように見えるかもしれないが，これは量子論の厳密な結果なのである．

9.9 参考文献

熱力学と統計力学

F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, New York (1965).

M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York (1968).

E. T. Jaynes, *Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics*, ed. by R. D. Rosenkrantz, Reidel, Dordrecht (1983).

情報とエントロピー

A. I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory*, Dover, New York (1957).

A. Wehrl, "General properties of entropy," *Rev. Mod. Phys.* 50 (1978) 221.

J. R. Pierce, *An Introduction to Information Theory: Symbols, Signals and Noise*, 2nd ed., Dover, New York (1980).

L. B. Levitin, "Information theory for quantum systems," in *Information Complexity and Control in Quantum Physics*, ed. by A. Blaquière, S. Diner, and G. Lochak, Springer, Vienna (1987) p. 15.

C. H. Bennett, "The thermodynamics of computation—a review," *Int. J. Theor. Phys.* 21 (1982) 905.

D. Deutsch, "Uncertainty in quantum measurements," *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 631.

H. Maassen and J. B. M. Uffink, "Generalized entropic uncertainty relations," *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 1103.

マクスウェルの悪魔

H. S. Leff and A. F. Rex, eds. *Maxwell's Demon: Entropy, Information, Computing*, Adam Hilger, Bristol (1990).

マクスウェルは熱力学の第二法則に対する挑戦として彼の伝説的悪魔を導入した．問題は，微視的知的生物が熱力学系のエントロピーの減少をもたらしうるかということである．これまでに寄せられた様々な解答には，統計物理学，量子論，情報理論，そして計算機科学が関係している．別刷り集 [ここには，とりわけ，シラードの歴史的論文 "On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings," *Z. Phys.* 53 (1929) 840 の英訳が含まれている] に先立ってこの問題の教訓的概観が与えられている．最近の重要な寄与としては，

C. H. Bennett, "Demons, engines and the second law," *Sci. Am.* 257 (Nov. 1987) 88.

C. M. Caves, "Quantitative limits on the ability of a Maxwell demon to extract work from heat," *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2111.

最後の論文に対するコメントとして，C. M. Caves, W. G. Unruh, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 1387.

非 局 所 効 果

S. L. Braunstein and C. M. Caves, "Information-theoretic Bell inequalities," *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 662.

B. W. Schumacher, "Information and quantum nonseparability," *Phys. Rev. A* 44 (1991) 7047.

A. Peres and W. K. Wootters, "Optimal detection of quantum information," *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 1119.

この論文では，異なった場所にまったく同様に準備された，二つの量子系に共通な状態を決定するための最適な戦略が議論されている．両方の系に一緒に実行される一つの結合検証は，各系ごとの様々な POVM の組み合せよりもずっと効果的である．しかし，最善の粒子分離の戦略を見いだす問題は未解決で残されており，量子理論家への挑戦として提起されている．

量子通信，量子暗号，量子計算

C. M. Caves and P. D. Drummond, "Quantum limits on bosonic communication rates," *Rev. Mod. Phys.* 66 (1994) 481.

R. Jozsa and B. W. Schumacher, "A new proof of the quantum noiseless coding theorem," *J. Mod. Optics* 41 (1994) 2343.

A. K. Ekert, B. Huttner, G. M. Palma, and A. Peres, "Eavesdropping on quantum-cryptographical systems," *Phys. Rev. A* 50 (1994) 1047.

A. Barenco, D. Deutsch, A. K. Ekert, and R. Jozsa, "Conditional quantum dynamics and logic gates," *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 4083.

10
半古典的方法

10.1 対応原理

量子力学が歴史的に発展する過程で，いくつかの古典概念が重大な遺産として残された．それらの中で最も重要なのは，ある適切な条件の下では古典力学と量子力学の間にアナロジーがあると主張する**対応原理**である．今日でもこの原理は，既知の古典的法則に類似した量子的な性質を発見するさいに直観的なガイドとして用いられることが多い．二つの理論の基礎となっている数学的な枠組が根本的に異なっていることから考えれば，これらのアナロジーは驚くべきものである．量子力学が**ユニタリー**な内積の定義された可分なヒルベルト空間を使うのに対し，古典力学では**シンプレクティック**構造をもつ連続的な位相空間が望まれる[*1]．この基本的な違いにもかかわらず，ある場合には古典的な概念と量子的な概念の間に近似的な対応がありえる．このアナロジーがはっきりしたものでないことは明らかである．それが役立つ点とその限界を以下で指摘しよう．特に，非自明な問題ではどんなものであれ，究極的には対応原理が役に立たなくなってしまうことを示そう．

古典的な演算子

形式的には，異なった $\hbar$ の値をもつ一連の量子論を考え，どのような条件の下で $\hbar \to 0$ の極限が存在し，古典力学と一致するかということをしらべることができよう．一般に，力学変数を任意にとれば，この極限は存在せず，量子論が古典力学に還元することはない．しかしながら，その一連の量子論の中には，正準変数 q と p で表すことができる特別なクラスの演算子があり，その場合は，$\hbar$ を表だって書く必要がない．これらは**リーズナブル**演算子，あるいは**古典的**演算子とよばれている[*2,*3]．たとえば，8.4 節で導入した運動量演算子はリーズナブルである．同様に，$\mathsf{J}_z = \mathsf{x}\,\mathsf{p}_y - \mathsf{y}\,\mathsf{p}_x$ はリーズナブルであるが，$\cos(\mathsf{J}_z/\hbar)$ はそうではない．これらの特別な演算子に制限すれば，大ざっぱにいって $\hbar \to 0$ の適切な極限で古典的性質とそれに対応する量子的性

---

*1 H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1980) pp. 391–407[瀬川富士・矢野 忠 訳,『新版 古典力学，上/下』(吉岡書店，1983–1984)].

*2 L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982) 407.

*3 K. B. Kay, *J. Chem. Phys.* 79 (1983) 3026.

質の間に，アナロジーを見いだすことが可能である．

6.6 節での量子検証で "隣り合う" 結果をまとめたさいに，このような極限操作を使った．純粋な量子論では，この文章は無意味である．つまり，量子検証で二つの結果が違っていれば，どんなものでも互いに**直交**状態に対応しており，近いかも知れないし，あるいは遠いかも知れない．この事情は他の任意の二つの異なった結果についても同様である．しかしながら，**リーズナブル**演算子の隣り合う固有値に対応する結果がひとまとめにできるような場合には，**半古典的な**意味合いで，それらの "隣り合う" 結果に意味をもたせられる．6.6 節で述べたのは，もし巨視的な装置がこのタイプの演算子だけしか測定できないとすれば，離れた場所で行われた検証によって量子力学が予言する強い相関を観測することは不可能ということである．装置の読みは**より弱い**古典的相関のみを示し，それはベルの不等式を破らない．その装置が，個々の固有値のような，量子論本来の特徴を検出できるほど鋭敏なときに，初めて局所実在性が (対応原理ともども) 破綻するのである．

正準変換とユニタリー変換

ディラックが力説していたように[*4]，古典力学での正準変換と量子論でのユニタリー変換の間にはアナロジーがある．(正準変換に詳しくない読者は 1 章末の参考文献を参照せよ.) これらの二つの概念の間に厳密な対応があるはずはない．なぜなら，ユニタリー変換で固有値 (量子論における力学変数の測定可能な値) は変わらないが，正準変換は定義域の異なる変数や次元の違う変数ですら関係づけられるからである．この対応は "アンリーズナブル" 演算子で破綻するが，その例は後で示そう．最初に，この対応関係が機能するいくつかの場合を見てみよう．

さて実際に取りかかろうとするときに，しばしば次のような問題が起こる．古典的物理系が与えられたとき，それに対応した量子力学系をどのように定義するか? この問がきちんと定義されてないことは確かであるが，これに対し，きちんとは定義されていないが，次のような解答を提案することだけはできる．**リーズナブルな (ハイゼンベルク描像の) 量子力学的演算子の運動法則は古典的運動法則と類似であるべきだ．**二つの法則が類似しているか，いないかは見る人の目次第であるから，この判定基準がはっきりしたものでないことには疑問の余地がない．そこで，力学変数として角運動量の三つの成分を使う単純な例によってこの問題を説明しよう．

最初に，量子論的運動法則が y 軸のまわりに角度 β だけ回転する場合としよう．そのような回転はユニタリー演算子

$$\mathsf{U} = e^{-i\beta \mathsf{J}_y/\hbar} \tag{10.1}$$

によって表される．もし古典的パラメーター β と古典的演算子 J_y を固定し，$\hbar$ を変

[*4] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Univ. Press (1947), p. 106 [朝永振一郎ほか訳,『量子力学』(岩波書店，1968)].

えて行くと，この演算子は明らかに $\hbar\to 0$ で極限値をもたない．演算子 U は $\hbar\to 0$ で**真性特異点**をもっている．つまり，量子力学の極限として古典力学を与えることができないのである．

式 (10.1) の U と y 軸のまわりの古典的回転の間には正しい関係がある．J_y が U によって生成されたユニタリー変換の下で不変なのはわかっている．他の成分に関しては

$$\mathsf{J}_z' + i\,\mathsf{J}_x' = e^{i\beta \mathsf{J}_y/\hbar}\,(\mathsf{J}_z + i\,\mathsf{J}_x)\,e^{-i\beta \mathsf{J}_y/\hbar} \tag{10.2}$$

となるが，少し計算すれば (J_y を対角とする表現で行うとよい)，

$$\mathsf{J}_z' + i\,\mathsf{J}_x' = (\mathsf{J}_z\,\cos\beta - \mathsf{J}_x\,\sin\beta) + i\,(\mathsf{J}_z\,\sin\beta + \mathsf{J}_x\,\cos\beta) \tag{10.3}$$

が得られる．この形に書けば，運動の量子論的法則は古典的回転と同一のように見える．特に，$\hbar$ はあらわには含まれていない．

2 番目の例として，z 軸のまわりに J_z/J に比例する角度だけ線形な **回転** (ツイスト) をしてみよう．

$$\begin{aligned} J_x' &= J_x\,\cos(\alpha\,J_z/J) - J_y\,\sin(\alpha\,J_z/J) \\ J_y' &= J_x\,\sin(\alpha\,J_z/J) + J_y\,\cos(\alpha\,J_z/J) \\ J_z' &= J_z \end{aligned} \tag{10.4}$$

J_n' が J_n と同じポアソン括弧式をもつことからわかるように，これは変数 J_x，J_y，J_z に関する正準変換である．

量子論でも，全角運動量が決まった値 $[J(J+1)]^{1/2}\hbar$ をとれると仮定できよう．そのとき，任意の J に対して，ツイスト演算子は

$$\mathsf{U} = e^{-i\alpha \mathsf{J}_z{}^2/2J\hbar} \tag{10.5}$$

となる．この演算子は J_z を不変にし，他の成分の変換法則は

$$\mathsf{J}_x' + i\,\mathsf{J}_y' = e^{i\alpha \mathsf{J}_z{}^2/2J\hbar}\,(\mathsf{J}_x + i\,\mathsf{J}_y)\,e^{-i\alpha \mathsf{J}_z{}^2/2J\hbar} \tag{10.6}$$

となる．$\hbar\to 0$ で U は極限値がないことに注意しよう．少し計算をすれば (J_z を対角化した表示で行うとよい)，式 (10.6) は

$$\mathsf{J}_x' + i\,\mathsf{J}_y' = e^{i\alpha \mathsf{J}_z/2J}\,(\mathsf{J}_x + i\,\mathsf{J}_y)\,e^{i\alpha \mathsf{J}_z/2J} \tag{10.7}$$

と書き表せる．ここで，両方のべき指数は，式 (10.6) のように反対の符号ではなく，**同じ符号**となっている．

演習問題 10.1　変換 (10.4) が正準変換であることを確かめよ．　★

演習問題 10.2　式 (10.7) を示せ．

ここでもまた，$\hbar$ が消えたように見える．もちろん，J の成分に関する交換関係の中にそれがあるため，潜在的にはまだ残っている．しかし，仮に式 (10.7) の変数が古典量だとすれば，その式は

$$\mathsf{J}'_x + i\,\mathsf{J}'_y = \left(\mathsf{J}_x \cos\frac{\alpha \mathsf{J}_z}{J} - \mathsf{J}_y \sin\frac{\alpha \mathsf{J}_z}{J}\right) + i\left(\mathsf{J}_x \sin\frac{\alpha \mathsf{J}_z}{J} + \mathsf{J}_y \cos\frac{\alpha \mathsf{J}_z}{J}\right) \tag{10.8}$$

と書くことができ，これは正に式 (10.4) のツイスト変換そのもののように見える．

アンリーズナブル演算子

古典的変数の間で正準変換するが，その量子論的対応物が異なったスペクトルをもち，したがってユニタリー変換によって関係付けられないような場合を考えると，対応原理は完全に成り立たなくなる．古典力学の最も基本的な概念である**自由度の数**にさえ，その量子対応がない．

演習問題 10.3 デカルト座標系から球座標系への正準変換は何か? 正準共役な運動量 p_θ と p_ϕ をデカルト座標系の運動量 $\mathbf{p}$ で具体的に書き表せ．変数 θ，ϕ，p_θ，p_ϕ から，

$$J_z = p_\phi \qquad \text{および} \qquad J^2 = {p_\theta}^2 + {p_\phi}^2/\sin^2\theta \tag{10.9}$$

(これらのポアソン括弧は 0) を新しい正準運動量として含む新しい変数への正準変換は何か? J_z と J^2 に正準共役な座標は何か? もしこれらの力学変数が演算子に変換されるとすれば，それらの定義域はどこか? ⋆

解答：2 番目の正準変換の母関数は

$$S = \phi\, J_z + \int^\theta \sqrt{J^2 - {J_z}^2/\sin^2\xi}\; d\xi \tag{10.10}$$

であり，対応する座標は

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial J_z} = \phi + \tan^{-1}(p_\phi \cot\theta / p_\theta) \tag{10.11}$$

と

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial J^2} = \frac{-1}{2\sqrt{{p_\theta}^2 + {p_\phi}^2/\sin^2\theta}}\; \sin^{-1}\left(\frac{{p_\theta}^2\,\sin^2\theta + {p_\phi}^2}{{p_\theta}^2\,\tan^2\theta + {p_\phi}^2}\right)^{1/2} \tag{10.12}$$

である．

この演習問題に引き続いて，もう一つ正準変換を行い，新しい運動量 $P_\pm = \hbar^{-2}J^2 \pm \hbar^{-1}J_z$ とそれらに共役な変数 $Q_\pm$ を定義しよう．これらの変数の量子論的対応物はどうなるか? これらの定義は，あからさまに $\hbar$ が含まれているので，もちろんリーズナブル演算子ではない．それにもかかわらず，それらはヒルベルト空間で完全に明確な定義域をもっている．$P_\pm$ の固有値は，次表に見られるように，すべて正の整数である．

$\mathsf{J}^2/\hbar^2$	0	2			6					⋯
$\mathsf{J}_z/\hbar$	0	−1	0	1	−2	−1	0	1	2	⋯
P_+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
P_-	0	3	2	1	8	7	6	5	4	⋯

演算子 P_+ と P_- は**非縮退**であり，それらはお互いの関数となっている．両方ともが対角的となる表示を考えよう．もしポアソン括弧と交換関係との間に対応関係があるならば，P_+ は Q_- と交換するはずであり，それゆえに Q_- もまた対角的となってしまう．つまり，これは Q_- が P_- と正準共役という要請と矛盾してしまう．これは驚くべきことではなく，非古典的演算子に対しては対応原理が成り立たないのである．

10.2　波束の運動とゆがみ

いままでは，特定の量子状態を選んで話をしたのではなく，演算子の代数的な性質を考えてきた．波束のような局在化した状態に対して成立する異なったタイプのアナロジーも存在する．簡単のために，1 自由度で，ハミルトニアン $\mathsf{H} = \frac{1}{2}\mathsf{p}^2 + V(\mathsf{q})$ をもつ系を考えよう．ハイゼンベルク方程式は

$$\dot{\mathsf{q}} = \mathsf{p} \qquad \text{および} \qquad \dot{\mathsf{p}} = -dV(\mathsf{q})/d\mathsf{q} \tag{10.13}$$

となる．演算子 q と p の平均値を $q = \langle\psi, \mathsf{q}\psi\rangle$ と $p = \langle\psi, \mathsf{p}\psi\rangle$ としよう．そうすると，式 (10.13) から

$$\dot{q} = p \qquad \text{および} \qquad \dot{p} = -\langle dV(\mathsf{q})/d\mathsf{q}\rangle \tag{10.14}$$

が得られる．したがって，もしポテンシャル V が波束の大きさ程度の領域でゆっくりと変化しているならば $\langle dV(\mathsf{q})/d\mathsf{q}\rangle \simeq dV(q)/dq$ となるから，波束はほぼ古典的質点のように運動する．これがエーレンフェストの定理である[*5]．

この半古典近似からのずれを評価しよう．テイラー展開すると，

$$V(\mathsf{q}) = V(q) + (\mathsf{q}-q)\,\frac{dV(q)}{dq} + \frac{1}{2}\,(\mathsf{q}-q)^2\,\frac{d^2V(q)}{dq^2} + \cdots \tag{10.15}$$

となるから

$$\frac{dV(\mathsf{q})}{d\mathsf{q}} = \frac{dV(q)}{dq} + (\mathsf{q}-q)\,\frac{d^2V(q)}{dq^2} + \frac{1}{2}\,(\mathsf{q}-q)^2\,\frac{d^3V(q)}{dq^3} + \cdots \tag{10.16}$$

が得られる．最後の式の期待値をとるときに，$\langle\mathsf{q}-q\rangle \equiv 0$，そして q の分散 (波束の広がり) を $\langle(\mathsf{q}-q)^2\rangle \equiv (\Delta\mathsf{q})^2$ とし，$\langle(\mathsf{q}-q)^3\rangle$ 以上の項を無視すると，

$$-\left\langle\frac{dV(\mathsf{q})}{d\mathsf{q}}\right\rangle = -\frac{dV(q)}{dq} - \frac{1}{2}\,\frac{d^3V(q)}{dq^3}\,(\Delta\mathsf{q})^2 \tag{10.17}$$

となる．最後の項があるために，波束の中心は古典軌道に沿って動かず，また波束は次第に広がり，ゆがんでくる[*6]．(しかしながら，これらは量子現象でないことに注意しよう．古典的なリウビル密度でも同じような効果が生じる.)

*5 P. Ehrenfest, *Z. Phys.* 45 (1927) 455.
*6 M. Andrews, *J. Phys. A* 14 (1981) 1123.

ポアンカレ不変量

局在化した波束の運動と古典的点粒子の運動の間のこの相違は重要な結果を導く．特に，このことから古典的ポアンカレ不変量に対する量子論的対応が存在しなくなる[*7,*8]．

最も簡単な不変量は位相空間内での $2N$ 次元領域の体積である．この領域の境界となっている位相空間の点がハミルトンの方程式に従って運動していくときに，囲まれている体積は不変のままに保たれる．これがリウビルの定理である．リウビルの運動方程式に従う任意のコンパクトな領域は連続的に変形され，次第に長く，薄いフィラメント状になって行く．時間の経過とともに，より細かな新しいフィラメントが現れ，その体積は $\hbar^N$ よりも小さくなってしまう．量子論的な密度 ρ (あるいは 10.4 節で述べるウィグナー関数) ではこのような細部を再現することができず，平均化されてしまう[*9]．そのため，量子論的動力学の時間発展は古典に比べ，より穏やかになることが期待される．

1 自由度の単純な場合をしらべよう．ただ一つだけのポアンカレ不変量がある．位相空間内の領域の面積である．無限小三角形の面積の時間発展はある 1 粒子の，わずかに異なる三つの運動の様子を比較することによってしらべられる．古典力学では，これらは位相空間で三つの隣接する軌道となる．量子力学では，ψ，ψ' と ψ'' で記された 3 個の隣接する波束があることになろう．波束 ψ' について，前と同じように q'，p' と $\Delta\mathsf{q}$ の平均値を定義しよう．そうすると，式 (10.14) と (10.17) から

$$d(q'-q)/dt = (p'-p) \tag{10.18}$$

および

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(p'-p)\\
&= -\left\langle \psi', \frac{dV(\mathsf{q})}{d\mathsf{q}}\psi' \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{dV(\mathsf{q})}{d\mathsf{q}}\psi \right\rangle\\
&= -\left[\frac{d^2V(q)}{dq^2} + \frac{1}{2}\frac{d^4V(q)}{dq^4}(\Delta\mathsf{q})^2\right](q'-q) - \frac{1}{2}\frac{d^3V(q)}{dq^3}\left[(\Delta'\mathsf{q})^2 - (\Delta\mathsf{q})^2\right]
\end{aligned} \tag{10.19}$$

が得られる．面積一定定理の量子対応が存在しなくなるのは，この式の最後の項があるためである．

実際，3 番目の隣接する波束，ψ'' を導入し，(10.18)，式 (10.19) と同じような運動

[*7] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 1st ed., Addison-Wesley, Reading (1950) pp. 247–250. 残念ながら，この項はこの本の第 2 版から削除された．
[*8] M. Born, *The mechanics of the atom*, Bell, London (1927) [リプリント版が Ungar, New York (1960) より刊行] p. 36.
[*9] H. J. Korsch and M. V. Berry, *Physica D* 3 (1981) 627.

方程式を使えば，無限小三角形の面積の変化がわかる[*10]．

$$\frac{d}{dt}\Big[(q'-q)(p''-p)-(q''-q)(p'-p)\Big]/2$$
$$=\frac{d^3V(q)}{dq^3}\Big\{(q''-q)\left[(\Delta'\mathbf{q})^2-(\Delta\mathbf{q})^2\right]-(q'-q)\left[(\Delta''\mathbf{q})^2-(\Delta\mathbf{q})^2\right]\Big\}/4 \tag{10.20}$$

この式は，$d^3V/dq^3=0$ でない限り，一般に 0 にならない．波束の大きさが (無限小) 三角形の頂点間の距離よりずっと小さい場合に限り，この式は無視することができる．このような近似は惑星やその他の巨視的物体では成り立つであろうが，原子あるいは分子のような量子系一般については成立しないであろう．

事例研究：リュードベリ状態

もし，$d^3V/dq^3\neq 0$ ならば，局所化された量子的波束の時間発展を，ポテンシャルの形と位相空間内での波束の位置によって決まる有限の経過時間を越えて，古典的リウビル密度 (位相空間内で隣接する軌道上を運動する粒子のアンサンブルを表す) の時間発展でシミュレートすることはできない [*10]．古典的な対応がない量子力学の奇異な特徴は次の例によってみられる．

$V=-GMm/r$ として，太陽のまわりの惑星の運動，あるいは $V=-e^2/r$ としてクーロン・ポテンシャル中の電子の運動を考えよう．簡単のために，円軌道としよう．古典的計算をすれば，$J=rp$ と $e^2/r^2=p^2/mr$ が得られる．したがって，

$$p=me^2/J \qquad \text{および} \qquad r=J^2/me^2 \tag{10.21}$$

となるから，

$$E=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r}=-\frac{me^4}{2J^2} \tag{10.22}$$

となる．これらの方程式で p は運動量 $\mathbf{p}$ の接線成分である．軌道方向の古典的な角速度は

$$\omega=p/mr=me^4/J^3=(-2E)^{3/2}(me^4)^{-1/2} \tag{10.23}$$

である．エネルギーが δE だけ異なる近傍の軌跡に対して

$$\delta\omega=3\omega\delta E/2E \tag{10.24}$$

となる．内部の軌道がより大きな角速度をもっているから，同心円軌道に沿って運動する間に，位相空間でのリウビル密度は広がっていく．もしそれがはじめに小さな点であったとしても，次第に円弧の上に広がっていき，ついには塊の先頭が最後に追いついてしまう．このことは時間が

$$T_s=2\pi/\delta\omega=4\pi E/3\omega\delta E \tag{10.25}$$

[*10] N. Moiseyev and A. Peres, *J. Chem. Phys.* 79 (1983) 5945.

だけ経って起こる．量子論的波束は古典的リウビル密度には真似できないような方法で，自分自身と干渉するので，古典的運動と量子的運動の間にあったどんなアナロジーも破綻してしまう．

量子力学に戻ろう．$n = J/\hbar$ を正数として，式 (10.22) は

$$E_n = -me^4/2n^2\hbar^2 \tag{10.26}$$

にかわられる．$n \gg 1$ (半古典的近似が成り立つ場合が多い) の水素原子は**リュードベリ原子**とよばれる．一連のエネルギーレベルは間隔 $me^4/n^3\hbar^2 = \hbar\omega$ だけ離れているが，対応原理から期待されるように，円運動している古典的電荷が円運動の回転数 ω のときに放出する電磁波のエネルギーに対応している．放出される光子はエネルギー $\hbar\omega$ をもっており，それが量子化されたレベル間のエネルギー差でなければならない．

正のエネルギー部分が無視できるようなスペクトルをもった水素原子があるとしよう．(つまり，イオン化した原子はあらかじめ取り去っておく.) シュレーディンガー波動関数は H の固有関数で

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n\, u_n(\mathbf{r})\, e^{-iE_n t/\hbar} \tag{10.27}$$

と展開できる．ただし，$\int \overline{u_n} u_s d\mathbf{r} = \delta_{ns}$，$\sum |c_n|^2 = 1$．この和は収束するので，**有限の**数の c_n で $\sum |c_n|^2$ をいくらでも 1 に近くでき，したがって任意の精度で ψ を表すことができる．その結果，どんな ψ でも時間の**周期的な**関数に任意の精度で近似できる．実際に，式 (10.27) のあらゆる指数は，$T_0 = 4\pi\hbar^3/me^4 = 3.04 \times 10^{-16}$s として，$2\pi i t/T_0 n^2$ の形をしている．c_n が無視できないようなあらゆる n の最小公倍数を L としよう．そのとき，ψ の周期は明らかに $T_0 L^2$ である．**この周期性には古典的に対応するものがない**．(有名なポアンカレ周期は一つ一つの軌跡について成立するのであって，連続的なリウビル密度に対してではない.)

演習問題 10.4 最小波束が円軌道上にあってその中心のパラメーターが式 (10.21) を満足するとき，そこに含まれると考えられるエネルギー準位数は $\sqrt{n}$ のオーダーであることを示せ． ⋆

もし多数の励起準位が効いているなら，正確な周期性として必要とされている時間 $T_0 L^2$ はきわめて大きい．しかし，**ほぼ**正確な周期性はかなり短くなれる．周期性を見いだす確率は初期状態 $\psi(0)$ と $\psi(t)$ の重なり

$$P(t) = |\langle\psi(0), \psi(t)\rangle|^2 = \left|\sum_n w_n\, e^{-iE_n t/\hbar}\right|^2 \tag{10.28}$$

で与えられる．ただし，$w_n = |c_n|^2$．もしはじめの波束が十分に局在化されているとすれば，エネルギー分散は小さく ($\Delta E \ll |E|$)，係数 w_n は n の狭い領域でだけ大きい．その領域の中心付近にある整数を N とし，$\nu = n - N$ としよう．このとき，

$$n^{-2} = N^{-2} - 2N^{-3}\,\nu + 3N^{-4}\,\nu^2 - 4N^{-5}\,\nu^3 + 5N^{-6}\,\nu^4 - \cdots \tag{10.29}$$

と展開できる．もしこの展開式ではじめの 2 項だけをとれば，式 (10.28) のべき指数は $(2\pi t/T_0 N^3)(2\nu - N)$ となる．共通の位相 $-2\pi i t/T_0 N^2$ を別にすれば，

$$t = T_{\mathrm{cl}} = N^3 T_0/2 \tag{10.30}$$

のとき，これらのあらゆる指数は $2\pi i$ の整数倍となるが，$T_{\mathrm{cl}} = 2\pi/\omega$ はエネルギー E_N の状態の時間発展の古典周期である．これはもちろん予想された結果である．短時間では，量子的波束は古典的質点のように運動する．時間が経つと，式 (10.29) の高次項が位相コヒーレンスを破り，波束は全軌道上に拡散する．

それでも波束は結局は再び集まってくる．というのは式 (10.28) の指数が，関係のない定数を別にすれば，

$$\exp[(\pi i t/T_{\mathrm{cl}})\,(2\nu - 3N^{-1}\nu^2 + 4N^{-2}\nu^3 - 5N^{-3}\nu^4 + \cdots)] \tag{10.31}$$

であり，$t = 2NT_{\mathrm{cl}}$ となると，この級数の第 2 項も $2\pi i$ の整数倍となり，波束はもと

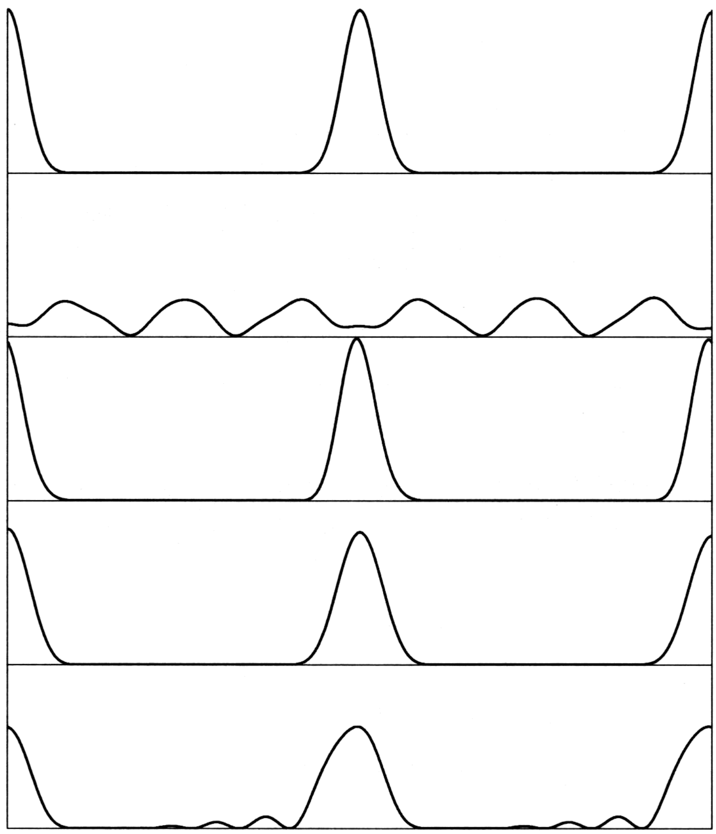


図 10.1　$n = 990$ から 1010 までのリュードベリ状態から構成されている波束の再帰性．時間に対する $|\langle\psi(0), \psi(t)\rangle|^2$ の値をプロットしてある．各図で時間は古典的周期の 2 倍にわたっている．中心の時間は上から下に，T_{cl} (1 古典周期)，$100\,T_{\mathrm{cl}}$(勝手な値)，$333.5\,T_{\mathrm{cl}}$ (最初の再帰)，$250000.5\,T_{\mathrm{cl}}$ (第 2 の再帰)，そして $(2 \times 10^8 + 0.5)\,T_{\mathrm{cl}}$ (第 3 の再帰) である．

の位置に再現するからである．この再帰性は実際すでに古典的周期の $(N/3+\frac{1}{2})$ 倍の後に起こっている．(ただほんの大ざっぱに定義した上の N は 3 の倍数のように定義し直さなければならない.) 実際に，$t=(N/3+\frac{1}{2})T_{\rm cl}$ としてみよう．式 (10.31) の最初の 2 項から

$$2\pi i\nu\left(\frac{N}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3\nu}{2N}\right)\simeq 2\pi i\nu\left(\frac{N}{3}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)=2\pi i\left[\frac{\nu N}{3}-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\right]$$

となる．N を調整すれば，いつでも $N/3$ を整数にとれる．また，$\nu(\nu-1)/2$ は，常に整数である．したがって，オーダー N^{-1} を別にすれば，式 (10.31) の指数は $2\pi i$ の倍数である．$N/3$ という因子は ($\frac{1}{2}$ を別にして) 半古典的な議論でも得られる*11．この再帰性は実験的に観測されている*12.

時間が経過するにつれ，級数 (10.31) の 3 番目の項が次第にこの周期的な再帰性を壊すようになるが，$N^2T_{\rm cl}$ の整数倍のところで新しい周期性が現れる．同じような議論から，このような再帰が実際に初めて起こるのは $t=[(N^2/4)+\frac{1}{2}]T_{\rm cl}$ のときである．ただし，ここでもまた N は偶数にしておく必要がある．その後，これらの再帰性は式 (10.31) 中のその次の項によって破壊されてしまうが，$[(N^3/5)+\frac{1}{2}]T_{\rm cl}$ の整数倍のところで再現する．そしてこのようなことが繰り返される．この例を図 10.1 に示す．$N=1000$ で 21 個のエネルギーレベル ($n=990\sim1010$) が二項分布 $w_n=2^{-20}20!/(n-990)!(1010-n)!$ の重みで分布している場合である．この N の値では，3 番目の再帰性は $t=30.4\,{\rm s}$ で起こるが，原子の基準ではきわめて長時間である．

10.3 古典の作用

シュレーディンガーの歴史的論文が発表されるとすぐに，マーデルンク*13はシュレーディンガー方程式に対する流体力学的モデルを提案した．R と S を実数として $\psi=Re^{iS/\hbar}$，$\rho=R^2$ としよう．[現在の用語でいえば，$\rho(\mathbf{r})$ は密度行列 $\rho(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ の対角成分である.] そのとき，ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ の中にある質量 m の質点のシュレーディンガー方程式は次の実数の方程式に等価である．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\rho}{m}\boldsymbol{\nabla}S\right)=0 \tag{10.32}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\nabla}S)^2+V-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}=0 \tag{10.33}$$

演習問題 10.5 これらの式を証明せよ．

$\hbar^2$ が非常に小さいという理由で，式 (10.33) の最後の項を無視すると，その結果はポテンシャル $V(\mathbf{r})$ 中を運動量 $\mathbf{p}=\boldsymbol{\nabla}S$ で運動する質量 m の粒子に対するハミルトン–ヤコビの方程式と一致する．そこで，式 (10.32) は，これらの粒子から構成され，密度 $\rho(\mathbf{r})$ と局所的速度 $\mathbf{v}=\mathbf{p}/m$ をもつ流体の連続方程式として解釈できる．

---

*11 M. Nauenberg, *Comments Atom. Mol. Phys.* 25 (1990) 151; *J. Phys. B* 23 (1990) L385.
*12 J. A. Yeazell, M. Mallalieu, and C. R. Stroud, Jr., *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2007.
*13 E. Madelung, Z. Phys. 40 (1926)322.

式 (10.33) の最後の項は**量子ポテンシャル**とよばれる．その大きさは，$R=|\psi|$ の値がある程度変化する典型的な距離を l として，$\hbar^2/ml^2$ の程度である．したがって，$\hbar/l$ は粒子の非古典的な運動 (これを視覚的にとらえたいなら，一種のブラウン運動) にもとづく "量子運動量" の大きさの程度である．この半古典の解釈はあまり真面目に受け取るべきではない．しかし，そうでなくとも，式 (10.33) からは，古典的運動量 $\boldsymbol{\nabla} S$ に比べ "量子運動量" が無視できるなら，運動は半古典的に説明できることがわかる．

演習問題 10.6　調和振動子の基底状態に対する量子ポテンシャルはどうなるか? 水素原子の基底状態ではどうか?

ヴァン・ヴレック行列

上記の成果は，ポテンシャルがゆっくり変化している場合，ψ の位相がハミルトン–ヤコビ関数 S に対応していることを示している．したがって，この位相は与えられたハミルトニアンに対する**古典的**方程式を任意の初期データのもとで解くことによって近似的に求められる．すると，$\rho=|\psi|^2$ に対する古典的対応が何であるかという疑問が生じるのは当然のことである．その解答はヴァン・ヴレック[*14]によって与えられ，そしてシラー[*15]によってさらに精緻化されたが，それを以下に示す．ハミルトン–ヤコビ方程式に慣れていない読者は以下の 3 ページは飛ばしてもよい．

この扱いに慣れていると思われるので，N 自由度の古典系のハミルトニアンを $H(q^k,p_k,t)$ としよう．ハミルトン–ヤコビ方程式は

$$\partial S/\partial t+H(q,\partial S/\partial q,t)=0 \tag{10.34}$$

となる．ただし，添字なしの q は変数の組 $q^1,\cdots,q^N$ を表す．いま，式 (10.34) が，配位空間のある領域で，N 個の積分定数 P_μ (後でこの点を議論する) に依存する解をもつとしよう．この解を $S(q,P,t)$ と書き，行列

$$S_k^\mu := \partial^2 S/\partial q^k\,\partial P_\mu \tag{10.35}$$

を定義しよう．この行列もまた q と P の関数である．逆行列は

$$\sum_\mu T_\mu^i\,S_k^\mu=\delta_k^i \tag{10.36}$$

で定義される．その他の q と P の関数は運動量と速度

$$p_k(q,P,t)=\partial S/\partial q^k,\qquad\qquad v^k=dq^k/dt=\partial H/\partial p_k \tag{10.37}$$

である．$S_k^\mu=\partial p_k/\partial P_\mu$ に注意しよう．

[*14] J. H. Van Vleck, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 14 (1928) 178.
[*15] R. Schiller, *Phys. Rev.* 125(1962) 1100, 1109, 1116.

ここでヴァン・ヴレック行列 $D = \mathrm{Det}S_k^\mu$ が N 次元配位空間における**連続の方程式**を満たすことを示そう．行列 D を S_k^μ で展開したときのその係数が $(D\,T_\mu^k)$ だから，

$$\partial D/\partial t \equiv \sum_{k\mu} D\,T_\mu^k\,(\partial S_k^\mu/\partial t) \tag{10.38}$$

となる．(逆行列の計算規則を思い出そう.) $\partial S_k^\mu/\partial t$ を得るには，ハミルトン–ヤコビ方程式 (10.34) を 2 回微分すれば，

$$\frac{\partial S_k^\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^k}\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_\mu} \equiv \frac{\partial S_k^\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^k}\sum_i v^i\,S_i^\mu = 0 \tag{10.39}$$

が得られる．したがって

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\sum_{k\mu} D\,T_\mu^k\,\frac{\partial}{\partial q^k}\sum_i v^i\,S_i^\mu = -\sum_{ik\mu} D\,T_\mu^k\left(\frac{\partial v^i}{\partial q^k}\,S_i^\mu + v^i\,\frac{\partial S_i^\mu}{\partial q^k}\right) \tag{10.40}$$

となる．式 (10.36) と S_i^μ の定義から

$$\partial S_i^\mu/\partial q^k \equiv \partial S_k^\mu/\partial q^i \tag{10.41}$$

を使うと，

$$\begin{aligned}\partial D/\partial t &= -\sum_i\Big[D\,(\partial v^i/\partial q_i) + v^i\sum_{k\mu} D\,T_\mu^k\,(\partial S_k^\mu/\partial q_i)\Big]\\ &= -\sum_i\Big[D\,(\partial v^i/\partial q_i) + v^i\,(\partial D/\partial q_i)\Big] = -\partial(Dv^i)/\partial q^i\end{aligned} \tag{10.42}$$

が得られる．この結果は N 次元配位空間で密度 D，速度 v^i の流体に対する連続の方程式のように見える．したがって，規格化定数 $(\int D\,d^Nq)^{-1}$ は必要だが，関数 $D(q,P,t)$ を**確率密度**として解釈できよう．このことをもっと正確にみるために $S(q,P,t)$ が q と p から，新しい力学変数，P_μ と $Q^\mu = \partial S/\partial P_\mu$ への正準変換の母関数であることを思い出そう．一つ一つの古典軌道は**ある決まった** P_μ と Q^μ の値に対応する．$f(q,p,t) = F(Q,P,t)$ を任意の力学変数としよう．P_μ の値は一定だが，Q^μ については一様に分布している軌道の集合を考えよう．(たとえば，エネルギーは一定で，位相については一様に分布している調和振動子の集合を考える.) F の平均値は

$$\langle F\rangle = \int F(Q,P,t)\,d^NQ \Big/ \int d^NQ \tag{10.43}$$

となる．もとの変数に戻るために，$Q = Q(q,p,t)$ を代入しよう．P と t を一定として，この変換のヤコビアンは

$$\mathrm{Det}\,(\partial Q^\mu/\partial q^k) = \mathrm{Det}\,(\partial^2 S/\partial q^k\,\partial P_\mu) = D \tag{10.44}$$

である．したがって，元の座標では

$$\langle f\rangle = \int f(q,p,t)\,D\,d^Nq \Big/ \int D\,d^Nq \tag{10.45}$$

となる．ただし，式 (10.37) と同じように，$p_k = \partial S/\partial q^k = p_k(q,P,t)$ である．したがって，D が，一様分布した Q_μ に対応する位置座標空間の密度に比例していることがわかる．

量　子　化

ここで“古典的波動関数” $\psi_{\rm cl} = \sqrt{D}\, e^{iS/\hbar}$ を定義することができるが，これは補正項 $(\hbar^2/2m)\nabla^2\sqrt{D}/\sqrt{D}$ を別にすれば，シュレーディンガー方程式のような式を満足する．補正項は，D が $\hbar/p$ の程度の領域でゆっくりと変化するなら無視できる．(これまでは任意の定数でもよかった) $\hbar$ を通常の値にとることによって量子論とかかわりが付く．しかしながら，いくつかの困難がある．

一般に，ハミルトン–ヤコビ関数 $S(q,P,t)$ は配位空間内で大局的な一価関数ではない．このことは任意の経路 (必ずしも実際の軌道でなくてもよい) に沿ってその値をしらべればわかる．その変位は，

$$dS \equiv (\partial S/\partial t)\, dt + \sum_k (\partial S/\partial q^k)\, dq^k = -H\, dt + \sum_k p_k\, dq^k \tag{10.46}$$

となる．特に，H が時間的に一定なとき，配置空間で閉じた経路を考えれば，

$$\oint dS = \sum_k \oint p_k\, dq^k \tag{10.47}$$

が得られる．したがって，S が多価関数であることがわかる．k 番目の自由度についての周期ごとに，S は古典的作用 $I_k := \oint p_k\, dq^k$ 分だけ増加する．波動関数 $e^{iS/\hbar}$ を 1 価にするためには，条件 $I_k = 2\pi n_k \hbar$ を要請しなければならない．ただし，n_k は整数である．これは周期的軌道にたいするボーアの量子化規則である．

演習問題 10.7　調和振動子に対するハミルトン–ヤコビ方程式を解け．また，ボーアの量子化規則によれば，$E = n\hbar\omega$ となることを示せ．　★

アインシュタイン–ブリルアン–ケラー量子化規則 [EBK (Einstein–Brillouin–Keller) quantization rule] を使えば，量子力学ともっと密接に関係している結果

$$I_k = \oint p_k\, dq^k = 2\pi\hbar\,(n_k + \alpha_k/4) \tag{10.48}$$

が得られる*16–*18．ただし，α_k は古典的周期軌道が遭遇するコウスティックを数えた**マズロフ指数**である*19．しかしながら，一般的な古典系の軌道はたいてい周期的でも，また多重周期的でもなく，作用角変数はつくれない．つまり，**一般的な力学系は可積分的でない**のである．運動の定数 P_μ は N 自由度系では N よりも少数しかなく，ハミルトン–ヤコビ方程式は微分可能な関数の大域解をもっていない*20．N 個の運動の定数をもつハミルトン–ヤコビ方程式の大域解がある可積分系は例外であり，規範とするわけにはいかない．

---

*16 A. Einstein, *Verh. Deut. Phys. Gesell.* 19 (1917)82.
*17 L. Brillouin, *J. Phys. Radium* 7 (1926) 353.
*18 J. B. Keller, *Ann. Phys. (NY)* 4 (1958) 180.
*19 M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, Wiley, New York (1989) p. 238.
*20 M. Rasetti, *Modern Methods in Equilibrium Statistical Mechanics*, World Scientific, Singapore (1986) p. 31.

そうはいうものの，可積分でない古典系にも無数の周期軌道があり，それらは初期条件に対する摂動に関して安定である場合も，不安定である場合もある．ほとんどの周期的軌道が安定している位相空間の領域を**正則**という．それに対し，ほとんどの周期的軌道が不安定であるような領域を**非正則**あるいは**カオス**という．正則な領域では，隣接する周期的軌道の束が密集して位相空間の中で有限な体積を占めているであろう．その体積が，$(2\pi\hbar)^N$ よりずっと大きいなら，EBK 量子化は近似的に成立し，エネルギー準位は式 (10.48) のように整数 n_k で表示されよう[*21]．これらは水素原子の n, l, m のように，真っ当な量子数である．

一方，カオス領域では，たまたま，ある時間で互いに近くを通過した周期的軌道が非常に速く離れ去ってしまい，その後，位相空間のエネルギー面の大きな部分をさまようようになる．(対称性がなければ，エネルギーは唯一の運動の定数であろう.) そのような場合，半古典的量子化ははるかに複雑になる．しかしながら，それなりの精度で量子エネルギー準位を予言する洗練された方法がある[*22]．(しかし，これは本書の範囲を越えている.)

ファインマンの経路積分

古典的作用 S の量子論への最も重要な適用はファインマンの経路積分である[*23]．これは量子動力学に対する革新的に新しい方法であり，$\sum \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{q})$ という形のハミルトニアンに対しては (近似ではなく) **厳密**にシュレーディンガー方程式に等価である．しかしながら，それは，このクラスのハミルトニアンに制限されるわけではない．

時間発展演算子 $\mathsf{U}(t_2, t_1)$ は，(デカルト座標の) q 表示で，

$$U(q'', t_2; q', t_1) = \int e^{iS[q]/\hbar}\, \mathcal{D}[q(t)] \tag{10.49}$$

となる．ただし

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{10.50}$$

は配位空間内の経路 $q(t)$ に沿って計算された古典的作用である．これは，ラグランジアンが $L = \sum p_k \dot{q}^k - H$ だから，式 (10.46) の S と同じである．

式 (10.49) の記号 $\mathcal{D}[q(t)]$ は，この和が (q', t_1) から (q'', t_2) までのあらゆる連続的経路について，たとえ，それがオイラー–ラグランジュの運動方程式に従わない経路についても，一つ一つ和をとることを意味している．この記号にはまた，$U(q'', t_1; q', t_1) \equiv \delta^N(q''-q')$ とするために，暗黙のうちに無限大の規格化定数が含まれている．式 (10.49) の和に含まれる経路はすべて等しい重みをもっているが，S が極値となる古典的経路に近いものだけが実質的に寄与する．他の経路は位相 $S/\hbar$ が急速に変化するため，干渉して互いに打ち消し合う．

---

*21 A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* 53 (1984) 1711.
*22 M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, New York (1991).
*23 R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* 20 (1948) 367.

式 (10.49) の右辺はリーマン積分でもルベーク積分でもない．連続関数の関数空間における積分であるが，これらの関数は一般には微分可能ではない．(しかし，それらの**真っ直ぐ**な線分をつなぎ合わせていくらでもよく近似できなければならない.) ほとんどの経路がブラウン運動のようであり，式 (10.49) の S の値は，この和を定義するために使われた極限操作に依存する．このため数学的におそろしく難しくなる．驚くことではないのだが，これらの発散する和をとる順序によって結果が違ってくる．つまり，$p \to -i\hbar\partial/\partial q$ のように古典的表現を量子化するときに，従来の方法では因子の順序に不確定さが現れることが良く知られているが，ここでもその困難からは逃れられないのである．

これらの困難にもかかわらず，経路積分法には多くの有用な適応例が見つかっている．特に相対論的場の理論はその典型である[*24]．章末の参考文献に標準的なものをいくつか引用しておく．

10.4 位相空間での量子力学

配位空間から位相空間に，つまり，N から $2N$ 次元に話を進めてみよう．古典統計力学で，物理系の集団の統計的性格はリウビル密度 $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ によって記述されるが，それは運動方程式

$$\frac{df}{dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + [f,H]_{\mathrm{PB}} = 0 \tag{10.51}$$

を満たしている[*25]．

これに関しては，密度行列の定義 $\rho(\mathbf{q}',\mathbf{q}'',t) = \psi(\mathbf{q}',t)\overline{\psi(\mathbf{q}'',t)}$ から出てくるシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\,\dot{\rho} = [\mathsf{H},\rho] \tag{10.52}$$

が思い起こされる．純粋状態でない密度行列も線形性から式 (10.52) を満たしている．

位相空間でリウビル密度に対する量子版を探してみよう．位相空間では位置座標と運動量を同等に扱うので，関数 $\psi(\mathbf{q})$ によって q 表示が与えられる状態 ψ の**運動量表示**を定義し，$\tilde{\psi}(\mathbf{p})$ と書くことにしよう．運動量演算子の任意関数について，恒等的に

$$\langle\psi, f(\mathsf{p})\,\psi\rangle = \int \overline{\psi(\mathbf{q})}\, f(-i\hbar\,\partial/\partial\mathbf{q})\,\psi(\mathbf{q})\,d\mathbf{q} = \int |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2\, f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p} \tag{10.53}$$

が成り立っていて欲しい．

演習問題 10.8 式 (10.53) が

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}) := (2\pi\hbar)^{-N/2} \int \psi(\mathbf{q})\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}/\hbar}\,d\mathbf{q} \tag{10.54}$$

とすることによって満たされていることを示せ． ★

---

*24 C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980).

*25 記号 $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ は $2N$ 次元のデカルト座標成分 q^k と p_k を表している．通常，各種の物理量の時間依存性は動力学的方程式によってのみあらわに書き表される．

位相についてはまだ不確定さが残っている．式 (10.53) の正当性を破ることなく $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$ に任意の位相因子 $\mathrm{e}^{i\phi(\mathbf{p})}$ を掛けることができる．この点についてはすでに 8.4 節で論じており，ここでは述べないことにする．

q 表示が与えられている任意の演算子の運動量表示も同様に定義できる．

$$\tilde{A}(\mathbf{p}',\mathbf{p}'') := (2\pi\hbar)^{-N} \iint A(\mathbf{q}',\mathbf{q}'')\, e^{i(\mathbf{q}'\cdot\mathbf{p}'-\mathbf{q}''\cdot\mathbf{p}'')/\hbar}\, d\mathbf{q}'\, d\mathbf{q}'' \tag{10.55}$$

特に純粋状態に対する密度行列に対しては $\tilde{\rho}(\mathbf{p}',\mathbf{p}'') = \tilde{\psi}(\mathbf{p}')\overline{\tilde{\psi}(\mathbf{p}'')}$ となる．

ウィグナー関数

量子熱力学を研究している過程でウィグナー*26は，リウビル密度の量子版として

$$W(\mathbf{q},\mathbf{p}) := (\pi\hbar)^{-N} \int \rho(\mathbf{q}-\mathbf{r},\mathbf{q}+\mathbf{r})\, e^{2i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\, d\mathbf{r} \tag{10.56}$$

という表現を提案した．$W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ が実数であり，最低限

$$\int W(\mathbf{q},\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = \rho(\mathbf{q},\mathbf{q}), \qquad \int W(\mathbf{q},\mathbf{p})\, d\mathbf{q} = \tilde{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{p}) \tag{10.57}$$

という正しい分布関数を与えることは容易にわかる．古典統計力学で成立しているように，任意の関数 f と g に対して

$$\langle f(\mathsf{q}) + g(\mathsf{p})\rangle = \int [f(\mathbf{q}) + g(\mathbf{p})]\, W(\mathbf{q},\mathbf{p})\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{p} \tag{10.58}$$

が成立する．しかしながら，因子に順序づけの不確定さがあるため，q と p のもっと一般的な関数については，これに対応するような式は成立しない．(多項式については一意的な順序付けが定義できるが*27，任意関数についてはできない.)

演習問題 10.9　1 次元の調和振動子の場合，その基底状態に対するウィグナー関数を求めよ．　★

演習問題 10.10　$\psi(x) = \sqrt{2/\pi}\Big/(1+x^2)$ に対するウィグナー関数を求めよ．　★

演習問題 10.11　ウィグナー関数 $W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ が与えられたとして，密度行列 $\rho(\mathbf{q}',\mathbf{q}'')$ を求めよ．ρ が正の演算子となるために，$W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ の満たすべき条件は何か?

演習問題 10.12

$$\int W_1(\mathbf{q},\mathbf{p})\, W_2(\mathbf{q},\mathbf{p})\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{p} = \mathrm{Tr}\,(\rho_1\,\rho_2)/(2\pi\hbar)^N \tag{10.59}$$

したがって，

$$\int [W(\mathbf{q},\mathbf{p})]^2\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{p} \le (2\pi\hbar)^{-N} \tag{10.60}$$

が成り立つことを示せ．ただし等号は純粋状態に対してのみ成立する．

*26 E. P. Wigner, *Phys. Rev.* 40 (1932) 749.
*27 J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*45 (1949) 99.

純粋状態に対しては，$\mathrm{Tr}\,(\rho_1\,\rho_2) = |\langle\psi_1,\,\psi_2\rangle|^2$ であり，式 (10.59) から，直交している状態のウィグナー関数が $\int W_1(\mathbf{q},\mathbf{p})\,W_2(\mathbf{q},\mathbf{p})\,d\mathbf{q}\,d\mathbf{p} = 0$ を満たすことがわかる．このことからウィグナー関数は時には負にもなり，リウビル密度の量子力学版ではあるが，確率分布関数とは解釈できない．(“擬確率” とよばれることもある.) さらに，式 (10.56) から $W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ は $\hbar \to 0$ で極限値をもたず，むしろ急激に振動することがわかる．そうはいうものの，ウィグナー関数によって位相空間における量子系のおおよその位置に関する定性的な感じは与えられよう．ウィグナー関数は量子系の動力学的挙動を視覚化するのに使われることが多い．ウィグナー関数は $\int W(\mathbf{q},\mathbf{p})\,d\mathbf{q}\,d\mathbf{p} = 1$ と規格化されてはいるが，式 (10.60) も満たさねばならないので，いくらでも狭く，そして大きくなることはできないことに注意しよう．

量子リウビル方程式

ここでウィグナー関数の時間発展と式 (10.51) に従うリウビル密度の時間発展を比較してみよう．簡単のために，1 自由度で，T を運動エネルギー $-(\hbar^2/2m)(\partial^2/\partial q^2)$ とし，ハミルトニアンを $H = T + V(q)$ としよう．純粋状態では

$$W(q,p,t) = (\pi\hbar)^{-1} \int \psi(q-r,t)\,\overline{\psi(q+r,t)}\,e^{2ipr/\hbar}\,dr \tag{10.61}$$

なので，

$$i\hbar\,\partial W(q,p,t)/\partial t = (\pi\hbar)^{-1} \int (H\psi\,\overline{\psi} - \psi\,\overline{H\psi})\,e^{2ipr/\hbar}\,dr \tag{10.62}$$

となる．T と V を別々に考慮しよう．

$$\begin{aligned}
&\int [T\,\psi(q-r)\,\overline{\psi(q+r)} - \psi(q-r)\,\overline{T\,\psi(q+r)}\,]\,e^{2ipr/\hbar}\,dr \\
&\qquad = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\left[\int \frac{\partial^2\psi(q-r)}{\partial q^2}\,\overline{\psi(q+r)}\,e^{2ipr/\hbar}\,dr - \text{c.c.}\right]
\end{aligned} \tag{10.63}$$

となる．$\partial^2/\partial q^2$ を $\partial^2/\partial r^2$ で置き換え，部分積分をすると，

$$\begin{aligned}
i\hbar\,\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_T &= \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{2ip}{\hbar}\left[\int \frac{\partial\psi(q-r)}{\partial r}\,\overline{\psi(q+r)}\,e^{2ipr/\hbar}\,dr + \text{c.c.}\right] \\
&= -i\hbar\,\frac{p}{m}\,\frac{\partial}{\partial q}\int \psi(q-r)\,\overline{\psi(q+r)}\,e^{2ipr/\hbar}\,dr = -i\hbar\,\frac{p}{m}\,\frac{\partial W(q,p,t)}{\partial q}
\end{aligned} \tag{10.64}$$

となる．これがリウビル方程式 (10.51) の $-(dq/dt)(\partial f/\partial q)$ という項に対応する．

$(H\psi\,\overline{\psi} - \psi\,\overline{H\psi})$ の中のポテンシャルエネルギーの項は

$$\int [V(q-r)\,\psi(q-r)\,\overline{\psi(q+r)} - \psi(q-r)\,V(q+r)\,\overline{\psi(q+r)}\,]\,e^{2ipr/\hbar}\,dr$$

となる．もし V がゆっくりと変化している関数なら，

$$V(q-r) - V(q+r) = -2\,[r\,V'(q) + (r^3/3!)\,V'''(q) + \cdots] \tag{10.65}$$

と展開できる．そこで，$r^n e^{2ipr/\hbar} = (\hbar/2i)^n \partial^n(e^{2ipr/\hbar})/\partial p^n$ と書けば，

$$i\hbar \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_V = i\hbar\left[\frac{\partial W}{\partial p} V'(q) - \frac{\hbar^2}{24}\frac{\partial^3 W}{\partial p^3} V'''(q) + \cdots\right] \tag{10.66}$$

が得られる．この式の第 1 項はリウビル方程式 (10.51) の項 $-(\partial f/\partial p)(dp/dt)$ に等価な結果を与える．次の項は 3 階の微分 d^3V/dq^3 を含み，式 (10.17) で見たように，波束がひずむ原因となる．要約すると，量子論的リウビル方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial q}\frac{p}{m} + \frac{\partial W}{\partial p}\frac{dV}{dq} - \frac{\hbar^2}{24}\frac{\partial^3 W}{\partial p^3}\frac{d^3V}{dq^3} + \cdots \tag{10.67}$$

となる．

演習問題 10.13 量子論的リウビル方程式が (N 次元で成り立つ) 微積分方程式

$$\frac{\partial W(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \int \tilde{V}(\mathbf{q},\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,W(\mathbf{q},\mathbf{p}',t)\,d\mathbf{p}' \tag{10.68}$$

の形に書けることを示せ．ただし，$d\mathbf{q}/dt = \mathbf{p}/m$，また

$$\tilde{V}(\mathbf{q},\mathbf{p}) := (i/\pi^N \hbar^{N+1})\int [V(\mathbf{q}+\mathbf{r}) - V(\mathbf{q}-\mathbf{r})]\,e^{2i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,d\mathbf{r} \tag{10.69}$$

である．

ぼかしたウィグナー関数

ウィグナー関数は一般的にどこでも正であるというわけではないが，少しだけぼかすと負の領域を消去できる．$W_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ を $\mathbf{q}=\mathbf{p}=0$ の近傍に集中している任意のウィグナー関数としよう．式 (10.60) から，ウィグナー関数はいくらでも鋭くピークをもつようにはできないことを知っているが，$W_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ は十分に局所化されていると仮定しよう．たとえば，

$$W_0(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (\pi\hbar)^{-N}\,e^{-(\mathbf{q}^2/\sigma^2)-(\mathbf{p}^2\sigma^2/\hbar^2)} \tag{10.70}$$

ととろう．ここで σ は任意の正の定数である．この $W_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ は最小不確定積をもち，$\Delta q^k = \sigma/\sqrt{2}$，$\Delta p^k = \hbar/\sigma\sqrt{2}$ である．

演習問題 10.14 式 (10.70) の $W_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ は等方的調和振動子の基底状態

$$\psi_0(\mathbf{q}) = (\pi\sigma^2)^{-N/4}\,e^{-\mathbf{q}^2/2\sigma^2} \tag{10.71}$$

に対応したものであることを示せ．

この $W_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$，あるいは同様なものを使って，別のウィグナー関数を畳込みの方法でぼかすことができる．

$$\begin{aligned} W(\mathbf{q},\mathbf{p}) &\to W_\sigma(\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ &= (2\pi\hbar)^{-N}\int W_0(\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,W(\mathbf{q}',\mathbf{p}')\,d\mathbf{q}'\,d\mathbf{p}' \end{aligned} \tag{10.72}$$

式 (10.70) で与えられた $W_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ を使うなら，この畳込みによって q^k は σ の大きさだけ，p_k は $\hbar/\sigma$ の大きさだけぼかされる．

演習問題 10.15　もし，$W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ が純粋状態 $\psi(\mathbf{q})$ に対応するなら，$W_0(\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ は状態 $e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}/\hbar}\psi(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$ に対応することを示せ．

滑らかにされたウィグナー関数 $W_\sigma(\mathbf{q},\mathbf{p})$ は 2 通りに解釈される．一つはウィグナー関数 $W(\mathbf{q}',\mathbf{p}')$ を正の係数で一次結合したものであり，したがって，これもまた正当なウィグナー関数であり，非可換な密度行列の一次結合に相当する．一方，式 (10.59) でのように，式 (10.72) の右辺を，$\mathbf{q}'$ と $\mathbf{p}'$ を位相空間の座標と運動量で，$\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ は単なる数値パラメーターとして，内積のようにも考えられる．そのような内積は決して負にならないので，任意の σ の値に対して $W_\sigma(\mathbf{q},\mathbf{p})\geq 0$ となる．

畳込み (10.72) で滑らかにする関数として (10.70) を使った場合，その結果は伏見関数とよばれる[28]．後者は，式 (10.57) のような正しく規格化されているわけではないし，また (10.68) のような比較的単純な方程式があるわけでもない．しかしながら，伏見関数は量子光学で非常によく応用されており[29]，また，原理的には逆に畳込みを解いて対応するウィグナー関数を求めることもできる．

リハチェック関数

ウィグナー関数 (10.56) は数多く存在する量子版のリウビル密度の一つにすぎない．ρ に関して線形で式 (10.57) のような正しい規格化をもつ最も一般的な関数はコーエンによって導入された[30]．ρ の線形性を要求しなければ，どこでも負にはならず，正しい規格化をもつ分布を実際に構成できる[31]．リハチェックは非常に単純な双一次関数

$$R(\mathbf{q},\mathbf{p})=(2\pi\hbar)^{-N/2}\,\psi(\mathbf{q})\,\overline{\tilde{\psi}(\mathbf{p})}\,e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}/\hbar} \tag{10.73}$$

を提案した[32]．$\tilde{\psi}(\mathbf{p})$ は式 (10.54) で定義された ψ の運動量表示である．混合状態に対するリハチェック関数は $\rho=\sum w_\mu\psi_\mu\psi_\mu{}^\dagger$ と対角化し，一つ一つの ψ_μ に関するリハチェック関数を相対的な重み w_μ で足し上げればよい．実数のウィグナー関数と違い，リハチェック関数は複素数である．しかし，その一方で，構造ははるかに簡単であり，周期的なポテンシャルには興味深い応用例がある[33]．

演習問題 10.16　$R(\mathbf{q},\mathbf{p})$ と $\rho(\mathbf{q}',\mathbf{q}'')$ との間の関係を求めよ．

演習問題 10.17　任意の二つの状態 ψ_1 と ψ_2 に対して

$$|\langle\psi_1,\psi_2\rangle|^2=(2\pi\hbar)^{-N}\int\overline{R_1(\mathbf{q},\mathbf{p})}\,R_2(\mathbf{q},\mathbf{p})\,d\mathbf{q}\,d\mathbf{p} \tag{10.74}$$

---
[28] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 22 (1940) 264.
[29] S. Stenholm, *Ann. Phys. (NY)* 218 (1992) 233.
[30] L. Cohen, *J. Math. Phys.* 7 (1966)781.
[31] L. Cohen and Y. I. Zaparovanny, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 794.
[32] A. W. Rihaczek, *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-14(1968)369.
[33] J. Zak, *Phys. Rev. A* 45(1992)3540.

となることを示せ．

式 (10.54) と (10.74) からは $\int R(\mathbf{q},\mathbf{p})d\mathbf{p} = |\psi(\mathbf{q})|^2$ と $\int R(\mathbf{q},\mathbf{p})d\mathbf{q} = |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2$ が得られるから，ウィグナー関数のように，$\langle f(\mathsf{q}) + g(\mathsf{p})\rangle = \int [f(\mathbf{q}) + g(\mathbf{p})] R(\mathbf{q},\mathbf{p}) d\mathbf{q} d\mathbf{p}$ となる．

10.5 クープマンの定理

古典力学と量子力学の間には対応関係が存在するのに，なぜ量子的方法で古典的問題を解こうとしないのであろうか? リウビル方程式 (10.51) から始めるとしよう．この方程式は

$$i\,\partial f/\partial t = \mathsf{L}\,f \tag{10.75}$$

と書ける．ただし L はリウビル演算子，すなわちリウビリアン

$$\mathsf{L} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right)\cdot\left(-i\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right)\cdot\left(-i\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \tag{10.76}$$

である．ここで次のことに注意しよう．$f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ は $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ の関数であるが，それらは位相空間を規定する $2N$ 個の独立で**可換**な変数である．(もちろん $\mathbf{q}$ は $-i\partial/\partial\mathbf{q}$ とは交換しない．しかし $-i\partial/\partial\mathbf{q}$ が $\mathbf{p}$ と同じであるというわけではまったくない.) 演算子 L はエルミート的である．実際に自己共役であるかあるいは単に対称的であるだけかは，H の具体的な性質に依存する．(これらの用語の正確な定義は 86 ページを参照せよ.)

リウビル密度の規格化は $\int f\,d\mathbf{q}\,d\mathbf{p} = 1$ なので，量子力学をまねして $f = |\Phi|^2$ となるようなリウビルの波動関数 Φ を導入してもよいだろう．L は 1 階の微分に関し同次なので，Φ も同じリウビル方程式 $i\partial\Phi/\partial t = \mathsf{L}\Phi$ を満たすことに注意しよう．したがって $\Phi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ の時間発展は位相空間での**ユニタリー写像**である．もし式 (10.75) を満たすもう一つのリウビル波動関数 $\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ があれば，それらの内積 $\int \overline{\Phi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}\,\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{q}\,d\mathbf{p}$ は時間的に不変である．これがクープマンの定理である[*34]．

ここでリウビル波動関数はヒルベルト空間では当然**複素**関数となるので，単に $\Phi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ とするよりむしろ $\overline{\Phi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}$ と書いた．たとえば，1 次元の調和振動子 $H = p^2/2m + kq^2/2$ を考えよう．そのリウビル方程式は

$$i\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{p}{m}\left(-i\,\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right) - kq\left(-i\,\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right) \tag{10.77}$$

である．ここで定常的な解 $\Phi = \mathrm{e}^{-i\Omega t}F(q,p)$ を探そう．新しい変数 $p_\pm := p \pm im\omega q$ を定義すると都合よい．ただし，いつものように $\omega = (k/m)^{1/2}$ である．これらを式 (10.77) に代入すると，

$$\Omega\,F = \omega\,[p_+\,(\partial F/\partial p_+) - p_-\,(\partial F/\partial p_-)] \tag{10.78}$$

---

*34 B. O. Koopman, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 17 (1931) 315.

が得られる．この特解は，$\Omega=(k-l)\omega$ として $F=(p_+)^k(p_-)^l$ である．F を 1 価とするためには $(k-l)$ が整数でなければならない．もっと一般的な解は n を整数として，$F=\mathcal{N}(H)(p\pm im\omega q)^n$ である．ただし，$\mathcal{N}$ は H の任意関数であり，規格化定数も含んでいる．したがってこのリウビリアンのスペクトルは $\Omega=n\omega$ であるが，n は正と負の任意の整数である．このスペクトルには，量子論のハミルトニアンと違って下限がない．

演習問題 10.18 このリウビリアンの固有状態の物理的意味は何か?

さて，今度は不整合な振動数 ω_1 と ω_2 をもつ二つの独立した調和振動子を考えよう．量子論的ハミルトニアンのスペクトルは $E/\hbar=(n_1+\frac{1}{2})\omega_1+(n_2+\frac{1}{2})\omega_2$ である．任意の二つのエネルギー，E と $E+\delta E$ の間には**有限個の**エネルギースペクトルしかない．(大きな E に対して，状態密度は $dn/dE=E/\hbar^2\omega_1\omega_2$ となる.) 一方，古典的なリウビリアンのスペクトルは $\Omega=n_1\omega_1+n_2\omega_2$ である．$n_1 n_2$ は負にもなりうるので，Ω と $\Omega+\delta\Omega$ の間に**無数の**スペクトルをもっている．これは**稠密な**点スペクトルである．

一般的な非線形系の場合には，リウビリアンのスペクトルは連続となる．このため境界のあるような系に対しては，リウビル密度の時間発展と量子力学的波動関数の時間発展との間に定性的な違いが生じる．量子状態はいつでも，**有限個の**エネルギー固有状態を使って，いつでも，いかなる精度でも表現できる．境界のある量子系の時間発展は，図 10.1 のように遅かれ早かれ再帰性をもつ[*35]．もっとも純粋なリウビル密度は連続スペクトルをもっており，L の固有値が無限個あることと等価である．この無限個の基底のためにリウビル密度は時間の経過に伴ってますますゆがめられ，きわめて薄く，長く突出した部分をもつ複雑に入り組んだ形となり，保存則に反しない限り位相空間内のどのような点にも近づける．その結果，位相空間の**混合**が生じ，**粗視化**と結び付けられることで，古典的不可逆性の理論的根拠とされている．これらの性質の量子版はなく，量子現象の不可逆性についての同じような説明は存在しない (11 章を参照).

10.6 コンパクトな空間

最も基礎的な量子系では有限次元のヒルベルト空間が使われるが，それに対応する古典版はコンパクトな位相空間をもつ．たとえば q を領域 $[0,2\pi]$ をもつ角度座標としよう．ただし 0 と 2π は同一点である．その共役変数 p は作用の次元をもつ．p もまた領域 $[-J,J]$ に限定されているとしよう．ただし，$-J$ と J は同一点である．新

*35 I. C. Percival, *J. Math. Phys.* 2(1961)235.

しい古典的変数

$$J_x = \sqrt{J^2 - p^2}\ \cos q$$
$$J_y = \sqrt{J^2 - p^2}\ \sin q \qquad (10.79)$$
$$J_z = p$$

を定義しよう．これらのポアソン括弧式はちょうど角運動量の 3 成分と同じように，$[J_x, J_y]_{\mathrm{PB}} = J_z$ と，この循環置換したものである．

もし，ポアソン括弧式に交換関係を対応させるというよく知られた関係を使ってこの系を量子化すると，$[\mathsf{J}_x, \mathsf{J}_y] = i\hbar\,\mathsf{J}_z$ となるので，$J^2 = j(j+1)\hbar^2$ となる．ここで j は整数 (あるいは 2 成分波動関数が許される場合には，半整数) である．式 (10.79) を用いて量子化を実行しようとすると，古典的パラメーター J が他の値の場合には，正準量子化は矛盾してしまう．大きな j (つまり，半古典的極限) に対して $J \simeq (j+\frac{1}{2})\hbar$ となり，位相空間の全面積はプランク定数の整数倍となる[*36]．

$$A = 4\pi J \ \rightarrow\ (2j+1)\,2\pi\hbar \qquad (10.80)$$

事例研究：量子ダイヤル

このコンパクトな位相空間を量子化する別の方法は周期的波動関数 $\psi(q)$ によって量子状態を表すことである．$p = -i\hbar\partial/\partial q$ としよう．古典的な制限，つまり $-J \le p \le J$ は ψ のフーリエ成分を制限すればよい．

$$\psi(q) = \sum_{m=-j}^{j} c_m\, e^{imq} \qquad (10.81)$$

ここで，$j = J/\hbar$ は整数，あるいは半整数であり，$\sum |c_m|^2 = (2\pi)^{-1}$ である．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は $N = 2j+1$ 次元であり，位相空間の全面積は $4\pi j\hbar = (N-1)h$ である．

演算子 p の固有状態を u_m とすると，その q 表示は $u_m(q) = e^{imq}/(2\pi)^{1/2}$ となる．ただし，$m = -j, \cdots, j$ である．しかしながら，ψ を式 (10.81) で定義しても，$q\psi(q)$ は周期関数でないので，古典的変数 q に対応する演算子は存在しない．したがって，$q\psi(q)$ は $\mathcal{H}$ に属していない．そうではあるが，q が大雑把な意味で局在している状態をつくることは可能である．それらをダイヤル状態とよぼう．この状態は p を最大限に一様化することにより，

$$v_0(q) = N^{-1/2} \sum_{m=-j}^{j} u_m(q) = (2\pi N)^{-1/2}\, \frac{\sin(Nq/2)}{\sin(q/2)} \qquad (10.82)$$

のようにして構成できる．ここで $N = 2j+1$ であり，恒等式

$$\sum_{m=-j}^{j} x^m \equiv \frac{x^{j+1/2} - x^{-j-1/2}}{x^{1/2} - x^{-1/2}} \qquad (10.83)$$

[*36] J. H. Hannay and M. V. Berry, *Physica D* 1 (1980) 267.

を使った．q は角度なので，$2\pi/N$ の幅で N 個に等分割されたダイヤルを思い浮かべてもよい．問題は N 個の直交する量子状態をこれらの N 個の等分割点に関係づけることである．

$|v_0(q)|^2$ を q についてプロットすれば，$q=0$ に高さ $N/2\pi$ で幅が $\sim 2\pi/N$ のピークがある．しかし，この "幅" にもっと厳密な意味をもたせようとすると，微妙な問題になり，すぐわかるように本当の幅はかなり大きくなる．理由は $qv_0(q)$ が $\mathcal{H}$ に属していないために (演算子 q は存在しない)，Δq が $[\langle \mathsf{q}^2\rangle - \langle \mathsf{q}\rangle^2]^{1/2}$ で定義できないのである．$(\sin q)\, u_{\pm j}(q)$ もまた $\mathcal{H}$ の外に出てしまうので，$(\sin q)\, v_0$ も適切でない．そこで上下端を切断した正弦関数を導入し，$\mathsf{S}(\mathsf{q})$ と書こう．

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\mathsf{q})\, \mathsf{u}_m &= (\mathsf{u}_{m+1} - \mathsf{u}_{m-1})/2i, \qquad \forall \quad m \neq \pm j \\ \mathsf{S}(\mathsf{q})\, \mathsf{u}_{\pm j} &= \mp \mathsf{u}_{\pm(j-1)}/2i \end{aligned} \tag{10.84}$$

同様に切断した余弦関数 $\mathsf{C}(q)$ を定義しよう．

$$\begin{aligned} \mathsf{C}(\mathsf{q})\, \mathsf{u}_m &= (\mathsf{u}_{m+1} + \mathsf{u}_{m-1})/2, \qquad \forall \quad m \neq \pm j \\ \mathsf{C}(\mathsf{q})\, \mathsf{u}_{\pm j} &= \mathsf{u}_{\pm(j-1)}/2 \end{aligned} \tag{10.85}$$

演習問題 10.19　$\mathsf{p}_{\pm j}$ を状態 $\mathsf{u}_{\pm j}$ への射影演算子としよう．このとき

$$\mathsf{C}(\mathsf{q})^2 + \mathsf{S}(\mathsf{q})^2 = \mathbb{1} - \tfrac{1}{2}\,(\mathsf{p}_j + \mathsf{p}_{-j}) \tag{10.86}$$

$$[\mathsf{C}(\mathsf{q}), \mathsf{S}(\mathsf{q})] = \tfrac{1}{2}\, i\,(\mathsf{p}_j - \mathsf{p}_{-j}) \tag{10.87}$$

となることを示せ．演算子 $\mathsf{C}(\mathsf{q}) \pm i\,\mathsf{S}(\mathsf{q})$ の性質を論ぜよ．

式 (10.82) と (10.84) から $\mathsf{S}(\mathsf{q})\,\mathsf{v}_0 = (\mathsf{u}_j - \mathsf{u}_{-j})/(2iN^{1/2})$ となるので，

$$\langle \mathsf{S}(\mathsf{q})^2 \rangle = \|\mathsf{S}(\mathsf{q})\,\mathsf{v}_0\|^2 = 1/2N \tag{10.88}$$

が得られる．$N \gg 1$ という物理的に興味のある場合は，いわゆる不確定性 (つまり，標準偏差) $\Delta\mathsf{S}(\mathsf{q}) = (2N)^{-1/2}$ は量子ダイヤルでとるはずだった分解能 $2\pi/N$ よりもはるかに大きい．このことはただ単に $\mathsf{S}(\mathsf{q})$ あるいは $\mathsf{C}(\mathsf{q})$ を測定することがダイヤルの位置を特定する最善の方法ではないことを示しているにすぎない．

もっと有効な方法は 54 ページの式 (3.28) のように，不連続フーリエ変換

$$\mathsf{v}_\mu := N^{-1/2} \sum_{m=-j}^{j} e^{-2\pi i \mu m/N}\, \mathsf{u}_m \qquad (\mu = -j, \cdots, j) \tag{10.89}$$

を使って N 個の直交状態 v_μ をつくることである．基底 u_m と v_μ は相補的といわれる[*37]．これらの間のフーリエ変換は式 (10.54) での連続的な q 表現と p 表現に類似している．

[*37] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 46 (1960) 570.

演習問題 10.20 $\langle \mathsf{v}_\mu, \mathsf{v}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$ そして

$$e^{-2\pi i \mathsf{p}/N\hbar}\, \mathsf{v}_\mu = \mathsf{v}_{\mu+1\ (\mathrm{mod}\ N)} \tag{10.90}$$

となることを示せ．

演習問題 10.21 “ダイヤル演算子” $\mathsf{Q} = \sum \mu\, \mathsf{v}_\mu \mathsf{v}_\mu{}^\dagger$ を定義しよう．これは p に共役な変数の役割を果たせる (q それ自身は性質のよい演算子でないことに注意)．基底 u_m での Q の行列要素はどうなるか? 交換関係 $[\mathsf{Q}, \mathsf{p}]$ はどうなるか? **ヒント**：式 (10.83) に演算子 $x\, d/dx$ を作用させれば，和 $\sum \mu x^\mu$ が計算できる． ⋆

群の縮約

しばしば連続変数を不連続変数で近似したくなることがある．特に数値計算ではそうである．不連続化する一つの方法として，トーラスのトポロジーをもつ共役変数の組 q と p の間の関係式 (10.79) と条件 $\sum J_k{}^2 = J^2$ 付きの角運動量の 3 成分を利用してみよう．量子論で，後者は点スペクトルであり，本質的に不連続である．あいにく J_k からもとの変数 $q = \tan^{-1}(J_y/J_x)$ に戻るのは，この表現が量子論では取り扱いにくいものとなるので，難しい．与えられたポテンシャル中でのエネルギーレベルをしらべるような具体的問題では，**群の縮約**とよばれる[*38]別の方法をとらねばならない．

$j \gg 1$ として J_k の $(2j+1)$ 次元表現を考え，

$$\mathsf{q} := a\, \mathsf{J}_x/\sqrt{j}\,\hbar \qquad \text{および} \qquad \mathsf{p} := \mathsf{J}_y/\sqrt{j}\, a \tag{10.91}$$

を定義しよう．ここで a は長さの次元をもつ定数である (たとえばポテンシャル壁の広がりなど，系の典型的な長さ)．このとき

$$[\mathsf{q}, \mathsf{p}] = [\mathsf{J}_x, \mathsf{J}_y]/j\hbar = i\, \mathsf{J}_z/j \tag{10.92}$$

となる．$\langle \mathsf{J}_z \rangle \simeq j\hbar$ となる $\mathcal{H}$ の部分空間だけを考えると，これは q と p に関する正準交換関係となる．極限操作 $j \to \infty$ は生成子 J_k をもつ回転代数から，q, p, および $\mathbb{1}$ とからなるハイゼンベルク代数への**縮約**とよばれる．

いま考えている $\mathcal{H}$ の部分空間では，変数 q と p は $|\langle \mathsf{q} \rangle| \gg a$ と $|\langle \mathsf{p} \rangle| \gg \hbar/a$ を含む大きな領域をカバーしている．実際，$\delta \mathsf{J}_z := j\hbar - \langle \mathsf{J}_z \rangle$ としよう．($\Delta \mathsf{J}_z$ と混同しないように.) ここで，$\hbar \ll \delta \mathsf{J}_z \ll j\hbar$ なので，

$$\langle \mathsf{J}_x{}^2 + \mathsf{J}_y{}^2 \rangle \equiv j\,(j+1)\,\hbar^2 - \langle \mathsf{J}_z{}^2 \rangle \simeq j\hbar^2 + 2j\hbar\, \delta \mathsf{J}_z \gg j\hbar^2 \tag{10.93}$$

となる．したがって，$|\langle \mathsf{q} \rangle| \gg a$ でもあり，$|\langle \mathsf{p} \rangle| \gg \hbar/a$ でもありうる．これらの値に対する制限は，$\langle \mathsf{J}_x{}^2 + \mathsf{J}_y{}^2 \rangle \ll j^2\hbar^2$ だから，$|\langle \mathsf{q} \rangle| \ll a\sqrt{j}$ と $|\langle \mathsf{p} \rangle| \ll \sqrt{j}\hbar/a$ だけとなる．

[*38] R. J. B. Fawcett and A. J. Bracken, J. Math. Phys. 29 (1988) 1521.

J_z が対角的となる表示で行列 q および p をあらわに書き表そう．それらは 1 対の無次元演算子

$$\mathsf{A}^{\pm} = [(\mathsf{q}/a) \pm i\,(\mathsf{p}a/\hbar)]/\sqrt{2} = (\mathsf{J}_x \pm i\,\mathsf{J}_y)/\sqrt{2j}\,\hbar \tag{10.94}$$

としてまとめられる．$(\mathsf{J}_x \pm i\,\mathsf{J}_y)$ の 0 でない行列要素は

$$(\mathsf{J}_x + i\,\mathsf{J}_y)_{m+1,m} = (\mathsf{J}_x - i\,\mathsf{J}_y)_{m,m+1} = [(j-m)\,(j+m+1)]^{1/2}\,\hbar \tag{10.95}$$

だけとなることを思い出そう．$k = 1,\ 2,\ \cdots\ (\ll \sqrt{j})$ として $m = j - k$ としよう．式 (10.95) の右辺は良い近似で $(2jk)^{1/2}\hbar$ となるので，十分小さな k に対して，

$$\mathsf{A}^{+}_{j-k+1,j-k} = \mathsf{A}^{-}_{j-k,j-k+1} \simeq \sqrt{k} \tag{10.96}$$

となる．これらの行列要素は 140 ページの式 (5.91) の昇降演算子と同じである．したがって式 (10.91) で定義される**有限**行列 q と p は，調和振動子のエネルギー表示での**無限**行列 q と p ほとんど同じ行列要素から始まっていることがわかる．

10.7 コヒーレント状態

波動関数 $\psi(x)$ とそのフーリエ変換 $\tilde{\psi}(p)$ を同時に狭い領域に局在させることはできない．この性質はふつう，量子力学の不確定性関係

$$\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2 \tag{4.54}$$

として知られているが，量子力学に特有なことではない．強度 $f(t)$ をもつ古典的音響信号でも，タイミングとピッチの双方を正確にとることはできない．両者は

$$\Delta t\,\Delta\omega \geq \tfrac{1}{2} \tag{10.97}$$

を満足しなければならない．ここで，

$$(\Delta t)^2 \equiv \int t^2\,f(t)\,dt - \left(\int t\,f(t)\,dt\right)^2 \tag{10.98}$$

であり，$\Delta\omega$ もフーリエ変換 $\tilde{f}(\omega)$ を使って同様に定義される．これはフーリエ変換の一般的性質であって，背後にある物理とは無関係である[*39]．

音楽家なら知っているように (216 ページ参照)，時間と振動数が**近似的**な値しかとれないことは矛盾することではない．量子論でも同様に，位置と波長 $\lambda = h/p$ は，ともに近似的な値をとることができる．たとえば波動関数

$$\psi(x) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}\,\exp[-(x-x')^2/2\sigma^2 + ip'x/\hbar] \tag{10.99}$$

[*39] 式 (10.97) を量子化して時間・エネルギー不確定性関係としようとしてはいけない！時間は量子力学では演算子ではないし，古典力学では力学変数でもない．時間は c 数であり，単なるパラメーターにすぎない．時間の測定は本書の最後の章で議論しよう．

は，位置と運動量が $\langle x\rangle = x'$ と $\langle p\rangle = p'$ であり，分散が

$$\Delta x = \sigma/\sqrt{2} \qquad \text{および} \qquad \Delta p = \hbar/\sigma\sqrt{2} \tag{10.100}$$

の極小波束である．演習問題 4.14 と 10.15 で上記の $\psi(x)$ が中心のずれた調和振動子の基底状態であり，$\Delta x\,\Delta p = \hbar/2$ が厳密に成り立つ最も一般的な波動関数であることを知った．ここでこのガウス型波動関数がヒルベルト空間の非直交かつ**過剰完全**な基底として使える方法をしらべよう．

ベイカー–キャンベル–ハウスドルフの恒等式

準備段階として，有用な恒等式

$$e^{\mathsf{A}}\,e^{\mathsf{B}} \equiv e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}}\,e^{[\mathsf{A},\mathsf{B}]/2} \tag{10.101}$$

を示そう．ただし，

$$[\mathsf{A},[\mathsf{A},\mathsf{B}]] = [\mathsf{B},[\mathsf{A},\mathsf{B}]] = 0 \tag{10.102}$$

が成り立つとする．式 (10.101) の証明は 223 ページの式 (8.29) と同様である．

$$\mathsf{F}(\lambda) := e^{-\lambda\mathsf{A}}\,e^{\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})}\,e^{-\lambda\mathsf{B}} \tag{10.103}$$

とし，$\mathsf{F}(\lambda) = e^{\lambda^2[\mathsf{B},\mathsf{A}]/2}$ となることを示そう．$\lambda = 0$ のときには両辺は明らかに $\mathbb{1}$ に等しい．さらに

$$\frac{d\mathsf{F}(\lambda)}{d\lambda} = e^{-\lambda\mathsf{A}}\left(-\mathsf{A}\,e^{\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})} + (\mathsf{A}+\mathsf{B})\,e^{\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})} - e^{\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})}\,\mathsf{B}\right)e^{-\lambda\mathsf{B}} \tag{10.104}$$

となる．ここで式 (8.29) を

$$\left[\mathsf{B}, e^{\mathsf{C}}\right] \equiv (\mathsf{B} - e^{\mathsf{C}}\,\mathsf{B}\,e^{-\mathsf{C}})\,e^{\mathsf{C}} \equiv \left([\mathsf{B},\mathsf{C}] - \tfrac{1}{2}\,[\,[\mathsf{B},\mathsf{C}],\mathsf{C}] + \cdots\right)e^{\mathsf{C}} \tag{10.105}$$

の形にして利用しよう．$\mathsf{C} \equiv \lambda\,(\mathsf{A}+\mathsf{B})$ とする．$[\mathsf{A},\mathsf{B}]$ が A と B のいずれとも可換なので，式 (10.105) 右辺では第 1 項だけが残り，式 (10.104) は

$$\begin{aligned}\frac{d\mathsf{F}(\lambda)}{d\lambda} &= e^{-\lambda\mathsf{A}}\,[\mathsf{B},\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})]\,e^{\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})}\,e^{-\lambda\mathsf{B}} \\ &= \lambda\,[\mathsf{B},\mathsf{A}]\,e^{\lambda^2[\mathsf{B},\mathsf{A}]/2} = \frac{d\,e^{\lambda^2[\mathsf{B},\mathsf{A}]/2}}{d\lambda}\end{aligned} \tag{10.106}$$

となる．これを解けば $\mathsf{F}(\lambda) = e^{\lambda^2[\mathsf{B},\mathsf{A}]/2}$ となるが，これは $\lambda = 0$ で成り立つので，あらゆる λ でも成り立っている．これがベイカー–キャンベル–ハウスドルフ (BCH) の恒等式 (10.101) の証明である[*40]．

(訳者注)：式 (10.106) の右辺第 2 式以降は以下のように直すべきであろう．

$$\begin{aligned}\frac{d\mathsf{F}(\lambda)}{d\lambda} &= e^{-\lambda\mathsf{A}}\,[\mathsf{B},\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})]\,e^{\lambda(\mathsf{A}+\mathsf{B})}\,e^{-\lambda\mathsf{B}} \\ &= \lambda\,[\mathsf{B},\mathsf{A}]\,\mathsf{F}(\lambda)\end{aligned}$$

[*40] $[\mathsf{A},\mathsf{B}]$ が A および B と交換しない場合には式 (10.101) は展開の第 1 項である．高次項に関しては W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory,* Interscience, New York (1966) p. 368 [Dover からリプリント版が出ている] を参照．

ガウス型波動関数に対するフォック空間定式化

5.6節で多粒子状態を表現する方法としてフォック空間を導入した．真空状態 $\Psi_0 \equiv |0\rangle$ から始め，n 粒子状態をつくるには昇降演算子 $\mathsf{a}^{\pm}$

$$\mathsf{a}^{+}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \text{および} \qquad \mathsf{a}^{-}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{10.107}$$

を使った．これらの定義から $(\mathsf{a}^{-})^{*} = \mathsf{a}^{+}$ と $[\mathsf{a}^{-}, \mathsf{a}^{+}] = \mathbb{1}$ がでてくる．規格化されたフォック状態は

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2}\,(\mathsf{a}^{+})^{n}\,|0\rangle \tag{10.108}$$

となる．

このフォック基底は調和振動子のエネルギー表現にも使える．演算子

$$\mathsf{x} = \sqrt{\hbar/2m\omega}\,(\mathsf{a}^{+} + \mathsf{a}^{-}) \qquad \text{および} \qquad \mathsf{p} = i\,\sqrt{\hbar m\omega/2}\,(\mathsf{a}^{+} - \mathsf{a}^{-}) \tag{10.109}$$

は $[\mathsf{x}, \mathsf{p}] = i\hbar$ を満たす．ハミルトニアン $\mathsf{p}^2/2m + k\mathsf{x}^2/2$ の基底状態は

$$\Psi_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\,e^{-m\omega x^2/2\hbar} \tag{10.110}$$

である．これは $\mathsf{a}^{-}\,\Psi_0 = 0$ を満たす．$\sigma = \sqrt{2}\,\Delta x = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ となることを注意しよう．n 番目のエネルギーレベルは $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ であり，対応する固有状態を $|n\rangle$ と書こう．

ここでガウス波束 (10.99) をフォック状態で書くことができる．この波束をずらしのパラメーターで表示し，$|x', p'\rangle$ と書こう．$e^{-ix'\mathsf{p}/\hbar}$ が x' だけの位置のずらしを表すことを思い出せば，

$$|x', p'\rangle = e^{ip'\mathsf{x}/\hbar}\,e^{-ix'\mathsf{p}/\hbar}\,\Psi_0 \tag{10.111}$$

となる．BCH の恒等式 (10.101) を使えば，この式は

$$|x', p'\rangle = e^{ip'x'/2\hbar}\,e^{i(p'\mathsf{x} - x'\mathsf{p})/\hbar}\,\Psi_0 \tag{10.112}$$

とも書ける．式 (10.112) の右辺の最初の指数因子は関係のない位相因子なので無視できよう．2番目の指数について式 (10.109) のように

$$x' = \sqrt{\hbar/2m\omega}\,(\bar{\alpha} + \alpha) \qquad \text{および} \qquad p' = i\,\sqrt{\hbar m\omega/2}\,(\bar{\alpha} - \alpha) \tag{10.113}$$

と書いて，**複素数**のずらしのパラメーター α を導入すると

$$i\,(p'\mathsf{x} - x'\mathsf{p})/\hbar = \alpha\,\mathsf{a}^{+} - \bar{\alpha}\,\mathsf{a}^{-} \tag{10.114}$$

となる．表現

$$\mathsf{D}(\alpha) := \exp\left(\alpha\,\mathsf{a}^{+} - \bar{\alpha}\,\mathsf{a}^{-}\right) \tag{10.115}$$

はずらしの**演算子**といわれる．こうして，状態 (10.112) は

$$|\alpha\rangle = \mathsf{D}(\alpha)\,|0\rangle \tag{10.116}$$

と書くことができた．これは**コヒーレント状態**とよばれている[*41]．この状態は基底状態 $|0\rangle$ と同じ分散 σ^2 をもつことに注意せよ．異なった σ の値は**スクィージング**という操作によって達成できるが，この操作の量子光学での応用は重要である[*42]．

演習問題 10.22 以下の関係式を証明せよ．

$$\mathsf{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}\, e^{\alpha \mathsf{a}^+}\, e^{-\bar{\alpha}\mathsf{a}^-} \tag{10.117}$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\, e^{\alpha \mathsf{a}^+}\,|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n (n!)^{-1/2}\,\alpha^n\,|n\rangle \tag{10.118}$$

$$\mathsf{D}(\alpha)\,\mathsf{D}(\beta) = e^{(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta)/2}\,\mathsf{D}(\alpha+\beta) \tag{10.119}$$

$$\mathsf{D}(-\alpha) = [\,\mathsf{D}(\alpha)]^* = [\,\mathsf{D}(\alpha)]^{-1} \tag{10.120}$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle = e^{\bar{\alpha}\beta-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2} \tag{10.121}$$

$$|\langle\alpha,\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \tag{10.122}$$

$$\mathsf{a}^-\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{10.123}$$

最後の式はコヒーレント状態の定義として考えられることが多い．

過剰完全基底

フォック状態 $|n\rangle$ は完全正規直交基底を構成する，つまり，$\sum_n |c_n|^2 = 1$ として，任意の状態 ψ は一意的に $\psi = \sum_n c_n\,|n\rangle$ と書ける．ここでコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ も基底として使えることを示そう．この基底は直交せず，過剰完全であるが，それでも関数 ψ に対して $\psi = \int c(\alpha)\,|\alpha\rangle\, d^2\alpha$ という表現が得られる．ただし，

$$d^2\alpha := d(\mathrm{Re}\,\alpha)\; d(\mathrm{Im}\,\alpha) \tag{10.124}$$

である．さらに，許容関数 $c(\alpha)$ に適当な制限を付ければ，この表現は一意的となる．

以下に示した証明ではグラウバーの明快な論文 *41 に従って，ディラックのブラケット記法を使う (77 ページの表 3.1 を参照)．たとえば，射影演算子の和の完全性は $\sum_n |n\rangle\langle n| \equiv \mathbb{1}$ で表される．同様にコヒーレント状態については，

$$\pi^{-1}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha \equiv \mathbb{1} \tag{10.125}$$

---

*41 R. J. Glauber, *Phys. Rev.* 131 (1963) 2766.

*42 *Nonclassical Effects in Quantum Optics*, ed. by P. Meystre and D. F. Walls, Am. Inst. Phys., New York (1991).

であるため，演算子 $\pi^{-1}\,|\alpha\rangle\langle\alpha|$ のセットは式 (9.81) のように POVM をつくる．この恒等式は

$$\int \bar{\alpha}^m\,\alpha^n\,e^{-|\alpha|^2}\,d^2\alpha \equiv \pi\,\delta_{mn}\,n! \tag{10.126}$$

から導けるが，これは $\alpha = re^{i\theta}$, $d^2\alpha = rdrd\theta$ と書けば容易に証明できる．式 (10.118) のコヒーレント状態の定義から

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha = \sum_{mn} |m\rangle \int \frac{\bar{\alpha}^m\,\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\,e^{-|\alpha|^2}\,d^2\alpha\,\langle n| = \pi\sum_n |n\rangle\langle n| \tag{10.127}$$

となるから，容易に式 (10.125) は導ける．

ここで任意の状態 ψ を展開しよう．フォック空間では

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle \equiv \sum_n c_n\,|n\rangle \tag{10.128}$$

となるが，この式から係数が $c_n = \langle n|\psi\rangle$ と定義される．同様に

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle\,d^2\alpha = \frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\sum_n \frac{\bar{\alpha}^n\,e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\,\langle n|\psi\rangle\,d^2\alpha \tag{10.129}$$

となる．ここで式 (10.118) を利用した．複素変数 z を導入し，関数

$$f(z) := \sum_n c_n\,z^n/\sqrt{n!} \tag{10.130}$$

を定義しよう．ただし，$c_n = \langle n|\psi\rangle$ である．この関数は複素 z 平面のあらゆる有限領域で解析的である (**完全関数**とよばれる)．こうして，

$$|\psi\rangle = \pi^{-1}\int |\alpha\rangle\,e^{-|\alpha|^2/2}\,f(\bar{\alpha})\,d^2\alpha \tag{10.131}$$

となる．

逆に，完全関数 $f(\bar{\alpha})$ に対して $c_n = \langle n|\psi\rangle$ と同様な表現を書くことができる．まず式 (10.121) を使えば

$$\langle\beta|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int\langle\beta|\alpha\rangle\,e^{-|\alpha|^2/2}\,f(\bar{\alpha})\,d^2\alpha = \frac{e^{-|\beta|^2/2}}{\pi}\int e^{\bar{\beta}\alpha-|\alpha|^2}\,f(\bar{\alpha})\,d^2\alpha \tag{10.132}$$

となる．次に任意の整数 n に対して $\int e^{\bar{\beta}\alpha-|\alpha|^2}\,\bar{\alpha}^n\,d^2\alpha \equiv \pi\bar{\beta}^n$ となることに注意しよう．これは式 (10.126) と表現 $e^{\bar{\beta}\alpha} \equiv \sum \bar{\beta}^n\alpha^n/n!$ から出てくる．この恒等式のもっと一般的な形は

$$\int e^{\bar{\beta}\alpha-|\alpha|^2}\,f(\bar{\alpha})\,d^2\alpha \equiv \pi f(\bar{\beta}) \tag{10.133}$$

であり，式 (10.132) を使えば，

$$f(\bar{\beta}) = e^{|\beta|^2/2}\,\langle\beta|\psi\rangle \tag{10.134}$$

となる．

演習問題 10.23 $g(\bar{\beta}) = e^{|\beta|^2/2}\langle\beta|\phi\rangle$ とすれば，

$$\langle\phi|\psi\rangle = \pi^{-1}\int e^{-|\alpha|^2}\,\overline{g(\alpha)}\,f(\alpha)\,d^2\alpha \tag{10.135}$$

となることを示せ．ただし，$\overline{g(\alpha)} = e^{-|\alpha|^2/2}\langle\phi|\bar{\alpha}\rangle$ は，一般的には $g(\bar{\alpha})$ と異なることに注意せよ．

演習問題 10.24 あらゆる正の整数 n に対して，

$$\int |\alpha\rangle\,\alpha^n\,e^{-|\alpha|^2/2}\,d^2\alpha \equiv 0 \tag{10.136}$$

となることを示せ．**ヒント：**$\langle m|\alpha\rangle$ を α のべきで展開し，式 (10.126) を使え．

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が一次独立でないという事実にもかかわらず，グラウバー展開 (10.131) は一意的である．それは係数として現れる関数 $f(\bar{\alpha})$ が滑らかな $\bar{\alpha}$ の**完全**関数であることが要請されているからである．たとえば自明な恒等式 $|\beta\rangle \equiv \int |\alpha\rangle\,\delta^2(\alpha-\beta)\,d^2\alpha$ はグラウバー展開では正しくない．基底ベクトルを正しく展開する方法は

$$|\beta\rangle \equiv \pi^{-1}\int |\alpha\rangle\,\langle\alpha|\beta\rangle\,d^2\alpha \equiv \pi^{-1}\int |\alpha\rangle\,e^{\bar{\alpha}\beta-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2}\,d^2\alpha \tag{10.137}$$

である．係数 $e^{\bar{\alpha}\beta-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2}/\pi$ は $\delta^2(\alpha-\beta)$ よりかなり滑らかである．この操作を繰り返せばもっと滑らかな結果が得られるであろうか? 試してみよう．

$$\begin{aligned}|\gamma\rangle &\equiv \pi^{-1}\,e^{-|\gamma|^2/2}\int |\beta\rangle\,e^{\bar{\beta}\gamma-|\beta|^2/2}\,d^2\beta \\ &\equiv \pi^{-2}\,e^{-|\gamma|^2/2}\int\left[\int |\alpha\rangle\,e^{\bar{\alpha}\beta-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2}\,d^2\alpha\right]e^{\bar{\beta}\gamma-|\beta|^2/2}\,d^2\beta\end{aligned} \tag{10.138}$$

β で積分すると，$|\gamma\rangle \equiv \pi^{-1}\,e^{-|\gamma|^2/2}\int |\alpha\rangle\,e^{\bar{\alpha}\gamma-|\alpha|^2/2}\,d^2\alpha$ となるが，これは式 (10.137) の右辺である．つまり，これ以上広がることはない．したがって展開は一意的である．

同様に演算子の行列要素 $\langle\beta|\Omega|\alpha\rangle$ を使って，**演算子**のコヒーレント表示も定義できる．詳細および量子光学の様々な応用についてはグラウバーの論文 *41 および本章末の文献にある．

角運動量コヒーレント状態

式 (10.99) の最小不確定性波動関数を q と p 以外の非可換演算子のセットに拡張する試みは当然であろう．たとえば，角運動量の 3 成分すべてに小さな分散 $(\Delta\mathsf{J}_k)^2$ をもたせたいとしよう．ある全角運動量に対し，これらの分散の和は

$$\sum_k(\Delta\mathsf{J}_k)^2 = \sum_k\langle\mathsf{J}_k{}^2\rangle - \sum_k\langle\mathsf{J}_k\rangle^2 = J\,(J+\hbar) - \sum_k\langle\mathsf{J}_k\rangle^2 \tag{10.139}$$

となる．この表現の最小値を求めるために座標系を回転し，新しい z' 軸をベクトル $\langle\mathsf{J}_k\rangle$ に平行となるようにしよう．そうすると，$\langle\mathsf{J}_{x'}\rangle = \langle\mathsf{J}_{y'}\rangle = 0$ となる．$\langle\mathsf{J}_{z'}\rangle^2$ の最

大値は J^2 である．したがって，任意のベクトル $\langle \mathrm{J}_k \rangle$ に平行な単位ベクトルを $\mathbf{n}$ として，式 (10.139) の分散の和は

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\psi = J\psi \tag{10.140}$$

を満足する状態に対して最小値をとる．この方程式が**角運動量コヒーレント状態**を定義するが[*43,*44]，この状態には

$$\sum_k (\Delta \mathrm{J}_k)^2 = J\hbar = j\hbar^2 \tag{10.141}$$

という性質がある．特に $\Delta\mathrm{J}_{\mathbf{n}} = 0$ であり，また，任意の $\mathbf{n}$ に対する垂直方向について $\Delta \mathrm{J}_\perp = \sqrt{j}\,\hbar/2$ となる．

これらのコヒーレント状態を，$\mathbf{n}$ の極角と方位角を θ，ϕ として，$|\theta,\phi\rangle$ で表そう．$|\theta,\phi\rangle$ は $|0,0\rangle \equiv |j\rangle$ をオイラー角の回転，つまり，z 軸のまわりに ϕ だけ，新しい y 軸のまわりに θ だけ回転することによって得られることに注意しよう．したがって，

$$|\theta,\phi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} |m\rangle \binom{2j}{j+m}^{1/2} \cos^{j+m}(\theta/2)\,\sin^{j-m}(\theta/2)\,e^{-im\phi} \tag{10.142}$$

となる[*45]．ここで $\int |\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ を計算しよう．まず最初に，ϕ について積分すれば，$\int e^{i(m'-m'')\phi}d\phi = 2\pi\delta_{m'm''}$ となり，

$$\begin{aligned}&\int |\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi\\&\quad= 2\pi \sum_{m=-j}^{j} |m\rangle\langle m| \binom{2j}{j+m} \int_0^\pi \cos^{2(j+m)}(\theta/2)\,\sin^{2(j-m)}(\theta/2)\,\sin\theta\,d\theta\end{aligned} \tag{10.143}$$

となる．右辺の積分はベータ関数だから，$2(j+m)!(j-m)!/(2j+1)!$ となる．したがって，

$$\int |\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \frac{4\pi}{2j+1}\sum_m |m\rangle\langle m| = \frac{4\pi}{2j+1}\,\mathbb{1} \tag{10.144}$$

が得られる．後ほど，この関係式は任意の群で成り立つもっと一般的な公式の特別な場合であることがわかる．

演習問題 10.25 以下の式が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}&\langle\theta',\phi'|\theta'',\phi''\rangle\\&\quad= \left[\cos(\theta'/2)\cos(\theta''/2)e^{i(\phi'-\phi'')/2} + \sin(\theta'/2)\sin(\theta''/2)e^{i(\phi''-\phi')/2}\right]^{2j}\end{aligned} \tag{10.145}$$

*43 J. M. Radcliffe, *J. Phys. A* 4 (1971) 313.
*44 P. W. Atkins and J. C. Dobson, *Proc. Roy. Soc. A* 321 (1971) 321.
*45 M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964)p. 110.

$$\left|\langle\theta',\phi'|\theta'',\phi''\rangle\right|^2 \\ = 2^{-2j}\Big[1+\cos\theta'\,\cos\theta''+\sin\theta'\,\sin\theta''\cos(\phi'-\phi'')\Big]^{2j} \equiv \cos^{4j}(\Theta/2) \tag{10.146}$$

ただし，Θ は二つの方向 (θ',ϕ')，(θ'',ϕ'') のなす角である．

角運動量コヒーレント状態は調和振動子コヒーレント状態と同じような性質をもつ[*46]．それは両者が 323 ページで論じた**群の縮約**で関係しているからである．

任意の群のコヒーレント状態

上記の議論は任意の群に一般化できる[*47]．群の性質をもつ N 個のユニタリー行列 U_α の集合 $\mathcal{S}$ を考えよう．つまり，$\mathcal{S}$ には単位行列 $\mathbb{1}$ と任意の要素 $\mathsf{U}_\alpha\in\mathcal{S}$ の逆行列 ${\mathsf{U}_\alpha}^\dagger$，および $\mathcal{S}$ の任意の二つの要素の積が含まれる．

任意の $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$ に対して，状態 $|\psi_\alpha\rangle:=\mathsf{U}_\alpha|\psi\rangle$ を考えよう．和

$$\mathsf{A}:=\sum_\alpha|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|=\sum_\alpha\mathsf{U}_\alpha|\psi\rangle\langle\psi|{\mathsf{U}_\alpha}^\dagger \tag{10.147}$$

は，任意の U_β に対して，積となる．

$$\mathsf{U}_\beta\,\mathsf{A}\,{\mathsf{U}_\beta}^\dagger=\sum_\alpha\mathsf{U}_\beta\,\mathsf{U}_\alpha|\psi\rangle\langle\psi|{\mathsf{U}_\alpha}^\dagger{\mathsf{U}_\beta}^\dagger=\sum_\gamma\mathsf{U}_\gamma|\psi\rangle\langle\psi|{\mathsf{U}_\gamma}^\dagger=\mathsf{A} \tag{10.148}$$

$\mathsf{U}_\gamma=\mathsf{U}_\beta\mathsf{U}_\alpha$ の全集合 (あらゆる $\mathsf{U}_\alpha\in\mathcal{S}$ だが，U_β は固定されている) は N 個の行列を含むので，その和は $\mathcal{S}$ の全要素をとることになるからである．

式 (10.148) からあらゆる U_β に対して $\mathsf{U}_\beta\mathsf{A}=\mathsf{A}\mathsf{U}_\beta$ となる．したがって，行列 U_β が群の**既約表現**ならば，シュールの補助定理によって $\mathsf{A}=c\mathbb{1}$ となる．式 (10.147) のトレースをとれば，$cd=\sum_\alpha\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle=N$ となる．ただし，d は $\mathcal{H}$ の次元である．したがって，

$$\sum_\alpha|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|=(N/d)\,\mathbb{1} \tag{10.149}$$

となる．つまり，行列 $(d/N)\,|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ は式 (9.81) のような正値演算子測度 (POVM) である．

これらの定義は，α に関する不連続和を置き換えるような適切な測度が定義できれば，連続群にも拡張できる．たとえば，U_α を次元数 $d=2j+1$ の通常の回転行列としよう．このとき，$|\psi_\alpha\rangle$ は前に論じたコヒーレント状態 $|\theta,\phi\rangle$ である．この場合，N は $\int\sin\theta\,d\theta\,d\phi=4\pi$ となり，再び式 (10.144) が得られる．

[*46] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, and H. Thomas, *Phys. Rev. A* 6 (1972) 2211.
[*47] A. M. Perelomov, *Comm. Math. Phys.* 26 (1972) 222.

10.8 参 考 文 献

D. Park, *Classical Dynamics and its Quantum Analogues*, Springer, Berlin (1990).

W. Dittrich and M. Reuter, *Classical and Quantum Dynamics: from Classical Paths to Path Integrals*, Springer, Berlin (1992).

これらの本は，この章では論じなかった古典力学と量子力学に関する観点を，多くの側面から比較している．最初の本は多数の演習問題を含んでいるので，独習するには理想的である．

経 路 積 分

R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965) [北原和夫訳,『量子力学と経路積分』(みすず書房，1995)].

L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York (1981).

M. S. Marinov, "Path integrals in quantum theory: an outlook of basic concepts," *Phys. Rep.* 60 (1980) 1.

ウィグナー関数

M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, "Distribution functions in physics: fundamentals," *Phys. Rep.* 106 (1984) 121.

コヒーレント状態

J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam, *Coherent States*, World Scientific, Singapore (1985).

A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer, Berlin (1986).

推 薦 図 書

S. A. Hojman and L. C. Shepley, "No Lagrangian? No quantization!" *J. Math. Phys.* 32 (1991) 142.

著者らは運動方程式がラグランジアン L から導かれたオイラー–ラグランジュ方程式と等価であるときに限って，正準交換関係がその運動方程式と矛盾しないことを証明している．(このラグランジアンは一意的である必要はない.)

I. V. Aleksandrov, "The statistical dynamics of a system consisting of a classical and a quantum subsystem," *Z. Naturf.* 36 a (1981) 902.

これはある部分は古典力学でもあり，またある部分は量子力学的でもある，混成された系を構成しようとする興味深い試みである．量子密度行列の各要素は古典的力学変数に関するリウビル関数となる．運動方程式には同一のハミルトニアンに関する交換関係とポアソン括弧式とが含まれている．規格化は $\int \mathrm{Tr}\,(\rho) dq\,dp = 1$ で不変である．しかし，残念なことに，$\int \rho dq\,dp$ が常に正の演算子であること，あるいは，あらゆる q，p に対して，$\mathrm{Tr}\,\rho \geq 0$ が成立することは保証されていない．したがって，この混成的定式化には矛盾のない物理的な解釈がないようである．

L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1990) Chapt. 15.

R. G. Littlejohn, "The Van Vleck formula, Maslov theory, and phase space geometry," *J. Stat. Phys.* 68 (1992) 7.

11 カオスと不可逆性

11.1 不連続写像

力学問題の多くには解析解がない．場合によっては摂動論のような近似的解法によって満足のいく解が与えられることもあるが，唯一利用できる近似法が数値計算だけである場合もよくある．高速計算機の出現のおかげで数値シミュレーションは使いやすい手段となり，正しく利用すれば非常に信頼性の高い方法であろう．

コンピューターシミュレーションでは特に時間のような連続物理量は不連続なものによって置き換えられる[*1]．そこで当然の成り行きとして，**本質的に**不連続であるが，普通の物理学の法則のいくつかを満たしている力学モデルの性質をしらべてみよう．たとえば，量子力学では，シュレーディンガー方程式によって連続的に時間発展するのではなく，不連続な一連のユニタリー変換となろう．古典力学では写像 $\{q(t), p(t)\} \to \{q(t+\delta t), p(t+\delta t)\}$ が不連続なステップで行われるだろうが，その一つ一つは正準変換であることが要請される．これらの不連続写像は連続的な発展過程を撮った一連のストロボ写真に似ており，不連続写像は連続写像の性質の多くを共有している．この節では量子力学的不連続写像をしらべる準備として古典的な (正準) 不連続力学について話そう．

転送行列

表記を簡単にするため，$2n$ 次元位相空間の点を $\mathbf{r} := \{q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\}$ で表そう．興味があるのは初期条件に小さな摂動を加えたとき軌道 $\mathbf{r}(t)$ が安定であるか不安定であるかという問題である．この問題は小さな変位 $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \epsilon\mathbf{z}$ を考えることでしらべられる．この変位は下の式 (11.6) に従うことがわかる．

(連続的な時間に対する) ハミルトンの運動方程式を

$$\frac{dr_i}{dt} = \sum_j \eta_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j} \tag{11.1}$$

[*1] 時空は，基本的に G をニュートンの重力定数として $\sqrt{G\hbar/c^3} \simeq 1.6 \times 10^{-35}$ m 程度を単位とする不連続量なのだと提唱している人たちもいる．今の話はそのような予想とは無関係である．現在本書の執筆段階まで，満足のできる量子重力理論はない．

としよう．ただし

$$\eta_{ij} = -\eta_{ji} = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

は**シンプレクティック**行列である．小さな変位 $r_i \to r_i + \epsilon z_i$ を考えると，式 (11.1) は ϵ の 1 次のオーダーで

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{jk} \eta_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial r_j \, \partial r_k} z_k \equiv \sum_k M_{ik} \, z_k \tag{11.3}$$

となる．これは変位ベクトル z_k についての**線形**方程式である．一つ一つの軌道に対して別々の行列 $M_{ik}(t)$ が存在することに注意せよ．

演習問題 11.1　行列

$$M_{ik}(t) := \sum_j \eta_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial r_j \, \partial r_k} \tag{11.4}$$

は

$$\sum_i M_{ii} \equiv 0 \qquad \text{および} \qquad \sum_j (\eta_{ij} \, M_{jk} + M_{ji} \, \eta_{jk}) \equiv 0 \tag{11.5}$$

を満たすことを示せ．

線形方程式 (11.3) は原理的には積分できて，

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{S}(t) \, \mathbf{z}(0) \tag{11.6}$$

という結果になる．**転送行列** $\mathbf{S}(t)$ は $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{MS}$, $\mathbf{S}(0) = \mathbb{1}$ を満たす．転送行列は古典力学において，量子力学のユニタリー行列のような役割を果たす．しかしながら，両者の性質には基本的に異なるものもある．

二つの異なる変位 $\mathbf{y}$ と $\mathbf{z}$ を考えよう．位相空間内でこれらが張るシンプレクティックな領域は $\tilde{\mathbf{y}}\boldsymbol{\eta}\mathbf{z}$ である．(ただし $\tilde{\mathbf{y}}$ は $\mathbf{y}$ を転置した行ベクトルを表す.) この領域は運動の定数である，というのは

$$d(\tilde{\mathbf{y}}\boldsymbol{\eta}\mathbf{z})/dt = \tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{M}} \, \boldsymbol{\eta}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{y}}\boldsymbol{\eta} \, \mathbf{Mz} = \tilde{\mathbf{y}} \, (\tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{M}) \, \mathbf{z} = 0 \tag{11.7}$$

だからである．ここで，式 (11.3) と (11.5) を使った．また，チルダ (˜) は転置行列を表す．これより，

$$\tilde{\mathbf{y}}(t)\boldsymbol{\eta}\mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(0) \, \tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\eta}\mathbf{S} \, \mathbf{z}(0) = \tilde{\mathbf{y}}(0) \, \boldsymbol{\eta}\mathbf{z}(0) \tag{11.8}$$

となり，したがって，

$$\tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\eta}\mathbf{S} = \boldsymbol{\eta} \tag{11.9}$$

となる．つまり，転送行列 $\mathbf{S}$ はシンプレクティック群 (シンプレクティック行列 $\boldsymbol{\eta}$ を不変に保つ変換群) に属している．

演習問題 11.2 $\mathrm{Det}\,\mathbf{S}=1$ であること，したがって，位相空間の小さな体積要素は変換 (11.6) のもとで不変であることを示せ．

演習問題 11.3 面積保存の定理は任意の正準変換に対して成立することを示せ． ⋆

シンプレクティック行列の重要な性質は，それらの固有値が λ と λ^{-1} のように対になることである．**証明：**$\mathbf{S}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ としよう．そうするとまた，$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}=\lambda^{-1}\mathbf{v}$ が成り立ち，式 (11.9)(これはまた $\tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}\mathbf{S}^{-1}$ とも書ける) より，

$$\tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\eta}\mathbf{v}=\boldsymbol{\eta}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}=\lambda^{-1}\boldsymbol{\eta}\mathbf{v} \tag{11.10}$$

が得られる．したがって，$\boldsymbol{\eta}\mathbf{v}$ は固有値 λ^{-1} に属する $\tilde{\mathbf{S}}$ の固有ベクトルである．しかし，$\mathbf{S}$ と $\tilde{\mathbf{S}}$ は同一の特性方程式をもっているので，固有値の集合は同一である．それゆえにこれらの固有値はすべて λ と λ^{-1} のように対をなす．

さらに，$\mathbf{S}$ は実行列なので，その**複素**固有値もまた λ と $\bar{\lambda}$ のように対となる．その結果，固有値は単位円上の共役な対をなすか，あるいは $\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}$ とからなる四つ組となる．

周期軌道

ハミルトン方程式 (11.1) の解が $\mathbf{r}(t+T)=\mathbf{r}(t)$ を満たすとき，軌道は周期 T で周期的であるという．この概念は任意の不連続写像に対して拡張できる．非線形変換 $\mathbf{r}\to F(\mathbf{r})$ を考えよう．ここで F は可逆な連続関数であり，そのため近傍の点は近傍の点に写像されるものとする．このとき

$$\mathbf{r}_0 \quad\to\quad \mathbf{r}_1=F(\mathbf{r}_0) \quad\to\quad \mathbf{r}_2=F(F(\mathbf{r}_0)) \quad\to\quad \cdots \tag{11.11}$$

となる．ある特別な $\mathbf{r}_0$ に対してこのシリーズが周期的，つまり $\mathbf{r}_N=\mathbf{r}_0$ となることがある．そのとき $\mathbf{r}_0$ を **N 次の固定点**という．

主として興味があるのは写像 F が**正準変換**の場合である．たとえば，ある指定された時間，あるいはもっと一般的に，軌道 $\mathbf{r}(t)$ が指定された表面 (あるいは高次の多様体) に到着するまでハミルトン方程式 (11.1) を積分したものを $F(\mathbf{r})$ としてもよい．そのような表面は**ポアンカレの断面**とよばれる．$\mathbf{r}_0$ をその断面上の固定点としよう．$F(\mathbf{r}_0)$ は連続だから，同じ面上の近傍の点 $\mathbf{r}_0+\epsilon\mathbf{z}_0$ は，$\mathbf{z}_1=\mathbf{S}\mathbf{z}_0$ として，$\mathbf{r}_0+\epsilon\mathbf{z}_1$ に写像される．ここで行列 $\mathbf{S}$ は完全に周期的である．この行列は一般に $\mathbf{r}_0$ の関数である．面積保存の定理はあらゆる正準変換に対して成り立つので，この行列はシンプレクティック群に属している．

周期軌道の**安定性**は $\mathbf{S}$ の固有値によって決まる．k 回 (つまり，kN ステップ) 後，$\mathbf{r}_0+\epsilon\mathbf{z}_0$ から出発した軌道は $\mathbf{r}_0+\mathbf{S}^k\mathbf{z}_0$ を通過する．$\mathbf{z}_0$ を固有ベクトルの一次結合で

$$\mathbf{z}_0=\sum_{\lambda} c_{\lambda}\,\mathbf{v}_{\lambda} \tag{11.12}$$

と書こう．ただし，$\mathbf{v}_\lambda$ は固有値 λ に属する $\mathbf{S}$ の固有ベクトルである．すると，

$$\mathbf{z}_k = \sum_\lambda c_\lambda \mathbf{S}^k \mathbf{v}_\lambda = \sum_\lambda c_\lambda \lambda^k \mathbf{v}_\lambda \tag{11.13}$$

となる．Λ を $\mathbf{S}$ の最大固有値としよう．Λ が実数ならば，大きな k に対する $\mathbf{z}_k$ の漸近形は $\mathbf{z}_k \to c_\Lambda \Lambda^k \mathbf{v}_\Lambda$ と指数的に増大する．Λ をこの周期軌道に対する**リアプノフ因子**とよぼう．(時間が連続的ならば，ふつう Λ は e^{LT} のように書かれ，L は**リアプノフ指数**という.) より一般的には $\mathbf{S}$ の最大固有値は共役対 $\Lambda e^{\pm i\theta}$ (ただし Λ と θ は実数) となる．この場合，漸近的には $\mathbf{z}_k \to \Lambda^k (c_\Lambda \mathbf{v}_\Lambda e^{ik\theta} + \text{c.c.})$ となるので，この指数的増大は周期的振動によって変調される．これらの場合にはすべて，明らかに軌道は不安定となる．軌道が安定なのはあらゆる $\mathbf{S}$ の固有値が単位円上にあるときに限られるのである．

KAM 多様体

$2m$ 次元の断面上のあらゆる点 $\mathbf{r}_0 + \epsilon \mathbf{z}_k$ は 2 次形式の m 次多様体

$$\tilde{\mathbf{z}} \mathbf{Q}_j \mathbf{z} = 1 \qquad (j = 1, \cdots, m) \tag{11.14}$$

の上に存在することを示そう．図 11.1 には 2 次元断面上 $(m = 1)$ の 1 次の固定点という簡単な場合を例示してある．軌道が安定であれば，点 $\mathbf{z}_0 \ \ldots \ \mathbf{z}_3$ は楕円上にある．不安定固定点の場合は双曲線上にある．

この性質を証明するために，k を任意だが，一定として式 (11.13) を考えよう．λ^k の $2m$ 個の値を列ベクトル x_λ に，$\mathbf{z}_k$ の $2m$ 成分を別の列ベクトル y_μ と書こう．その結果は 1 次変換の形となる．

$$y_\mu = \sum_\lambda A_{\mu\lambda} x_\lambda \tag{11.15}$$

ただし $A_{\mu\lambda}$ は 式 (11.12) の $\mathbf{z}_0$ の展開における $c_\lambda \mathbf{v}_\lambda$ の μ 成分である．式 (11.15) を逆にすれば，A の逆行列を B として，$x_\lambda = \sum_\mu B_{\lambda\mu} y_\mu$ となる．ここで $2m$ 個の λ の

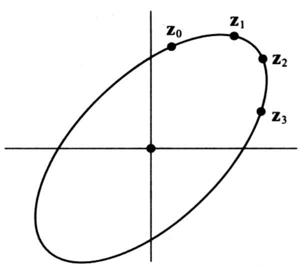


図 11.1　楕円的な固定点 $\mathbf{r}_0$ が 2 次元断面の原点にある．近傍の軌道が連続してとる点 $\mathbf{r}_0 + \epsilon \mathbf{z}_k$ は楕円上にある．

値は，λ と $\lambda' = \lambda^{-1}$ のように対になっていることを思い出せば，$2m$ 個の $x_\lambda \equiv \lambda^k$ もまた対となっており，$x_\lambda x_{\lambda'} = 1$ となる．したがって

$$\forall \lambda \qquad \sum_{\mu\nu} B_{\lambda\mu} B_{\lambda'\nu}\, y_\mu\, y_\nu \equiv \sum_{\mu\nu} (Q_\lambda)_{\mu\nu}\, y_\mu\, y_\nu = 1 \tag{11.16}$$

となるが，これは正に式 (11.14) の別の表現である．

物理的に解釈すると，この結果は一つの**保存則**であり，それは，固定点 $\mathbf{r}_0$ の近傍には一定に保たれる $\mathbf{r}$ (つまり，$\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$) のある関数が存在し，式 (11.14) はこの関数のべき展開の第 1 項を表していることを示す．しかしながら少々注意が必要であり，多様な可能性は一つ一つ区別しなければならない．

安定な (**楕円的**ともいわれる) 固定点については，一連の $\mathbf{z}_k$ のシリーズで閉多様体 $\mathcal{C}$ を稠密に覆うことができる．この多様体は，$\mathbf{z}_k$ が無限小ならば楕円 (あるいは楕円体)，有限ならばもっと複雑な多様体となる．特に，断面が 2 次元面という簡単な場合には，$\mathcal{C}$ は断面を二つに分割する閉曲線となる．初期点 $\mathbf{r}$ が $\mathcal{C}$ によって囲まれた領域内にあるとすれば，連続性から，$\mathbf{r}$ の連続的写像はすべてこの領域の内部に留まる．(**証明**：$\mathbf{r}$ を通り，固定点 $\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}_0 + \mathbf{z}_0$ を結ぶ連続曲線を $\mathcal{R}$ としよう．$\mathcal{R}$ を次々と写像しても，それは $\mathcal{C}$ によって囲まれた領域を離れることなく $\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}_0 + \mathbf{z}_k$ を結んでいることだろう.)

有限な変位 $\mathbf{z}$ という一般的な場合，適切な条件の下でそのような多様体が存在することは KAM の定理[*2–*4]によって保証されている．**可積分**なハミルトン系，つまり，対合する n 個の解析的な運動の定数がある系を考えよう．このとき，$\mathbf{r}$ の軌道は $2n$ 次元位相空間内の n 次元トーラス上にある．そのハミルトニアンが非可積分となるような摂動を受けると，積分定数は n 個以下となろう．(少なくとも 1 個の積分定数，エネルギーは存在する.) KAM の定理は，摂動が解析的，あるいは少なくとも十分多数回微分可能ならば，これらのトーラスは変形されるが，摂動が十分小さな限り，**消滅することはない**と主張している．[これらの性質は，もっと制限をゆるめて，以下に取り上げられているような解析的でない法則による力 (11.20) に対しても明らかに成立しているが，きちんとした証明は存在しない．] 摂動が大きくなってゆくにつれ，次第に KAM 多様体は壊れてゆき，位相空間内で点 $\mathbf{r}$ の運動は n より高次元 (もし，摂動を受けたハミルトニアンの運動の定数がエネルギーだけしか残っていなければ，$2n-1$ 次元まで) の領域にさ迷い出す．

不安定 (あるいは**双曲型**) 固定点の場合にはもっと複雑な状況となる．2 次元断面という最も簡単な場合には，不安定固定点の近傍に双曲線のような連続曲線が存在し，非線形変換 $\mathbf{r} \to F(\mathbf{r})$ によってその曲線はそれ自身へ写像されることもあろう．しかしながら，一般的には写像列 $\mathbf{z}_k$ は KAM 曲線を横切らずにたどり着ける断面上のあらゆる部分をさ迷い歩く．そのような運動は長時間では実質的に予言不可能となるの

[*2] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk* 98(1954) 527.
[*3] V. I. Arnol'd, *Usp. Mat. Nauk* 18 (1963) 13 [英訳：*Russ. Math. Surveys*18 (1963) 9].
[*4] J. Moser, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys.* K1 (1962) 1.

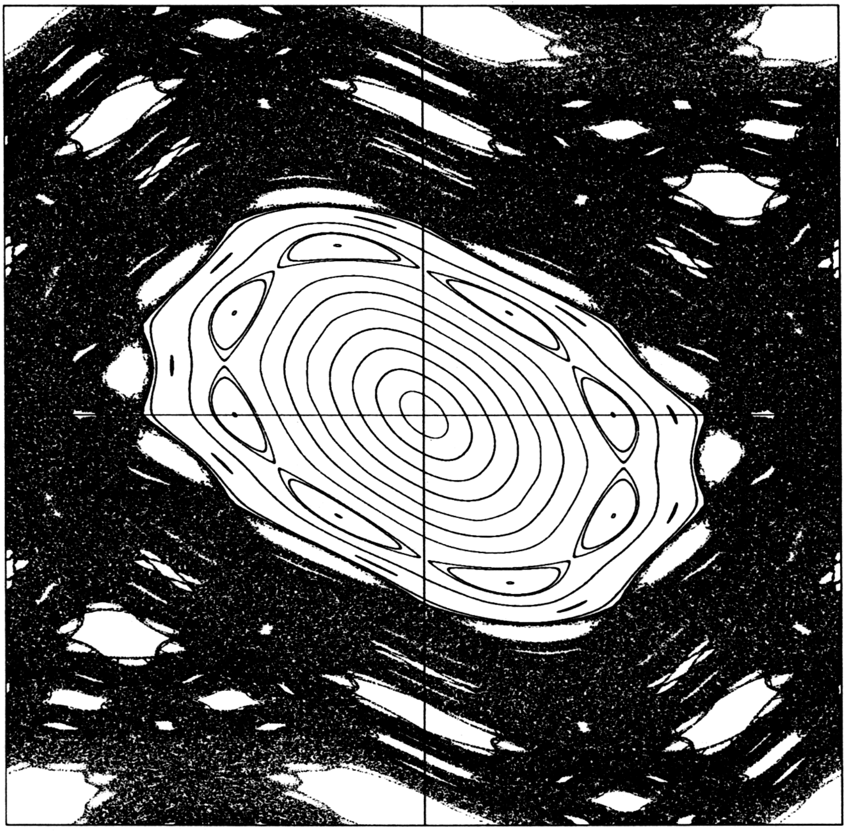


図 11.2　ここには 13 個の正則な軌道と 1 個のカオス的軌道をもつ放物型写像が示されている．縦軸は $-1 < p < 1$，横軸は $-1 < q < 1$ である．正則な軌道は $p = 0$ そして $q = 0.05, \cdots, 0.65$ の点から始まっている．カオス的な軌道は位相空間の大部分を動き回っている．(10^6 個の点が描かれている.)

で，**非正則**，あるいは**カオス的**とよばれる．初期条件のわずかな摂動が，ステップごとに増大し，どんなコンピューターも有限の性能しかないので，信頼のおける方法で新しい点を決定できなくなってしまうからである．この事情は図 11.2 に例示されているが，ここには KAM 曲線とカオス領域が二つとも示されている．

この図には一連の**安定な島**，つまり，いくつかの分離された部分から成る KAM 曲線も示されている．これは図 11.1 に描かれているような写像で，それ自身が周期的 $\mathbf{z}_s = \mathbf{z}_0$ であるため，閉曲線を稠密に覆うことができず，有限個の点しか関係しないような場合に起こる．これらの点の一つ一つは s 位の固定点である．この新しい周期軌道が安定ならば，それらに対応する KAM 曲線は s 個の分離した部分からなる．

事例研究：トーラス上の面積保存写像

コンパクトな 2 次元位相空間 $-1 \leq q,\ p \leq 1$ を考えよう．端点 -1 と 1 は同一とする．不連続写像は二つのステップからなる．つまり，第 1 ステップが

$$q \to q' = q + p \qquad (\text{“mod 2”}) \tag{11.17}$$

で，次に

$$p \to p' = p + f(q') \qquad (\text{“mod 2”}) \tag{11.18}$$

が続く．ここで，“mod 2” は，もし $|q'|$ あるいは $|p'|$ が 1 を越えれば，2 の整数倍を加えるか，引くかして $[-1,1]$ の領域に引き戻すことを意味する．この写像は可逆である．それは $p = p' - f(q')$ とし，次いで $q = q' - p$ とすればよい．

演習問題 11.4　この変換が正準的

$$\frac{\partial q'}{\partial q}\frac{\partial p'}{\partial p} - \frac{\partial q'}{\partial p}\frac{\partial p'}{\partial q} = 1 \tag{11.19}$$

であることを示せ．

簡単な場合として，2 次法則に従う “力”[*5]

$$f(q) = -q\,(1 - |q|) \tag{11.20}$$

を考えよう．これによって導かれる運動の法則を**放物型写像**とよぶ．明らかに点 $q = p = 0$ は，この写像で 1 次の固定点である．その点近傍でこの写像は

$$q' = q + p, \qquad\qquad p' = p - q' = -q \tag{11.21}$$

のように線形化できる．これに対応する転送行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $e^{\pm 2\pi i/3}$ をもつ．

演習問題 11.5　式 (11.21) に対応する KAM 楕円体の形を求めよ．

演習問題 11.6　点 $q = \pm 1,\ p = 0$ は不安定固定点であり，転送行列の固有値が $\lambda = (3 \pm \sqrt{5})/2$ となることを示せ．

図 11.2 には放物型写像の完全な軌道がいくつか示されている．ここで，安定な固定点 $q = p = 0$ 近傍に同心的な楕円 KAM 曲線が予想通り存在している．これらの閉曲線の形は大きさが大きくなるに従ってより複雑となってゆく．時にはそれらは分裂し，大きな位数の固定点に対応した一連の安定な島となる．原点から遠く離れると，位相空間の大部分はカオス領域で覆われるが，そこには空隙もあり，これはその他に安定的な島のあることを表している．

[*5] これは**標準写像** $f = -K\sin(q/\pi)$ の簡易版である．標準写像に関しては膨大な量の文献がある．2 次法則 (11.20) は，付録に示してあるように，最少の計算手段だけで詳細な研究ができるので，ここでは教育的な理由から採用した．

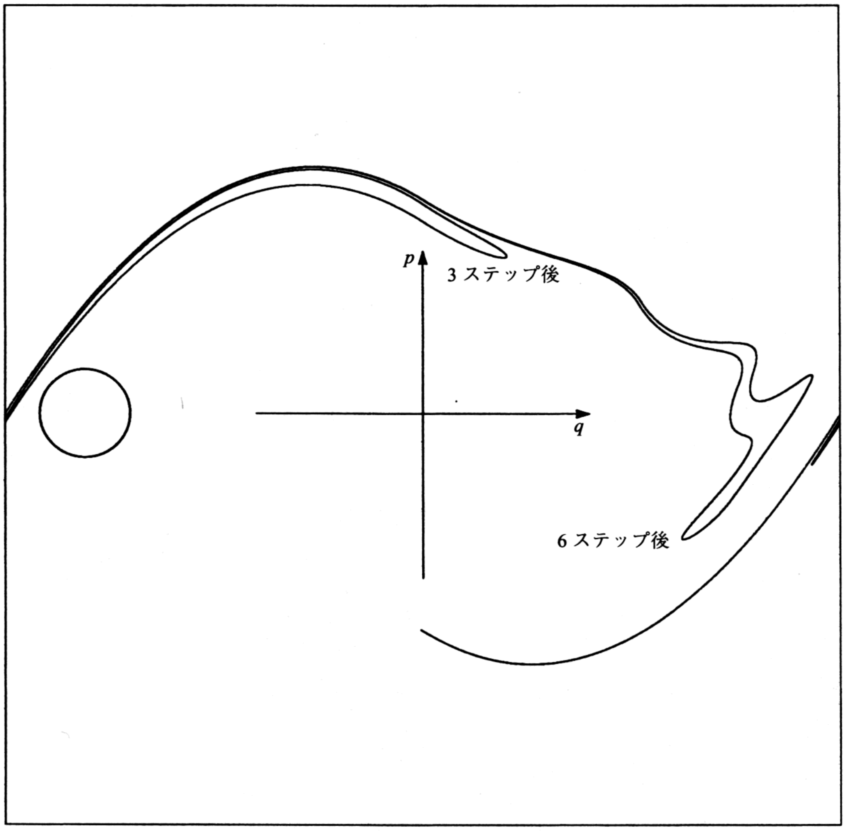


図 11.3 放物型写像のカオス領域内に完全に収まっていた初期の円形領域が，3 ステップと 6 ステップ後にどう変化するかが示されている．この領域の面積は保存されているが，その形は次第次第に変形されていくことに注意せよ．この図を描く PostScript プログラムは付録にある．

カオス領域ではほとんどすべての周期的軌道が $\Lambda > 1$ のリアプノフ因子をもつ．したがって位相空間の**無限小**領域は k ステップの後，($k \gg 1$ の極限で) Λ^k 倍だけ引き伸ばされる．**有限**領域では，Λ も固有ベクトル $\mathbf{v}_\Lambda$ の方向も点ごとに変化するので，もっと複雑な状況となる．このため有限領域は複雑に変形され，図 11.3 と 11.4 に示すように，次第に長く細くなるフィラメントに投影されていく．繰り返しの回数が無限大に近づくにつれて，これらのフィラメントは，KAM 曲線を横切らないでたどり着ける点なら**どんな**点であろうとも，その点に任意に接近して通過する．このような性質は**エルゴード性**とよばれる．(エルゴード的という言葉は全エネルギー面が覆われるときに限られることがある.)

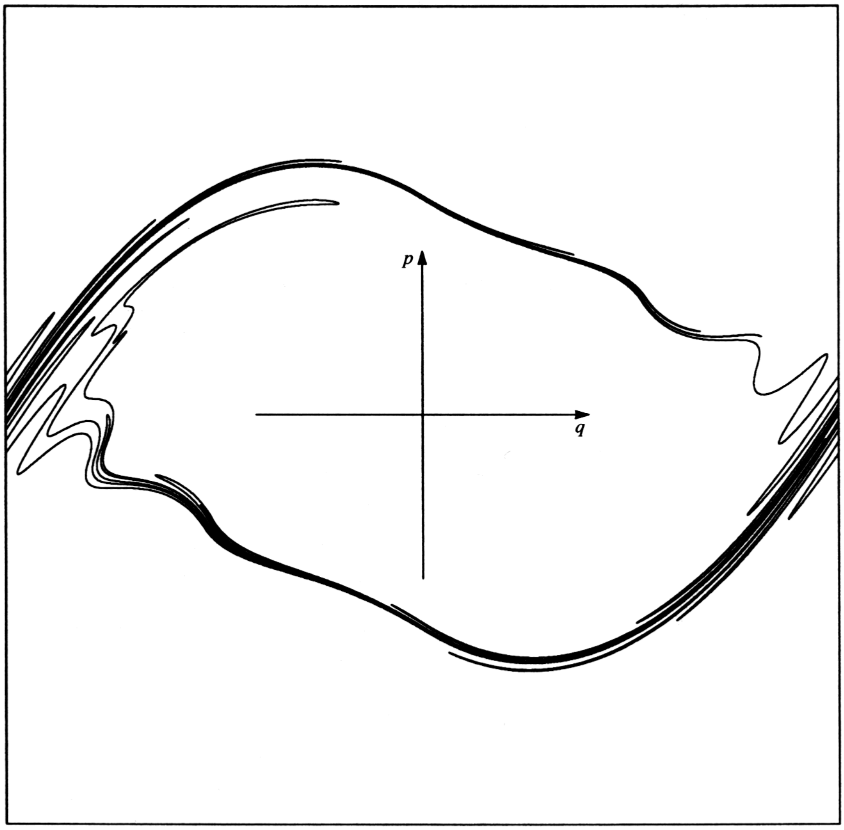


図 11.4　図 11.3 と同じ円領域の放物型写像による 12 ステップ後．さらに多数回実行されると，次第に長く，細くなるフィラメントはカオス領域のあらゆる点の任意の近傍を通過することになる．

エルゴード性と混合

今までの話ではエルゴード性といってもほとんど同義語の繰り返しである．というのは，これらのカオス的なフィラメントによって覆われない領域はどんなものであれ，必ずこの力学的写像で不変な**境界**をもつはずであり，この境界自身が通過することのできない KAM 曲線のはずだからである．しかしながら，**混合**とよばれる重要な，より強い性質があり，それによって重要な結果がもたらされる．

前図の小円のような位相空間内のコンパクト領域 $\mathcal{R}_0$ を考え，それに対していま問題にしている写像を k 回行ったものを $\mathcal{R}_k$ としよう．次々に行う写像 $\mathcal{R}_k$ によって覆われる領域全体の体積に対する $\mathcal{R}_0$ 部分の体積の比を μ とする．このとき，$k \to \infty$ に対して，位相空間で状態がとりうる領域を**固定**すれば，その中で $\mathcal{R}_k$ に属する点によって覆われる領域の割合は同じ値 μ をとる．**粗いスケール**で見れば，位相空間内でとりうる領域は $\mathcal{R}_\infty$ によって**一様に**覆われる．**混合**と**粗視化**という概念は古典的な非可逆性を導くさいに本質的なものである．

11.2　古典物理学における不可逆性

“不可逆性”の直観的意味は，動力学的な時間発展があるとき，その過程は簡単に用意できるが，逆の時間発展をするように準備するのはきわめて困難だ(“不可能”といえる)ということである．たとえば，コップ一杯のぬるま湯をつくるには，沸騰しているお湯に一塊の氷を入れ，1 時間ほど待てばよい．一杯のぬるま湯を用意して，その 1 時間後に沸騰しているお湯に氷が浮かんでいるようにすることは不可能なのだ．

不可逆性に対する**古典的**な説明は，**混合**と**粗視化**という概念にもとづいている．混合の直観的意味は図 11.4 に示されているが，剛体ガス(つまり，突き通らず，回転しない球で，衝突すると弾性的に跳ね返る)のようなある特定の物理系では，$t \to \infty$ の極限で厳密に証明できる性質である．形式的には次のようなことを意味する[*6]．位相空間の中に二つの有限(で**固定された**)領域 V_1 と V_2 を考えよう．それらは運動の定数(あるいは閉じた KAM 多様体)によって力学的に分離されておらず，またその測度はとりうる全位相空間に対する比 μ_1，μ_2 であるとしよう．V_1 におけるリウビル密度 $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ は時刻 t_1 で一様で，$\int f_1\, dV_1 = 1$ であるとする．時間発展すればこの密度は時刻 t_2 で $f_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ となる．このとき，t_2 が t_1 から(未来, あるいは過去で)十分離れており，μ_1 と μ_2 が十分大きければ，V_1 がどこにあろうとも，$\int f_2\, dV_2 \to \mu_2$ となる．その系はもともとどこにあったかという記憶をもたないように思える．μ_1 あるいは μ_2 が小さければ小さいほど，混合が起こるにはもっと長い時間 $|t_1 - t_2|$ が必要となることは明らかである．(ここでは達成できないような数学的な無限大の時間でなく，有限時間だけを考えている.) この混合は**時間的に対称**であることに注意しよう．したがって，これだけでは不可逆性は説明できない．

氷片の例で，V_1 (沸騰しているお湯の中の氷片に対応する位相空間内の領域) は，大雑把に “ぬるま湯” とよんで，その他には何ら規定していない水に対応する V_2 に比べてかなり小さい．というのは，全エネルギーが与えられれば位相空間のほとんどすべての点がこの漠然と定義した水の状態と両立できるようになるので，$\mu_2 \simeq 1$ となるからである．したがって，V_2 に終状態を見いだす確率が $\mu_2 \simeq 1$ なので，極端に小さな非等方性を除けば，**ほとんどの**力学的発展はぬるま湯となる．それにもかかわらず，概念的には時刻 t_2 でぬるま湯を用意し，**その後の**時刻 t_1 で氷片と沸騰しているお湯に分離させることも可能である．しかしながらこれにはきわめて特別な準備が必要である．単なる一杯のぬるま湯ではなく，あらゆる分子の間に厳密な相関をもつものを準備しなければならない．このような準備は位相空間の**極端に**制御された領域の中で行われなければならず，それは図 11.4 よりもはるかに複雑であり，詳細な構造はあまりにも細かなものであり，与えられた**有限な**時間間隔 $t_1 - t_2$ では上に定義されたような混合は実現しないであろう．

ここで**粗視化**ということになる．私たちの不完全な装置では初期状態を位相空間の

---

*6 V. I. Arnol'd and A. Avez, *Ergodic Problems in Classical Mechanics*, Benjamin, New York (1968) pp. 19–22.

非常に小さな，あるいは非常に複雑な構造をもつ領域に押し込めることは不可能なので，有限な時間間隔 $t_1 - t_2$ の後でこのような混合が起こることはない．つまり，時刻 t_2 で系を準備し，有限な時間間隔 $t_1 - t_2$ の後，位相空間の望んでいた領域 V_1 に確実にもって来られるようにはできない．(ぬるま湯から沸騰しているお湯の中の氷となるような) 実現できない時間発展があるのである．

見せ掛けの不可逆性

上の議論は綿密に吟味すべきである．“そのような準備をすることはできない” という主張は**証明**されなければならない．“不可能” という困難さの程度はいかほどのものなのか? (実際にところ，どのようにして困難さを測るのか?) 実験物理学者たちの手腕は決して侮るべきでない．たとえば，スピンエコー[*7,*8]現象では適切な条件の下で，一見不可逆的なふるまいを逆転できるのである．その実験では初期に向きがそろっていた多数のスピンが，ランダムで未知ではあるが，**固定された**内部の場によって**はっきりわかっている**時間 t だけ作用を受け，ランダムな位相となる．そこで，適切なRFパルスをかけると，これらの位相がすべて逆転し，**同じ**時間 t が経つと，すべてのスピンの向きが再びそろう．これはすべてのスピン歳差運動が互いに独立であるために可能となっている．それらの運動方程式は可積分なのである．訓練されていない観測者の目には位相がランダムのように**見える**が，実際には**相関をもっている**のである．秘密の鍵によって暗号化された聖句のようなもので，理解できないように見えるが，鍵を知っている人がいれば暗号が解ける．暗号化によって情報が失われることはなく，近づき難くしているだけである．同様にスピンエコーの場合には，位相を反転し，スピンの向きをそろえるRFパルスの強度が “鍵” となる．

これらの概念に定量的な目安を与えるために，ベネットは**論理的深度**という概念を導入した[*9]．大雑把にいえば，ある物理量の値を得るためにそれを計算できる最小のプログラムで必要とされる基本的な論理ステップ数である．残念なことに論理深度それ自体は計算できない．これは計算可能理論のもっとも基本的な性質，すなわち筋の通らない問題は解くことができないというものである[*10,*11]．さらにその値を出す最小プログラムを長いがもっと有効なプログラムで置き換えると，計算の長さがかなり短くなることが多い．しかしながら，計算時間とプログラムの間で便宜上の交換率を設定すれば，その結果得られる論理深度はほぼ計算機種に依存しないことが示せる [*9]．

演習問題 11.7　カッツのリング模型[*12,*13]では円周上に等間隔で，n 個のボールが並

[*7] E. L. Hahn, *Phys. Rev.* 80 (1950) 580.
[*8] J. Rothstein, *Am. J. Phys.* 25 (1957) 510.
[*9] C. H. Bennett, in *Emerging Syntheses in Science*, ed. by D. Pines, Addison-Wesley, Reading (1987) p. 215.
[*10] A. M. Turing, *Proc. London Math. Soc.* 42(1936) 230.
[*11] M. Davis, *Computability and Unsolvability*, Dover, New York (1982).
[*12] M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Interscience, New York (1959).
[*13] M. Dresden, in *Studies in Statistical Mechanics*, ed. by J. De Boer and G. E. Uhlenbeck, North

べられている．一つ一つのボールの色は白あるいは黒をとることができる．さらに m 個のマーカーが円周上のランダムな位置に固定されている．すべてのボールは時計まわりに等速で運動し，ボールがマーカーを通過するときにその色を変える．初期の色分布が与えられているとしよう．(たとえば，すべてのボールが白としよう.) 問題は長時間経った後での色分布を求めることである．($n \gg m \gg 1$ とせよ.)　★

上の演習問題ではわずかなゆらぎを除けば，直観的には白色と黒色のボールが同数となる定常状態に単調に近づいていくことが期待されよう．実際このような状況は運動の初期に起こる現象である．しかし，これは長続きしない．この系はボールが 2 度マーカーを通過すると，完全に 2 度反転しボールはもとの色に戻るために，明らかに周期的である．ここでもまた，ボールの色は訓練を受けていない観測者の目にとってはランダムのように見えようが，厳密に相関をもっている．暗号化の鍵はマーカーの分布が固定されていることである．

ここで観測者が完全な 1 周期の終り近くの短時間だけ，n 個の黒と白のボールを観測し始めるとしよう．色の分布は初めランダムに見えたが，次第に無秩序から秩序へと発展し，ついにはすべてのボールが白となる．その後，擬ランダム状態へと戻っていく．観測者は面食らい，自分の見たことを非常に小さな**ア・プリオリ**な確率の統計的ゆらぎと解釈しようとするだろう．(もし，一杯のぬるま湯が沸騰しているお湯の中の氷に変わったとすれば，間違いなく奇跡とよばれよう.)

しかし詳細に検討すれば，その観測者は陰謀の犠牲になっていたことを悟るであろう．この一見ランダムな白色と黒色のボールの分布は深い論理的深度をもっている．これは複雑な計算，あるいは長い物理過程を使ってうまく工夫された問題である．この結果をまとめると，まずはじめに準備する者は m 個の擬似乱数を準備し (0 と 2π の間のマーカーの位置)，そして n 個のボール一つ一つについて，擬似乱数が $2\pi k/n$ (k 番目のボールの初期位置) と $2\pi(k+l)/n$ (l ステップ後のその位置) の間にどのくらい落ちるかを勘定しなければならない．$n \gg m \gg 1$ であることに注意すれば，自発的にエントロピーが減少しているように見える偽りの "統計的ゆらぎ" をつくり出すには大量の計算が必要となる．

計算の複雑さ

同様に非可積分力学系の時間発展を考えよう．この系は決定論的であるが，以下でわかるように，現実に運動そのものの持続時間より，その運動を予測する計算量が急激に増大してゆくために，その長時間挙動は実際上**カオス的**となる．したがって有限の性能のコンピュータでは，十分長時間経ったその終状態を，統計的にしか予測できない．偶然というものは最高である．終状態は "ランダム" となり，時間発展は "カオス的" となる．

Holland, Amsterdam (1962) Vol. I, p. 316.

与えられた課題を成し遂げるために要する計算量を定量的に評価したのが**計算の複雑性**である[*14]．この概念は論理的深度と同じように定義されるが，これが (力学的発展のような) **過程**に関連しているのに対し，論理的深度はそのような過程の**最終結果**に関する性質である．たとえば有限系の古典的カオスに関する計算の複雑性を計算してみよう．そのような軌道 $\mathcal{C}$ はいつかはその初期の点の近傍を通過するであろう．したがって，軌道 $\mathcal{C}$ の初期の点の非常に近傍にある点を初期値とする (そしてリアプノフ因子 $\Lambda > 1$ の) 厳密な周期軌道 $\mathcal{O}$ が存在するはずである．これらの軌道の初期値におけるずれを ϵ としよう．これを k 回時間発展させれば，それらのずれは $\Lambda^k\epsilon$ となろう．ただし，線形化された運動方程式 (11.3) が使える程度にずれは小さいとする．逆に $\mathcal{C}$ の最終的な点を ϵ の精度で予言するには，初期値は $\Lambda^{-k}\epsilon$ の精度で決めなければならない．

したがって，計算したい物理的運動の持続時間が長くなれば初期データを規定するために要する数字の個数は**線形的に**増大する[*15]．計算の複雑さはこれだけでも $t \to \infty$ のときに十分 $t\log t$ 以上に増大する．というのは計算には必ず掛け算が入っており，N ビット ($N \gg 1$) の二つの数を掛け合わせるのに (現在知られている) 最良のアルゴリズム [*14] でも $N\log N$ 以上の速さで増大する基本的な論理演算回数を必要としているからである．実際には計算にルンゲ–クッタ法のように反復を続ける操作が含まれれば，計算の複雑さはそれよりもかなり増大する．時間ステップが τ であるとすると，これにともなう数値的な誤差は $a\tau^n$ のようになるのが典型的である．ここで a は (τ ではなく) 方程式系に依存し，n は小さな整数である．t を運動の最後までに残されている時間，T を近傍の軌道 $\mathcal{O}$ の周期として，楽観的に見た場合，これを反復使用するアルゴリズムで見込まれる数値誤差は許容される丸めの誤差，つまり $\Lambda^{-t/T}\epsilon$ と同程度となるはずである．したがって τ としては $\Lambda^{-t/nT}$ のようになることが要請され，全ステップ数は $\Lambda^{t/nT}$ となる．すなわち古典的カオス軌道に関する計算の複雑さは，運動の持続時間に関し**指数関数的に**増大するのである．

確かにこの結論はルンゲ–クッタ型の反復法を使うという仮定のもとに得られたものである．特別な問題についてはもっと有効な方法もありえる．しかしながら，最高速のアルゴリズムによる計算の複雑さが，実際の運動持続時間よりもずっと早く増大すると判明した場合，長時間にわたる予測は不可能であり，その系はカオス的である．

これらの困難は主観的なものか?

ただ困難だからという理由で，ある特定の最終目的の達成ができないと主張する前に，あらゆる注意を払う必要がある．スピンエコーの場合，あるいはカッツ模型では，一見困難のように見えても，詳しく分析すれば容易であることが判明した．同様に図

[*14] G. Brassard and P. Bratley, *Algorithmics: Theory and Practice*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1988).

[*15] ある数の大きさはそれを表すために必要な数字の個数の**指数**関数であることに注意せよ．

11.4で，ある込み入った位相空間領域を考えてみよう．そこでは初期の円形領域は完全に変形され，複雑化されているが，それは**正準**写像で得られたものであるから，その領域を簡単な形とする何らかの正準変数が存在するはずだ．

これらの二つの座標系は正準的には等価だが，物理的観点からは等価でない．**優先する座標系が存在する**，つまり，観測者とその測定装置が簡潔に表現される座標系の存在である．そのような優先する座標系があるとしても，図11.4のような極端に細かな構造をもつ輪郭で囲まれた領域に初期状態を準備することは，形式的には不可能でないにしても**客観的には困難である**．これは，極端な正確さが要請されるため，膨大な量の**情報**を処理し，本当に少なく見積もっても初期データとして多数個の数字を与えなければならないからである．これらの情報を獲得し，そして記録する過程によって，残りの世界のエントロピーを少なくとも同じ量だけ消費する (268ページを参照)．しかし手の届く部分の世界が有限なら，そこにつくり出せるエントロピーには上限があるはずである．つまり，私たちの計算能力は大きいかもしれないが，無限大ではないのである．

したがって，物理的性質には主観的であり，私たちの知識や実験技術に依存するものがあるように見える．上で議論したスピンエコー現象はその例である．ほとんどの人は無秩序 (高エントロピー) 状態にしか見えないであろうが，エントロピーゼロの完全な秩序 (しかし，論理的には深い) 状態と見る人たちもいる．私たちの能力に**何らかの**限界があると認める限り，この主観性は問題でない．厳密な限界は重要でない．物理現象を記述するさい，この限界をどこに設定するかはほとんど無関係である．巨視的系の力学的発展を支配するリアプノフ指数が非常に巨大であり，計算可能性と可逆性という途方もない要請さえ，きわめて短時間に圧倒されてしまうからである．

環境の役割

不可逆性は不可能なものが存在するということを受け入れたことから出てくる．しかしながら，私たちの能力を過小評価すべきではない．ハーンのスピンエコー[*7]実験で示されたように，巨視的な観測者は粗視化された変数にだけ限定されているわけではない[*16]．**運動の反転**が目的なら，運動を反転させるために速度を測定する必要はない．宇宙の弾性的な跳ね返りはそのような問題である．大きな系ではあらゆる速度が反転しているからといって，それがあらゆる速度を測定していることを意味しているわけではない．(実際，巨視的な観測者にとってそんなことは不可能であろう.) したがって，漠然と定義された粗視化にもとづく不可逆性の "証明" は本当は信用できず，もっと詳細に検討する必要がある．

私たちの分解能力に限界がなく，かつ実験的に有限なアルゴリズムで規定される状態が準備できるとしても，それでも不可逆性は起こりうる．(すでに量子重ね合わせの原理を導入するとき，そのような楽観的な仮定をしている．49ページ) 1人の観測者

[*16] J. M. Blatt, *Prog. Theor. Phys.* 22 (1959) 745.

の能力に基本的な制限のあることは性質の違うものである．その人の観測は宇宙の**有限な**部分に限定せざるをえない．乗り越えられない困難というのは大きく複雑な系を扱わざるを得ないことから生じるのではない．むしろ限定されているが，完全には孤立していない系の場合に困難が現れるのである *[16]．

物理系は，望めばいくらでも他から孤立化でき，外部世界の影響を任意の低レベルまで下げるのは単なる技術力の問題だとよくいわれる．この主張が誤っていることを示すために，しばらくの間この外部世界を私たちが完全にわかっているものとし，考慮している系にどのような影響を与えるか，しらべてみよう．

外部世界は，運動方程式にとって付加的な自由度のように見え，もとの系の自由度と弱く結合している．結合が非常に弱ければ，内部自由度と外部自由度の間の**大局的**なエネルギーの移行は無視してもよい．(たとえば，超伝導電流は人間のスケールでは "無限の" 時間，流れ続けることが明らかにされている.) しかしながら，**カオス系**の**微視的**で詳細なふるまいは，外部世界との弱い結合から，巨視的変数が大局的な平衡に近づくよりもはるかにすばやく影響を受けることがわかる*[16]．したがって，微視的な運動は，巨視的なスケールで不可逆性が明白となるよりもはるかに前に予言不能となる．

巨視的な系の "外部世界" は，その入れ物の壁だけでなくその壁を越えたあらゆる物も含んでいることに注意しよう．そしてまた，系を記述しているハミルトニアンに具体的には取り入れられていないすべての**内部**自由度も含まれている．たとえば，コマの状態を質量中心座標とその向きに関する 3 個のオイラー角で記述すると，一つ一つの原子に関するその平衡点からのずれなどのような未知で "関連のない"，残りの自由度は外部世界の部分，あるいはいわゆる**環境**である．"関連した" 自由度が関連しない部分から**厳密に**分離されていない限り (たとえば，厳密なエネルギー保存則によって)，それらは真に孤立しているわけではない．もしハミルトンの運動方程式が可積分でないなら，その系はカオス的であり，長時間にわたる予測は，統計的予測を除けば，不可能となる．

カオス的力学をつくるには，自由度が大きい必要はない．時間によらない系では非線形結合をしていれば，**2 個**で十分であり，ハミルトンの運動方程式によって軌道が KAM トーラス上に拘束されることはない．はっきりした形で時間に依存する系，あるいは不連続写像では，前の図に示されていたようにカオス的挙動が得られるのには 1 自由度で十分である．

11.3 古典カオスの量子論的な見方

これらの議論は量子系に拡張できるであろうか? 10.1 節で，古典力学法則と量子力学の法則には基本的な違いがあるので，対応原理は信頼のおける指針とはならないことがわかった．たとえば，二つの古典カオスが隣り合う点から出発すると，その間の

"距離" は大雑把には指数関数的に増大する[*17]．これに対し，二つの量子力学的状態が初期にほとんど同一 (つまり，それらの内積が非常に 1 に近い) ならば，永久にほぼ同一のままに留まる．ハミルトニアンの時間発展は**ユニタリー**写像であり，内積は保存されるからである．

しかしながら，量子状態は古典的位相空間の代表点に対応したものではない．量子状態の古典版は**リウビル確率密度**である．最初二つのリウビル関数が隣り合った 2 点の近傍にいくぶんは重なり合って集中しているとすれば，その重なり合いはクープマンの定理 (10.5 節参照) によって，時間的に不変である．一つ一つのリウビル関数は記述できないほど変形されて行き，粗いスケールでは最終的に全位相空間が完全に混合されたように見えてしまう．しかし，図 11.5 に示すようにこれらの関数の重なりは一定のままである．

とにかく与えられた別々のリウビル確率密度が，その後，時間発展して曲がりくねった領域を覆うが，どの程度重なり合うかということには誰も興味がない．実験的に意味のある質問は，時間に依存する各領域が位相空間のある**固定された**領域とどの程度重なり合うか，ということである．この答はわかっている．粗いスケールで見れば最終的確率密度は等質となり，大雑把には初期条件には依存しない．これが**混合**とよばれる性質である．

さて量子論に戻って，リウビル密度の量子版であるウィグナー関数

$$W(\mathbf{q},\mathbf{p}) := (\pi\hbar)^{-N}\int \rho(\mathbf{q}-\mathbf{r},\mathbf{q}+\mathbf{r})\, e^{2i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\, d\mathbf{r} \tag{10.56}$$

も混合するかどうかをしらべてみよう．

答は否定的である．$W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ はリウビル関数よりはるかに滑らかな時間発展をする[*18]．特に $\hbar$ より小さなスケールの曲がった下部構造には発展できない．したがって，ウィグナー関数 $W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ は上に定義されたような混合という性質をもたない．

数値シミュレーションによって，量子力学はカオスの出現を抑制する一般的傾向にあることが経験的にわかっている．量子波束は，古典軌道が強くカオス的であるときでも局在化したままの状態でありうる．というのは，KAM 面の破れは限られた領域から始まるのであり，広範囲な古典的流れはそのままにしておく一方で，これらの面のうち残ったものが実際上，量子波束の障壁として作用するからである[*19]．同様な現象はハミルトニアンに時間依存した摂動を含むような簡単なモデルにも現れる[*20]．これらのモデルは 1 自由度系であり，物理系の状態が非摂動ハミルトニアンのたった 1 個，あるいは高々少数個のエネルギーレベルだけで準備できる．量子系が時間発展しても，

---

*17 位相空間には計量構造がないため，"距離" という言葉を引用符でくくった．位相空間はシンプレクティク構造であり，2 点間の計量距離は正準不変でない．しかしながら，その系がカオス的なら，$ds^2 = d\mathbf{q}^2 + d\mathbf{p}^2$ のような，二つの軌道間の任意ではあるが**固定**した無限小 "距離" は (軌道の広がりよりもはるかに小さい限り) 指数的に増大する．

*18 H. J. Korsch and M. V. Berry, *Physica D* 3 (1981) 627.

*19 R. C. Brown and R. E. Wyatt, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 1.

*20 G. Radons and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 1691.

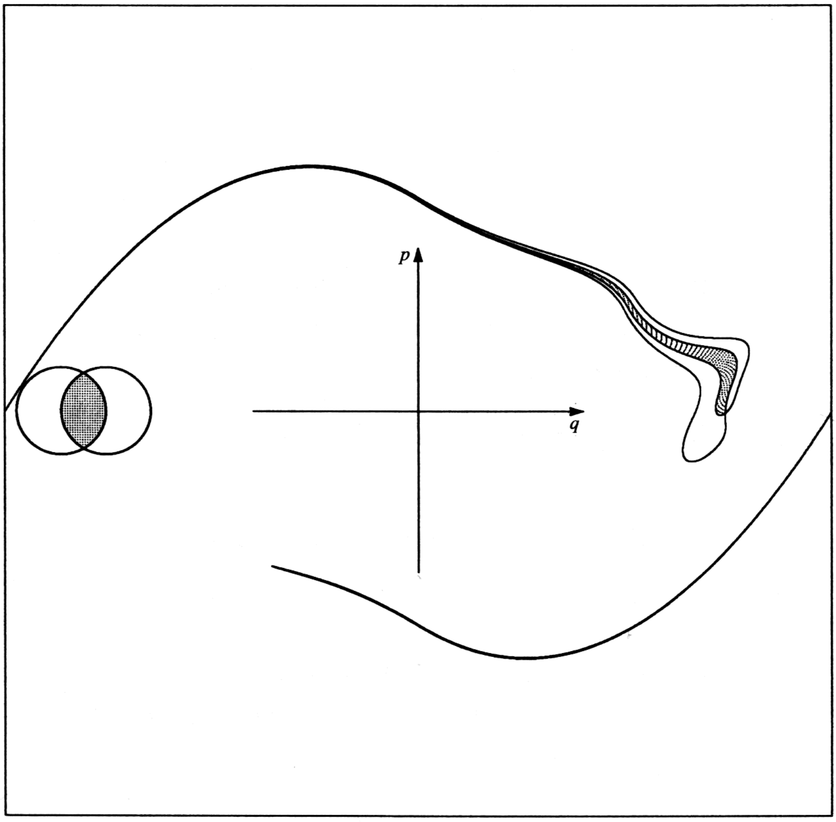


図 11.5 クープマンの定理の説明．二つの初期円領域が放物型写像，式 (11.17)–(11.20) によって 5 回写像されている．重なった部分の面積は保存されている．共通領域にあった規則的な点の配列が，面積保存の写像によってどのように変形されているかを注意して欲しい．

数はもう少し多くなるにしても近傍のエネルギーレベルだけしか含まないので，エネルギーは狭い領域に "局在" したままになることがわかる．(KAM 多様体の痕跡が残っていなくても，対応する古典的な時間発展はカオス的であり，古典的エネルギーは際限なしに拡散し，増大する.)[*21] このエネルギー "局在" のために，量子運動は**ほとんど周期的**となり，一つのスペクトルしかもたない，つまり時間に依存しないハミルトニアンの場合のように，初期状態が繰り返し再現する[*22]．ここで奇妙なことは，ポアンカレ・サイクルと同じように[*23]，途方もない長時間後になって完結する再現それ自体でなく，量子系はどんな長時間後であろうとも，有限な仕事量で正確に計算できるという事実である．あらゆることが予言可能なのである．偶然となるものは何もない．

[*21] S. Fishman, D. R. Grempel and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 509.
[*22] T. Hogg and B. A. Huberman, *Phys. Rev. A* 28 (1983) 22.
[*23] L. S. Schulman, *Phys. Rev. A* 18 (1978) 2379.

古典的カオス系の量子シミュレーション

このことから奇妙なパラドックスが示唆される[*24]．ハミルトンの方程式を数値積分して古典的カオス軌道を計算するのではなく，むしろ，古典的ハミルトニアンを (任意に小さいが，有限な値の $\hbar$ で) 標準的な方法で量子化し，シュレーディンガー方程式を積分することによって，小さな波束の運動を追跡できるのではないか? たとえば，太陽と惑星，それに惑星の衛星，そしてすべての小惑星を正確にわかっている一定質量の質点と仮定し，これらの古典的質点を最適な大きさのガウス波束で置き換えれば，数兆年間にわたる太陽系の時間発展を積分できてしまう．これはハミルトンの方程式を直接積分するよりも ($t \to \infty$ では) 複雑な仕事とはならないのではなかろうか?

演習問題 11.8　1 トンの質量の量子拡散 $\sqrt{\hbar t/m}$ が 1 ミクロンに等しくなる時間はいかほどか?

時間依存するシュレーディンガー方程式を積分する標準的な方法は，

$$\mathsf{H}\,\mathsf{u}_n = E_n\,\mathsf{u}_n \tag{11.22}$$

を解いて，H の固有値と固有関数を計算することである．ただし，この系は有限で，ハミルトニアンは離散的スペクトルをもつと仮定した．このとき，$c_n = \langle \mathsf{u}_n, \psi(0)\rangle$ として初期状態を

$$\psi(0) = \sum_n c_n\,\mathsf{u}_n \tag{11.23}$$

と展開すれば，

$$\psi(t) = \sum_n c_n\,\mathsf{u}_n\,e^{-iE_nt/\hbar} \tag{11.24}$$

が得られる．この結果は古典的なものとは本質的に異なる．1 個の式によって任意の時刻 t での完全解が与えられ，ステップごとに数値積分するという犠牲を払う必要はない．計算の複雑さは時間とともに指数的に増大しないのである．式 (11.24) の位相が意味をもつためには，E_n の誤差が $\hbar/t$ よりもはるかに小さくなければならない．したがって，E_n の有効数字は t に関して**対数的に**増加しなければならない．これは多くの数値計算が必要となることを意味するが，その増加は指数的よりも $\log t$ のようにきわめて遅い．

ここで，式 (11.24) は**無限**個の和であり，文字通りにとれば，$t = 0$ ですら，この方程式を解くには無限大の仕事量を要するという反論があるかもしれない．もし解析的に解くことができないなら，実際このことは，すでに式 (11.22) のところでいえることである．解析的に解けるのは可積分系の場合だけである．しかし，式 (11.23) と (11.24) の和は途中で**切断**できる．その理由は，これらの和は**収束**し，誤差をいかに小

[*24] A. Peres and L. S. Schulman, *J. Phys. A* 21 (1988) 3893.

さくとろうとも有限項の和で表せるからである．そこで，$\psi(0)$ を

$$\psi'(0) = \sum_n{}' c_n \, \mathsf{u}_n \tag{11.25}$$

で置き換える．ただし，$\sum'$ は**有限**個の項に関する和を表す．同様に

$$\psi'(t) = \sum_n{}' c_n \, \mathsf{u}_n \, e^{-iE_n t/\hbar} \tag{11.26}$$

を定義する．もし，$\psi'(0)$ が真の初期状態 $\psi(0)$ に非常に近いとすれば，ユニタリティのおかげで，$\psi'(t)$ も真の終状態 $\psi(t)$ に非常に近い．

したがって，次のようなむしろ奇妙な結論になる．古典軌道に対し，もし，長時間後に位相空間の小さな領域に到着するような初期条件はどうなるかとしらべようとすると，その解に関する計算の複雑さは t とともに指数関数的に増大する．一方，**量子状態**を，時間 t 後に，それが位相空間の**同一の**小さな領域の局在している波束となるように決めようとすると，計算の複雑さは膨大だが，時間 t よりはゆっくりと増大する．

残念ながら，このような逃げ口上では何の得にもならない．というのは最終的な波束を与える初期状態は，それ自体小さな波束ではなく，とりうる位相空間全体に広がっているようなものだからである．全持続時間 t の古典軌道を純粋に量子論的にシミュレーションしたいなら，L を (近傍の周期軌道の) リアプノフ指数として，大きさ $\Delta\mathsf{q} \sim e^{-Lt}(\Delta\mathsf{q})_{\text{final}}$ と $\Delta\mathsf{p} \sim e^{-Lt}(\Delta\mathsf{p})_{\text{final}}$ の波束から始めなければならない．したがって，**最終的な**不確定さが一定な場合には，初期の $\Delta\mathsf{q}\,\Delta\mathsf{p}$ は e^{-2Lt} のようにとらなければならず，このため $\hbar$ でなく，t とともに e^{-2Lt} のように減少する偽の $\hbar$ を使わねばならない．

その結果，一定のエネルギーに対して $\hbar$ が小さければ小さいほどエネルギーレベルの密度が大きくなるため，式 (11.26) の和に含まれる状態数は増加する．実際，自由粒子の場合，並進不変の量子状態数は単に，f を自由度として，古典的位相空間を大きさ $(2\pi\hbar)^f$ の細胞に分割すればよい[*25]．滑らかなポテンシャルに束縛されていたり，そのようなポテンシャルによって相互作用している粒子の場合でも，$\hbar \to 0$ の極限では，全エネルギーと比べてポテンシャルがかなり変わるような距離よりもあらゆる波長がはるかに小さくなるので，(細胞を数える) 同様なアルゴリズムが漸近的には正しくなる．したがって，粗視化された状態密度 $\rho(E)$ は一定のエネルギー E に対して $\hbar^f$ のようにふるまう．詳しく分析すると [*24]，少なくとも古典的な問題と同じリアプノフ指数をもつ場合，式 (11.26) に必要な項数は t について指数関数的に増大することがわかっている．

したがって，上に与えられた (計算の複雑さが実際に持続している運動の時間よりも速く増加するという) 意味で “カオス” という言葉を使いたいなら，固定された $\hbar$ と離散的なエネルギースペクトルをもつ**純粋な**量子系は絶対にカオス的でない．それに対し，古典的カオス系に対応原理を成立させたいとするなら，t を運動の全持続時間

[*25] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, New York (1965) p. 358.

として，e^{-2Lt} のように減少する偽の $\hbar$ を使ってあらゆることをしなければならない．重要なのは最初に $t \to \infty$ とするか，$\hbar \to 0$ とするかどちらの極限をとるかを決めることである[*26]．$\hbar$ を一定にしておく場合には，$S \simeq \int pdq$ を古典軌道の作用として，$\log(S/\hbar)/L$ のオーダーの有限時間で対応原理は破綻するであろう．

11.4 量子写像

古典動力学の場合とちょうど同じように，厳密な証明が利用できないときには直観を補完するために数値計算が必要となる．**量子写像**は一連のユニタリー変換によって構成されるが，その系に古典極限が存在するときには古典的正準変換に対応できよう．たとえば，標準写像 (11.17) および (11.18) は，それぞれ

$$\mathsf{U}_1 = e^{-i\mathsf{p}^2/2\hbar} \qquad \text{および} \qquad \mathsf{U}_2 = e^{-iV(\mathsf{q})/\hbar} \tag{11.27}$$

によって生成される．U_2 に出てくる“ポテンシャル” $V(q)$ は $f(q) = -dV/dq$ で定義される．全体の変換は $\mathsf{U} = \mathsf{U}_2\mathsf{U}_1$ となる．

最も簡単な場合では，同じユニタリー変換 U が限りなく繰り返される．(特に，時間に周期的なハミルトニアンの場合，その全周期に対応する.) この場合，ちょうど時間に依存しない系のエネルギーレベルを求めるためにそのハミルトニアンを対角化するように，U を

$$\mathsf{U}\,\mathsf{v}_m = e^{-i\phi_m}\,\mathsf{v}_m \tag{11.28}$$

と対角化するのが便利である．実数の位相 ϕ_m は**擬似エネルギー**とよばれ，固有ベクトル v_m は完全正規直交系を張る (演習問題 3.22 を参照)．したがって，$\mathsf{P}_m = \mathsf{v}_m\mathsf{v}_m^\dagger$ を U の m 番目の固有状態への射影演算子として $\mathsf{U} = \sum e^{-i\phi_m}\,\mathsf{P}_m$ と書ける．t を整数として t 回繰り返すと，

$$\psi \;\to\; \mathsf{U}^t\,\psi = \sum_m e^{-i\phi_m t}\,\mathsf{P}_m\,\psi = \sum_m e^{-i\phi_m t}\,\langle \mathsf{v}_m, \psi\rangle\,\mathsf{v}_m \tag{11.29}$$

となる．

ユニタリー行列の摂動論

式 (11.28) の具体的な解は使えなくとも，U が有限次元のユニタリー行列 U_0 とほんのわずかだけしか違わず，U_0 についてはその固有値 $e^{-i\phi_{0m}}$ と固有ベクトル v_{0m} がわかっている場合があろう．そのようなときには，$e^{i\mathsf{K}} = \mathsf{U}_0^\dagger\,\mathsf{U}$ によってエルミート行列 K が定義でき，摂動

$$\mathsf{U}_0 \;\to\; \mathsf{U} = \mathsf{U}_0\,e^{i\lambda\mathsf{K}} \tag{11.30}$$

[*26] J. M. Robbins and M. V. Berry, *J. Phys. A* 25 (1992) L961.

の効果を λ のべき展開で

$$\begin{aligned} e^{i\lambda \mathsf{K}} &= 1 + i\lambda\,\mathsf{K} + \cdots \\ \phi_m &= \phi_{0m} + \lambda\,\phi_{1m} + \cdots \\ \mathsf{v}_m &= \mathsf{v}_{0m} + \lambda\,\mathsf{v}_{1m} + \cdots \end{aligned} \tag{11.31}$$

のように取り扱えると仮定してみよう．λ の 1 次の項は，

$$\mathsf{U}_0\,(i\mathsf{K}\,\mathsf{v}_{0m} + \mathsf{v}_{1m}) = e^{-i\phi_{0m}}\,(-i\phi_{1m}\,\mathsf{v}_{0m} + \mathsf{v}_{1m}) \tag{11.32}$$

となる．左から $\mathsf{v}_{0n}^\dagger$ を掛け，$\langle \mathsf{v}_{0n}, \mathsf{v}_{0m}\rangle = \delta_{mn}$，そして

$$\mathsf{v}_{0n}^\dagger\,\mathsf{U}_0 = (\mathsf{U}_0^\dagger\,\mathsf{v}_{0n})^\dagger = (e^{i\phi_{0n}}\,\mathsf{v}_{0n})^\dagger = e^{-i\phi_{0n}}\,\mathsf{v}_{0n}^\dagger \tag{11.33}$$

であることを思い起こせば，

$$e^{-i\phi_{0n}}\Big(i\mathsf{K}_{nm} + \langle \mathsf{v}_{0n}, \mathsf{v}_{1m}\rangle\Big) = e^{-i\phi_{0m}}\Big(-i\phi_{1m}\,\delta_{mn} + \langle \mathsf{v}_{0n}, \mathsf{v}_{1m}\rangle\Big) \tag{11.34}$$

が得られる．ただし，$\mathsf{K}_{nm} = \langle \mathsf{v}_{0n}, \mathsf{K}\mathsf{v}_{0m}\rangle$ である．ここで縮退していない場合だけを考えよう．$n = m$ のときには，式 (11.34) から，エネルギーシフト

$$\phi_{1m} = -\mathsf{K}_{mm} \tag{11.35}$$

が求まる．$n \neq m$ のときには，

$$\langle \mathsf{v}_{0n}, \mathsf{v}_{1m}\rangle = i\mathsf{K}_{nm}/[e^{i(\phi_{0n}-\phi_{0m})} - 1] \tag{11.36}$$

が得られる．このままでは $\langle \mathsf{v}_{0m}, \mathsf{v}_{1m}\rangle$ が決まらない．まず v_m の規格化によって，$\langle \mathsf{v}_{0m}, \mathsf{v}_{1m}\rangle$ の実部は 0 でなければならないことがわかる．また v_m の位相を選ぶことによって虚部も常に 0 とすることができる．したがって，いつでも $\langle \mathsf{v}_{0m}, \mathsf{v}_{1m}\rangle = 0$ とおくことができる．

演習問題 11.9 ϕ_m に対する 2 次の補正が，

$$\phi_{2m} = -\tfrac{1}{2}\sum_{n\neq m} |\mathsf{K}_{nm}|^2\,\cot[(\phi_{0n} - \phi_{0m})/2] \tag{11.37}$$

となることを示し，$\langle \mathsf{v}_{0n}, \mathsf{v}_{2m}\rangle$ の値を求めよ． ⋆

11.5 カオス的量子運動

カオス (すなわち，予言不可能性) は運動方程式の解が初期データのわずかな変化に対してきわめて鋭敏であるときに発生する．したがって，外部の制御できない擾乱によってもカオスは起こりうる．古典カオス系では初期データの誤差と外部擾乱にもとづく誤差とは本質的な違いはないが，量子力学では事情が異なる．力学法則は**ユニタリー発展**

$\psi_t = \mathsf{U}\psi_0$ であり，摂動状態と非摂動状態間の内積は一定である．$\langle\psi_t, \psi'_t\rangle = \langle\psi_0, \psi'_0\rangle$．初期状態を準備するさいの小さな不完全さは**発達しないのである**．

しかしながら，量子物理でも，巨視的環境の影響からミクロな量子系を完全に孤立させることは不可能である．言い換えれば，真のハミルトニアン H がわからないのである．唯一，わかっているのは理想化された H_0 だけであり，それは不完全にしか制御できていない環境による小さな摂動 V だけ H とは違うとしよう．そのような場合には，対応する古典系が**正則**ならば，量子運動 $\psi_0 \to \psi_t$ に対して V はわずかしか影響を与えないとしても**もっともらしい**．これに対し，対応する古典系がカオス的であれば，終状態 ψ_t は小さな V によっても大きな影響を受けるであろう．したがって，V がわからなければ，長時間経った後の状態は予言できなくなる．このもっともらしいシナリオは半定量的な議論によって支持されているが*27，それによれば対応する古典系がカオス的な量子系では摂動論が破綻する，つまり，収束しないということが予言されている．

この破綻は以下のような理由にもとづく．摂動展開では，摂動の各次数ごとに，V のべきが上がり，状態に関する和も，もう一つ多くなる．たとえば，エネルギーレベルに対する 3 次の摂動は*28，

$$E_n^{(3)} = \sum_k{}' \sum_m{}' \frac{V_{nm}V_{mk}V_{kn}}{(E_m - E_n)(E_k - E_n)} - V_{nn}\sum_m{}' \frac{|V_{nm}|^2}{(E_m - E_n)^2} \tag{11.38}$$

である．正則系とカオス系の本質的な違いは次のことである．前者には (古典的運動の不連続な定数に対応する) **選択則**があり，その結果ほとんどの行列要素 V_{mn} は 0 となる．(10.1 節で論じたように，対応する古典極限があるようなしかるべき V の場合には 0 となる.) 一方，カオス系では選択則はなく，V_{mn} は乱数のようにふるまう．したがって，状態に関する和は，ランダムウォークのようになり，N を和の項数として，摂動級数の次の項との比はほぼ $(N\langle|V_{mn}|^2\rangle)^{1/2}/E$ となる．これはヒルベルト空間の次元のオーダーである．この評価で，$\langle|V_{mn}|^2\rangle$ という記号はいろいろな要素 V_{mn} に関する 2 乗平均を表し，E はこの系の典型的なエネルギーである．

したがって，有限な N の場合，“典型的な” 行列要素 V_{mn} に対して摂動級数が収束するためには，$E/\sqrt{N}$ というオーダーの制限を加えなければならない．半古典極限 $(N \to \infty)$ では，任意の有限な V に対し摂動級数は**常に発散してしまう**．次に簡単なモデルをしらべるが，それは古典版では正則領域とカオス領域の双方があり，量子版では，**有限次元の**ヒルベルト空間で記述でき，したがって，状態の和をとるさいに勝手な切断をとる必要はない．

---

*27 M. Feingold and A. Peres, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 591.
*28 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon, Oxford (1965) p. 132.

事例研究：ツィストと回転の力学

このモデルの力学変数は3個の角運動量 J_k である．この運動は式 (10.4) で与えられる z 軸のまわりのツィストと，その後の y 軸のまわりの 90° 回転である．全体の J は一定で，ある決まった値をもつ．したがってユニタリー発展は

$$\mathsf{U} = e^{-i\pi \mathsf{J}_y/2\hbar}\, e^{-i\alpha \mathsf{J}_z{}^2/2J\hbar} \tag{11.39}$$

で生成される．この系はハーケ，クスとシャーフによって詳細にしらべられ[*29]，彼らによって“キックされるコマ”と命名された．(指数関数の $\mathsf{J}_z{}^2$ は対応する古典系の剛体回転でなくトーション(ねじれ)を生成するので，本当はコマでない.)

このユニタリー変換に対応する古典版は，ベクトル $\mathbf{J}/J$ によって張られる単位球の面積保存写像である．この“ツィストと回転”には正則領域とカオス領域があり，それらが3個の離散的対称類に属していることがわかる．(そのうちの一つだけについて，詳細な数値計算を示す.) 式 (11.39) のパラメーター α の値が 3.0 から 3.0003 まで変わるとき，その効果を見るのがここでしらべたいことである．これらの数値は，この模型が摂動論の成立する限界の近くにあるように選んだ．直観的に期待されるように，古典的位相空間の正則領域に局在されている量子状態はこの小さな摂動に敏感でないことがわかる．これに対して，古典的カオス領域に広がっている量子状態は，α のわずかな変化に強く影響される．

単位球の正則領域とカオス領域

単位球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上での写像列

$$\begin{aligned} x' &= z \\ y' &= x\,\sin(\alpha z) + y\,\cos(\alpha z) \\ z' &= -x\,\cos(\alpha z) + y\,\sin(\alpha z) \end{aligned} \tag{11.40}$$

を考えよう．これらの写像の結果を以下の図に示すが，面積を保存したまま球を xz 面上に射影している．(紙面上の) R と $r^2 := x^2+z^2 = 1-y^2$ との関係は $R^2 := 2(1-|y|)$ とする．極の近傍では $R \simeq r$ であり (ほとんどひずみがない)，赤道の近傍では $R \simeq \sqrt{2}\,r$ となる．赤道近傍の面積要素は偏角方向に $\sqrt{2}$ 倍だけ広げられ，($ds = r\,d\phi \to R\,d\phi$ となるから) 動径方向は $\sqrt{2}$ だけ圧縮されている．

図 11.6 は $\alpha = 3.0$ のときのツィストと回転写像で生成された**単一の軌跡** (10^5 個の点) を示している．8個の“禁止”領域以外は，球のほとんどの部分をカオス軌道が通過しており，8個の領域は明らかに写像の正則領域に対応している．これらの正則領域は以下の図に示すように 1，2，および 4 位の固定点のまわりにある．高位の固定点も

[*29] F. Haake, M. Kús, and R. Scharf, *Z. Phys. B* 65(1987) 381.

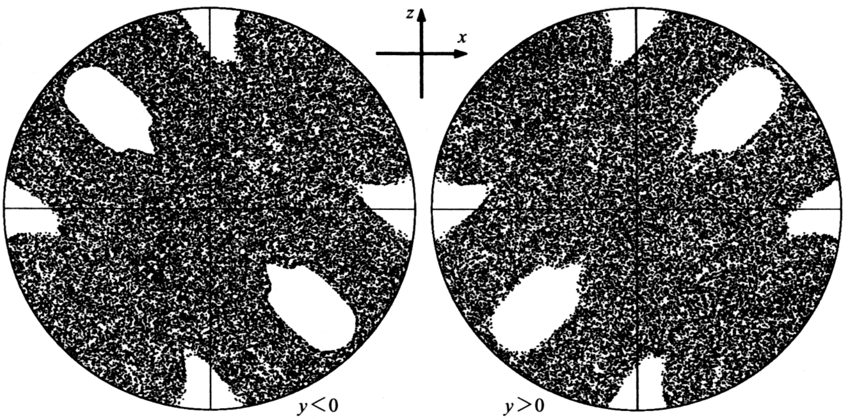


図 11.6 単一の軌道 (10^5 個の点) が 8 個の正則領域以外の単位球の大部分を覆っている.

あるが，それらのつくる正則領域はほとんど見られず，あまりにも小さく重要でない.

($\alpha = 3.0$ のとき) 1 位の固定点は 2 個あるが，それらは方程式 $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ を解いて求められ，

$$x_1 = z_1 = \pm 0.6294126, \qquad y_1 = 0.4557187 \tag{11.41}$$

となる. これらの固定点近傍から出発する軌道は全球をカオス的にさ迷うことはない. 図 11.7 に示すように，それらは不変 KAM 曲線間に留まるように制限されている. 各固定点は y 軸のまわりの 180° の回転で互いに入れ替わることに注意しよう. この回転を R_y と書くことにする.

$x'' = x$, $y'' = y$, $z'' = z$ を解けば，1 個の 2 位の固定点

$$x_2 = -z_2 = \pm x_1, \qquad y_2 = -y_1 \tag{11.42}$$

が得られる.

この結果を近傍の KAM 曲線と一緒に図 11.8 に示す. この固定点を x 軸のまわりに 180° 回転すると (これ以降 R_x で表す)，1 位の固定点の**対が二つとも**同時に得られることに注意しよう. 異なる 2 種類の運動様式を関係づけるこの性質は**動力学的対称性**とよばれる *29.

最後に，

$$x_4 = \pm 1,\ 0, \qquad z_4 = 0,\ \pm 1, \qquad y_4 = 0 \tag{11.43}$$

にある 4 位の固定点を図 11.9 に示す. これらの点は明らかに R_y と R_x について対称である.

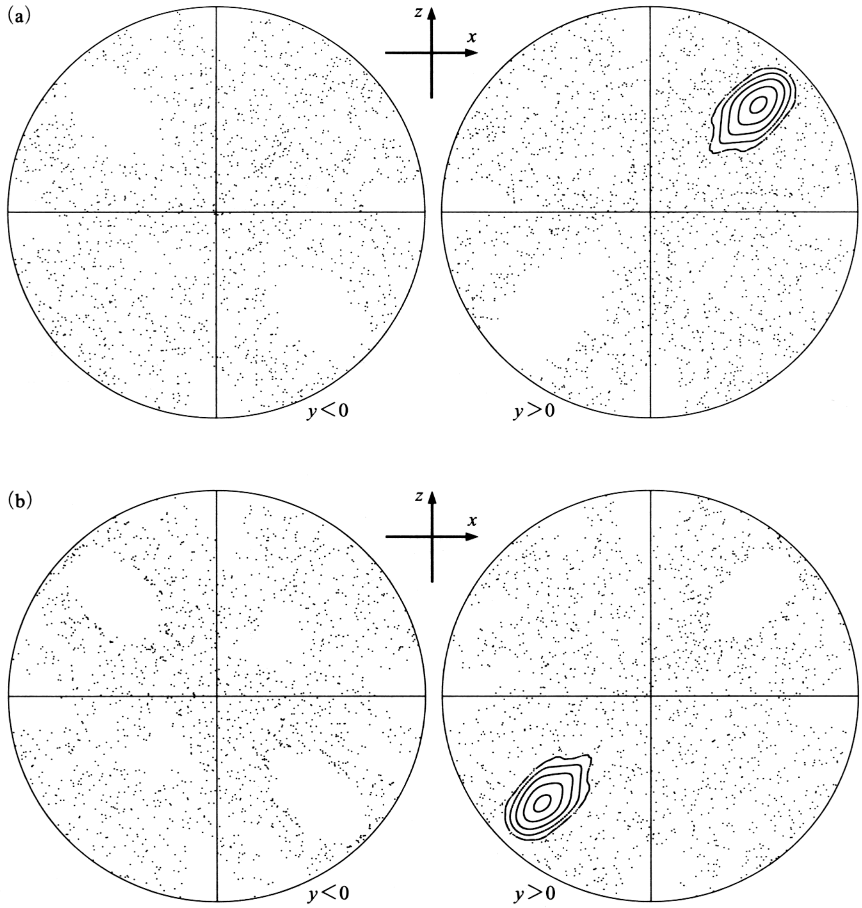


図 11.7 KAM 曲線によって囲まれている 2 個の 1 位の固定点. (a) $x_1 = z_1 > 0$; (b) $x_1 = z_1 < 0$.

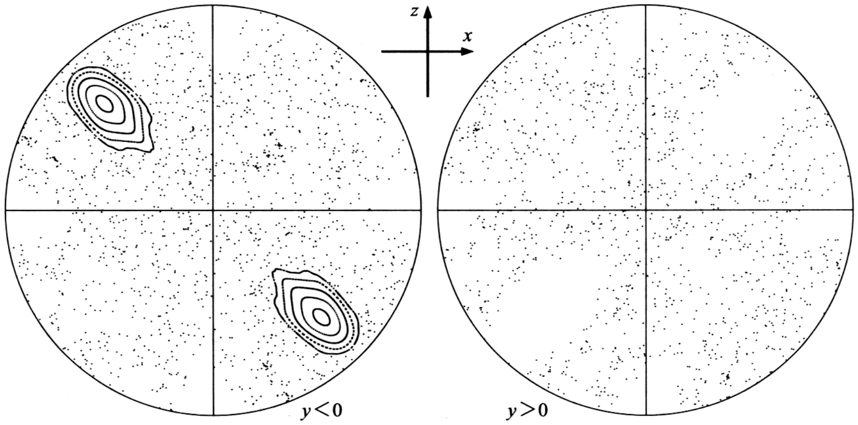


図 11.8 KAM 曲線によって囲まれた 2 位の固定点

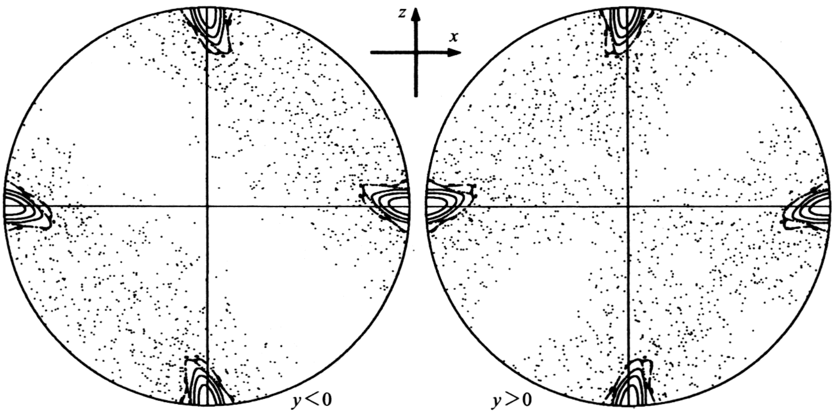


図 11.9　4 位の固定点

いままでは一つ一つの**軌跡**，つまり，点から点への写像を考えてきた．より一般的な方法はリウビル密度の写像であり，教訓的な洞察が新たに得られる．各領域 dA に (正，あるいは負にもなりうる) 無限小の “質量” ρdA が与えられていると考えよう．さらにこの質量がツィストと回転写像で**保存される**と仮定すると，$dA' = dA$ であるから，その密度は**線形**則

$$\rho'(x', y', z') = \rho(x, y, z) \tag{11.44}$$

に従う．写像 (11.40) は連続なので，近傍の点は近傍の点へ写像され，その結果，小さな塊は常に (いくつかの分割された塊にではなく) **1 個の塊**に写像される．特に，隣り合う二つの KAM 曲線の間の領域はそれ自身に写像される．このことから二つの閉じた KAM 曲線間で ρ が一定であるようなリウビル関数は，任意の面積保存写像のもとで**不変**に保たれることがわかる．これらの不変なリウビル密度は，これまで議論してきた固定点の一般化となっている．

ここで考えられたモデルでは，不変的であるかないかに関わらず，リウビル密度は R_y および R_x (y 軸と x 軸のまわりの 180° 回転) に対する挙動によって，ツィストと回転写像の 3 個の不変**対称類**に分類される．たとえば，$\rho = F(x^2, y^2, z^2, xyz)$ がその 4 個の引数について 1 価関数であるとすれば，この ρ は R_y および R_x に対して偶関数であり，式 (11.40) によって同一のタイプに属する別の関数に写像される．同様に，$\rho = yF(x^2, y^2, z^2, xyz)$ という形の関数は R_y に対して偶，R_x に対して奇であり，式 (11.40) によって同じタイプの関数に写像される．たとえば，関数 $\rho = y$ は

$$y \to y' = x \sin(\alpha z) + y \cos(\alpha z) = y \left[\cos(\alpha z) + \frac{xyz}{y^2} \frac{\sin(\alpha z)}{z} \right] \tag{11.45}$$

なので，この性質をもつ．

表 11.1　リウビル関数の対称類

R_y	R_x	関数の形
偶	偶	$\rho = F(x^2, y^2, z^2, xyz)$
偶	奇	$\rho = yF(x^2, y^2, z^2, xyz)$
奇		$xF_1(x^2, y^2, z^2, xyz) + zF_2(x^2, y^2, z^2, xyz)$

要約すると，任意の $\rho(x, y, z)$ は，それぞれが表 11.1 にあげた対称類の一つに属する 3 個の項の和として書ける．量子波動関数も同じ対称性によって類別されるが，これは驚くべきことではない．

量子ツィストと回転写像

無次元変数 $\mathsf{j}_k := \mathsf{J}_k/\hbar$ を導入すると，

$$\mathsf{U} = e^{-i\pi \mathsf{j}_y/2}\, e^{-i\alpha {\mathsf{j}_z}^2/2j} \tag{11.46}$$

となる．ただし，j は整数あるいは半整数，j_k は $2\,j+1$ 次元の既知の数値行列である．j_z が対角的となる表示を選ぶのが便利であり，その行列要素を $m = j, \cdots, -j$，固有ベクトルを $|m\rangle$ で表す．この場合，式 (11.46) のツィスト演算子も対角化される．90° 回転演算子

$$\mathsf{Q} = e^{-i\pi \mathsf{j}_y/2} \tag{11.47}$$

は，具体的には

$$Q_{mn} = \frac{(-1)^{n-m}}{2^j} \binom{2j}{j-n}^{1/2} \binom{2j}{j+m}^{-1/2} \sum_k (-1)^k \binom{j-n}{k} \binom{j+n}{k+n-m}$$

のように与えられる[*30]．

上に古典レベルで議論した 3 個の対称類は量子版でも自然に再登場する．まず，$\mathsf{R}_y = \mathsf{Q}^2$ を考えよう．j_z 表示でその行列要素は

$$(\mathsf{R}_y)_{mn} = (-1)^{j-m}\, \delta_{m,-n} \tag{11.48}$$

となる [*30]．これから $\mathsf{R}_x = \mathsf{R}_y \mathsf{R}_z$ の行列要素は $(-1)^j \delta_{m,-n}$ となる．以下では偶数の j だけに注目しよう．3 個の対称類に対する適切な基底を表 11.2 に与えておく．*ee*, *oo* および *oe* という記号は，まず，最初の対称類に対しては，それに属するベクトルが偶数の $|m\rangle$ だけであり，かつ，変換 $|m\rangle \to |-m\rangle$ のもとで偶であることからきている．その他の対称類でも同様である．

[*30] E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, New York (1959) p. 167.

表 11.2　3 個の対称類の正規直交基底

類	R_y	R_x	基底　$(m=1,\ldots,j/2)$	次元
ee	偶	偶	$\lvert 0\rangle$　および　$(\lvert 2m\rangle+\lvert -2m\rangle)/\sqrt{2}$	$j/2+1$
oo	偶	奇	$(\lvert 2m-1\rangle-\lvert 1-2m\rangle)/\sqrt{2}$	$j/2$
oe	奇	$(\lvert 2m\rangle-\lvert -2m\rangle)/\sqrt{2}$　および　$(\lvert 2m-1\rangle+\lvert 1-2m\rangle)/\sqrt{2}$		j

この新しい基底で書くと，U 行列 (11.46) は大きさ $j/2+1$, $j/2$, および j の対角ブロックに分割される．その 3 個の不変部分空間それぞれは互いに独立である．以下に報告するのは，構造が最も簡単な oo 基底 (R_y 偶，R_x 奇) の場合に行われた数値計算である[*31]．結果が他の部分空間で定性的に違いがあるという理由はない．これらの計算は $j=120$, 500，そして，最終的には 1600 に対して行われた．直観的に見れば，大きな j に対しては古典力学に似た量子力学が期待される．(少なくとも，"然るべき"量子状態の集合を適切に選べばそうなるはずである.) しらべられた性質の中には j が 120 を越えるとそれほど変化しないものもあったが，その他は $j=1600$ を使う必要があった．

さらに議論を進めるために有効な二つの概念を導入しよう．一つは状態の**広がり**

$$\Delta|\mathsf{j}_z| := [\langle {\mathsf{j}_z}^2\rangle - \langle|\mathsf{j}_z|\rangle^2]^{1/2} \tag{11.49}$$

である．一つの対称類に属する任意の状態に対し，$\langle \mathsf{j}_z\rangle \equiv 0$ だから，単に j_z よりもむしろ $|\mathsf{j}_z|$ を使わねばならないことに注意しよう．

$$\psi = \sum_{m=1}^{j/2} c_m\,(|2m-1\rangle - |1-2m\rangle)/\sqrt{2} \tag{11.50}$$

で表される oo 類の状態 ψ に対して初歩的な計算を実行すれば，

$$\Delta|\mathsf{j}_z| = 2\,[\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2]^{1/2} \tag{11.51}$$

となる．ただし，$\langle m^k\rangle := \sum_m |c_m|^2 m^k$ である．ψ の広がりは $|c_1|^2 = |c_{j/2}|^2 = 0.5$ のときに最大となり，その値は $(j/2)-1$ となる．同様に，$\Delta|\mathsf{j}_x|$ および $\Delta|\mathsf{j}_y|$ も定義できるが，これらは，U の固有状態について新たな情報を付け加えることはない．

もう一つの有用な概念は完全正規直交基底 u_μ に関する状態 ψ の**エントロピー**である．このエントロピーは次のように定義される．まずはじめに与えられた状態 ψ の中にある基底ベクトルの相対的重み

$$p_\mu := |\langle \mathsf{u}_\mu, \psi\rangle|^2 \tag{11.52}$$

[*31] A. Peres, in *Quantum Chaos*, ed. by H. A. Cerdeira, R. Ramaswamy, M. C. Gutzwiller, and G. Casati (World Scientific, Singapore, 1991) pp. 73–102.

を計算する．この p_μ の物理的意味は確率である．したがって，表現

$$S := -\sum_\mu p_\mu \log p_\mu \tag{11.53}$$

を “エントロピー” とよぶのは自然である．S の定性的な意味は e^S が ψ の表現の中に “識別可能な程度に含まれている” 基底ベクトルの数となるということである．このような関係から “エントロピー” という言葉が適切なのである．それは状態 ψ で準備した量子系の集合に対して基底 $\{\mathsf{u}_\mu\}$ に関する最大の量子検証を実行すれば，そのとき環境に開放される平均的な熱力学的エントロピーが実際に S となるはずだからである．

摂動を受けた写像

この力学系が小さな摂動を受けたときの応答をしらべてみよう．もとの (非摂動) 系はツィストパラメーターが $\alpha = 3.0$ であり，

$$\mathsf{U}\,\mathsf{v}_n = e^{-i\phi_n}\,\mathsf{v}_n \tag{11.54}$$

を満たすユニタリー行列 U で記述されていると仮定しよう．oo 対称類の状態にある ψ だけを考えるならば，ここで実際に使われなければならない行列 U は式 (11.46) で与えられるもとの行列の oo ブロックだけになる．しかしながら，簡単のために同じ記号 U を使うことにしよう．

摂動系はもとの系に比べ，ツイストパラメーターだけが異なっていて $\alpha' = 3.0003$ である．この系は

$$\mathsf{U}'\,\mathsf{w}_\mu = e^{-i\phi_\mu}\,\mathsf{w}_\mu \tag{11.55}$$

を満たす行列 U' で記述される．固有位相 ϕ_m と ϕ_μ，そして対応する固有ベクトル v_m と w_μ を区別するために異なるアルファベット (ローマ文字とギリシャ文字) を使った．摂動が十分小さくない限り，U の固有状態と U' の固有状態の間に 1 対 1 の対応を期待する理由はないからである．実際にこれがこの問題の難点なのである．そのような 1 対 1 対応が摂動論の基本的仮定なのである．言い換えれば，摂動論の有効性を検証するには，一つ一つの非摂動基底 v_n が摂動を受けた基底 w_μ に関し，**小さなエントロピー**をもっているかどうかをしらべればよい．

$j = 1600$ のときのこれらのエントロピー

$$S_m = -\sum_\mu |\langle \mathsf{w}_\mu, \mathsf{v}_m\rangle|^2 \log |\langle \mathsf{w}_\mu, \mathsf{v}_m\rangle|^2 \tag{11.56}$$

を図 11.10 に示す．oo 部分空間の 800 の固有状態の中からほぼ 700 の固有状態は 1 のオーダーのエントロピー (この値は特に重要な意味をもつわけではない) をもっているので，それらの e^S は 1 に近くはなく，その結果，これらの状態に対しては**摂動論が成立しない**．これらの固有状態は微小な変化 $\alpha \to \alpha'$ に対してきわめて敏感であり，摂

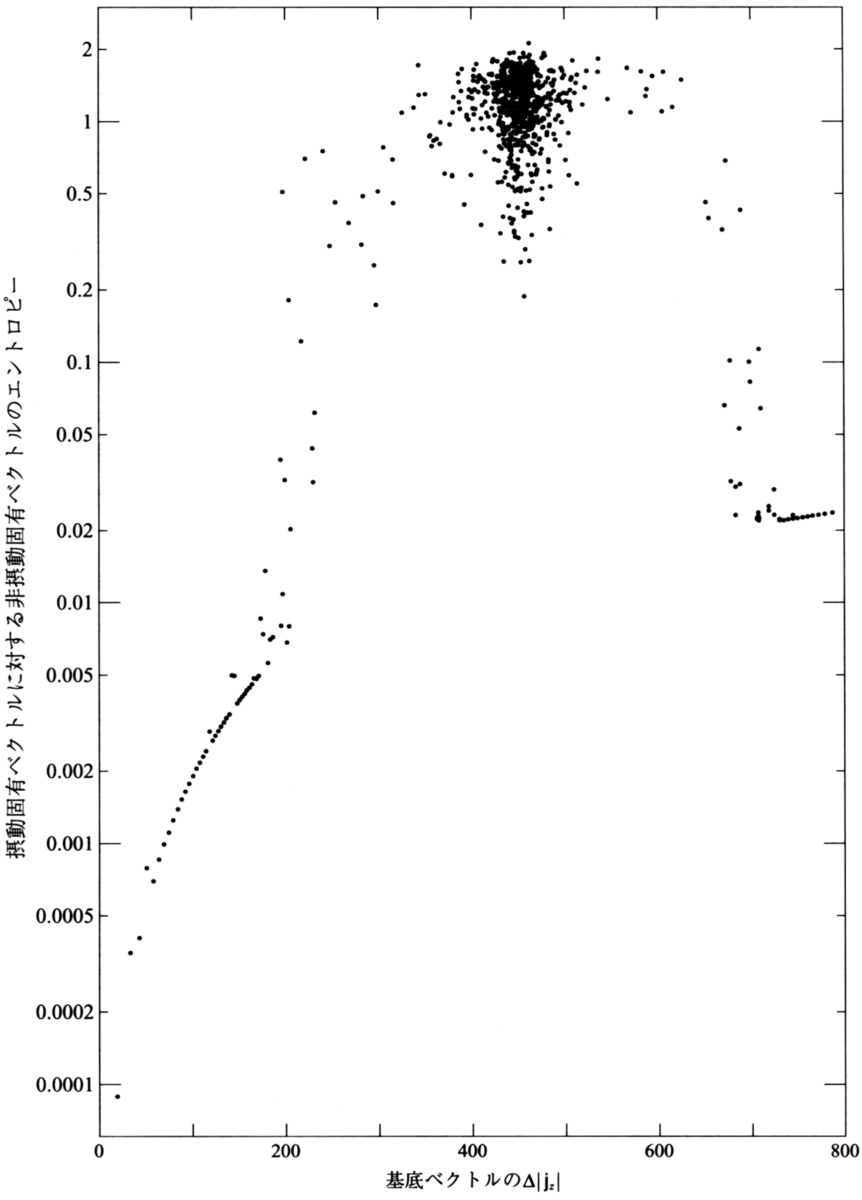


図 11.10　U の固有ベクトルの摂動に対する感受性を $|j_z|$ 空間におけるそれらの固有状態の広がりでプロットしたもの．上部の塊は広がって，脆弱な状態を含む．2本の弦は古典的な固定点近傍に局在した強固な状態を含む．

動を受けた U′ の固有状態とはまったく似ていなくなる．これらの状態は**脆弱** (フラジル) とよばれる．

これに対し，図 11.10 には**きわめて小さなエントロピー**をもつ 2 本の U の固有状態の "弦" も見られる．このことはこれらの状態の一つ一つが U′ の固有状態のどれか一つにほとんど等しいことを意味している．そのような性質をもつ状態は**強固** (ロバス

ト) とよばれる．詳しくしらべると，図の左側の弦は**ほとんど等間隔の固有位相**をもつ一連の状態から構成されていることがわかる．これはボーアの量子化則であり，固有状態が古典的位相空間の**正則**領域に局在していることの正真正銘の証拠である．実際，これらの状態のうちでもっとも局在した (つまり，最も広がっていない) 状態では，$\langle |\mathsf{j}_n| \rangle / j$ の値が図 11.7 および 11.8 に示された 1 位と 2 位の固定点の座標に非常に近い．これに対し，2 番目の弦の広がりは最大に近いが，4 位の固定点近くに局在した状態を表している．

摂動論の有効性を回復するためには α と α' の差がどのくらい小さくなければならないかをしらべ，この分析を締めくくろう．この節の冒頭で粗い評価を与えておいたが，摂動演算子の "典型的な" 行列要素に対し，$N^{-1/2}$ のオーダーの制限が課されていた．これによれば，

$$\langle \mathsf{v}_m , (\delta\alpha\, \mathsf{j}_z{}^2/2j)\, \mathsf{v}_n \rangle \simeq j^{-1/2} \tag{11.57}$$

となる．$\langle \mathsf{v}_m , \mathsf{j}_z{}^2\, \mathsf{v}_n \rangle$ の値の典型的な大きさは式 (11.49) と図 11.10 から推測できる．その大きさはほぼ $(\Delta|\mathsf{j}_z|)^2$ と同じであり，いまの場合は $\sim 0.1\, j^2$ である．したがって，$\delta\alpha \simeq 20\, j^{-3/2} \simeq 3 \times 10^{-4}$ が得られるが，これは実際に，この数値計算例で使用した $\delta\alpha$ である．(これらのパラメーターは完全に発達したカオスを示すというよりも，正則型運動とカオス型運動の双方を示すために，摂動論の有効性の限界近くの値が選ばれた.) これらの評価が正しいことは図 11.10 を直接しらべることによっても見ることができる．最も脆弱な状態ですらほどほどのエントロピーをもつにすぎない．ところが一方で，完全にカオス的状況は**ランダム**に選ばれた基底の場合に相当する．この場合，S はもっと大きな値

$$\langle S \rangle = \log 800 - 1 + \gamma = 6.2618 \tag{11.58}$$

をもつことが予想される[*32]．ただし，$\gamma = 0.5772$ はオイラーの定数である．

強固な状態と脆弱な状態

いままでは量子状態の選択には関わりなく，ユニタリー写像 U および U' の動力学的性質をしらべてきた．そのような量子状態を次に導入しよう．はじめに角運動量コヒーレント状態を考える (330 ページ参照)．それは $\mathbf{n}$ を (θ, ϕ) 方向の単位ベクトルとすると，$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}\, |\theta, \phi\rangle = j |\theta, \phi\rangle$ を満足する．そのようなコヒーレント状態に対して，j_k に関する不確定性は式 (10.141)

$$[\langle \mathbf{j}^2 \rangle - \langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{j} \rangle]^{1/2} = \sqrt{j} \tag{11.59}$$

によって与えられる．このことから，j_k 方向の不確定性はほぼ $j^{-1/2}$ となる．もっと詳しくいえば以下のようになる．二つの異なるコヒーレント状態の重なりは式 (10.146)

[*32] W. K. Wootters, *Found. Phys.* 20 (1990) 1365.

表 11.3　2 状態の内容：正則なベクトルとカオス的なベクトルの初期設定とその時間発展

初期コヒーレント状態の $n_x = n_z$	0.6294126	0.6294126
初期コヒーレント状態の n_y	0.4557187	−0.4557187
$p_1 =$ 最大の重み　$\lvert\langle \mathsf{v}_1, \psi\rangle\rvert^2$	0.923359	0.021988
$p_2 =$ 第 2 の重み　$\lvert\langle \mathsf{v}_2, \psi\rangle\rvert^2$	0.068007	0.015673
S (基底 v_n に関するエントロピー)	0.306937	5.66864
e^S (実効的に含まれる固有ベクトル数)	1.35926	289.604
固有ベクトルの平均脆弱性　$\sum p_n S_n$	0.000116	1.140183
平均の広がり　$\sqrt{\sum p_n [(\Delta \lvert \mathsf{j}_z \rvert)_n]^2}$	22.1413	460.865
重なりの時間平均 — 式 (11.63) を参照	0.857323	0.003923
最小の重なり	0.716557	0.0

から

$$\left|\langle \theta', \phi' | \theta'', \phi'' \rangle\right|^2 = \cos^{4j}(\Theta/2) \tag{11.60}$$

で与えられる．ただし，Θ は二つの方向 (θ', ϕ') と (θ'', ϕ'') のなす角である．大きな j に対し，この重なりはほぼ $e^{-j\Theta^2/2}$ となる．$\Theta \gtrsim 2j^{-1/2}$ のとき，二つのコヒーレント状態は (ヒルベルト空間内で) ほとんど直交していることがわかる．いま，$j = 1600$ の場合なので，コヒーレント状態の角度による分解能は，ほぼ 0.05 ラジアン $\simeq 3°$ である．これは，単位球上の正則領域の大きさに比べて十分に小さい (図 11.7 参照)．したがって，この j の値は正則とカオス的な量子運動の間をはっきり区別するためには十分である．(小さな j の値では不十分であろう.)

二つの場合を考えよう．表 11.3 にそれらの性質を要約してある．“正則状態” ψ_{r} は式 (11.41) のような 1 位の固定点の方向に $\mathbf{n}$ をとればよい．“カオス状態” ψ_{c} は n_x と n_z については ψ_{r} と同じにとるが，n_y は反対にとる．その結果，$\mathbf{n}$ は図 11.6 からわかるように，カオス領域の真っただ中を向く．

次に ψ_{r} と ψ_{c} を U の三つの不変部分空間 (表 11.2 に定義されている) に射影しよう．それぞれの射影は互いに独立に考えられるはずである．この分離が本質的である．それは**カオス**領域から分離された**正則**領域は量子力学的な 2 重井戸 (あるいは多重井戸) のようにふるまい，異なる対称類に属する固有位相が**ほとんど縮退した多重項**を構成するからである．初期に一つの正則領域に局在していた状態が，別の正則領域にトンネルし，そして暫くして初期の位置に再集合する．このようにして “崩壊と再生” が繰り返される [*29,*33]．この現象のために分析が不必要に複雑となる．各部分空間を別々に取り扱えばそのようにはならない．前と同じように部分空間 oo だけを考えよう．初期状態 ψ_{r} と ψ_{c} を射影したものを 1 に規格化し，それらをもとと同じように単に ψ_{r} と ψ_{c} とよぶ．最初に統計的な重み $p_n = \lvert\langle \mathsf{v}_n, \psi\rangle\rvert^2$ とエントロピー $S = -\sum p_n \log p_n$

[*33] O. Bohigas, S. Tomsovic, and D. Ullmo, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 1479.

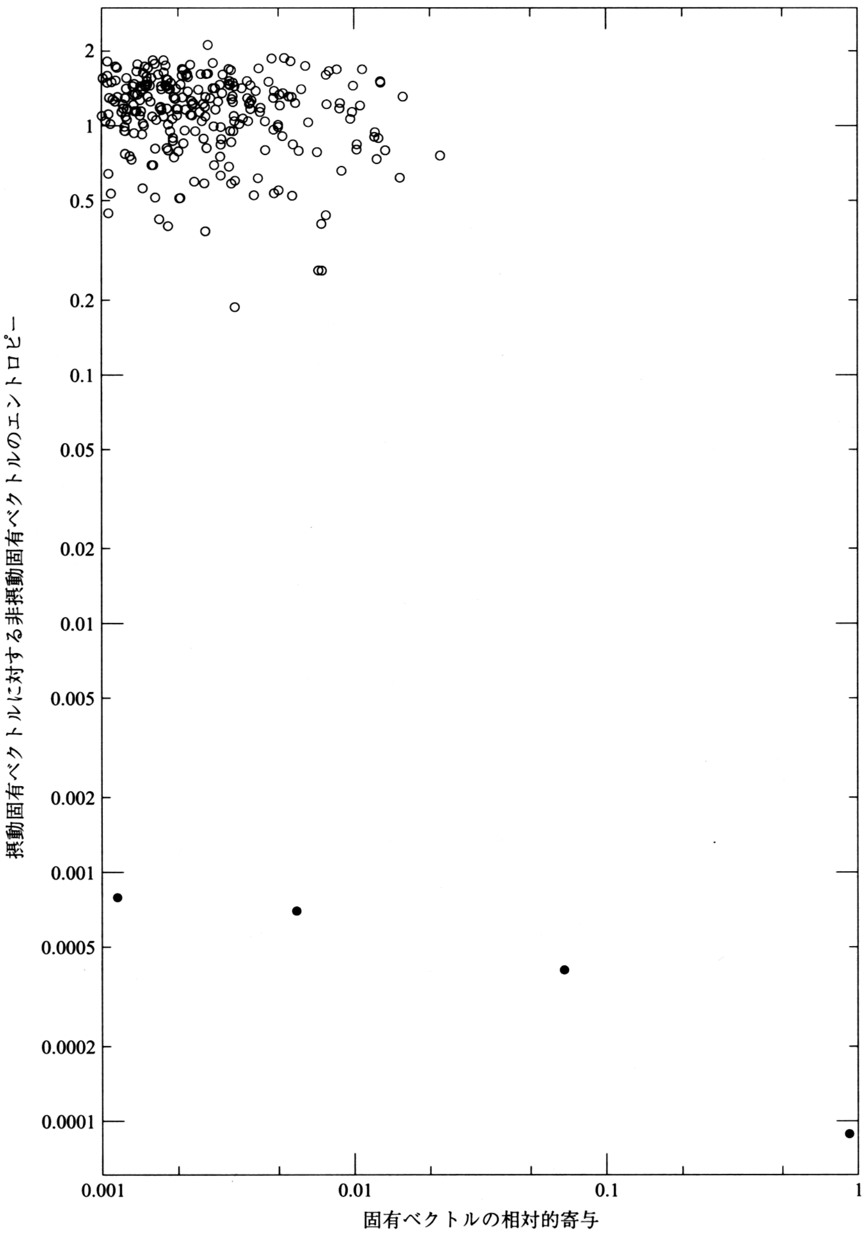


図 11.11 摂動に対する感受性．横軸は正則状態 $\psi_{\rm r}$ とカオス状態 $\psi_{\rm c}$ に最も寄与する U の固有状態に関する相対的重み (順に黒丸と白丸) をとった．

を計算しよう．これらの二つの状態で，結果は根本的に異なることがわかる．$\psi_{\rm r}$ が U の 1 個の固有ベクトルでほとんど構成されているのに対し，$\psi_{\rm c}$ はほぼ 300 個の固有ベクトルを含む．さらに，図 11.11 からわかるように，$\psi_{\rm r}$ と $\psi_{\rm c}$ をつくるために使われている固有ベクトルがまったく違う性質をもつ．カオス状態 $\psi_{\rm c}$ は U の多数の**脆弱**な固有状態からできている．ところが，一方，正則状態 $\psi_{\rm r}$ はわずかな**強固**な固有状

態から構成されている．

$\psi_{\rm r}$ に最も寄与する二つの固有ベクトルを v_1，v_2 とよぼう．これらの二つで初期状態 $\psi_{\rm r}$ の 99%以上となっている．これらの強固な固有状態は実際，対応する固有値よりも安定なのである．これらの固有ベクトルは文字通り古典的固定点にピン止めされているのである．対応する U' の固有状態を w_1，w_2 とすれば，$|\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{w}_1\rangle|^2 = 0.99993166$ となる．一方で，対応する固有位相は ほぼ 0.0950 ラジアンとかなり離れている．(比較のために，U の隣り合う固有位相間の**平均**間隔は $2\pi/800 = 0.0079$ ラジアンにすぎない.)

次に $\psi_{\rm r}$ と $\psi_{\rm c}$ の時間発展に注目してみよう．初期に二つともコヒーレント状態にあるときは，それらの広がりは $\Delta|\mathsf{j}_z|_{t=0} = 21.9787$ で与えられる．この値は，最も強固な固有状態 $\psi_{\rm r}$ での値，19.11097 に匹敵する．それから，$\psi_{\rm r}$ と $\psi_{\rm c}$ が時間発展するにしたがって，その広がりは時間平均 $\sqrt{\sum p_n\,[(\Delta|\mathsf{j}_z|)_n]^2}$ のまわりをゆれ動く．それは異なる固有状態 v_n 間の干渉項は時間平均に効かないからである．その結果は表 11.3 に示した．$\psi_{\rm r}$ が密に詰まった初期状態を保っているのに対し，$\psi_{\rm c}$ は球の大部分に広がっている．

演習問題 11.10　上にあげた時間平均の広がりの式を導け．**ヒント**：式 (11.51) を使え．

正則量子運動とカオス量子運動

最後に，このすべての数値計算の動機となった問題をしらべよう．すなわち，ツイストパラメーターを $\alpha = 3.0$ から $\alpha' = 3.0003$ までわずかに変化させたときの $\psi_{\rm r}$ と $\psi_{\rm c}$ に関する**運動の安定性**である．α に小さな摂動を加えたとき，動力学的発展が受ける感受性の良い指標は，摂動を受けた状態ベクトルと非摂動の状態ベクトルの重なりである．初期に ψ_0 であった状態は t ステップ後に

$$\mathsf{U}^t\,\psi_0 = \sum_n e^{-it\phi_n}\,c_n\,\mathsf{v}_n \qquad \text{あるいは} \qquad (\mathsf{U}')^t\,\psi_0 = \sum_\mu e^{-it\phi_\mu}\,c_\mu\,\mathsf{w}_\mu \tag{11.61}$$

となる．ただし，$c_n = \langle \mathsf{v}_n, \psi_0\rangle$ そして $c_\mu = \langle \mathsf{w}_\mu, \psi_0\rangle$ である．

これらの二つの状態の内積は

$$\langle \mathsf{U}^t\,\psi_0, (\mathsf{U}')^t\,\psi_0\rangle = \sum_{n\mu} \overline{c_n}\,c_\mu\,\langle \mathsf{v}_n, \mathsf{w}_\mu\rangle\, e^{it(\phi_n-\phi_\mu)} \tag{11.62}$$

となる．これらの重なり P_t は式 (11.62) の絶対値 2 乗なので，

$$P_t = \sum_{n\mu} |\,\overline{c_n}\,c_\mu\,\langle \mathsf{v}_n, \mathsf{w}_\mu\rangle|^2 + \text{振動項} \tag{11.63}$$

と書ける．式 (11.63) の右辺の第 1 項が重なりの**時間平均**である．表 11.3 に $\psi_{\rm r}$ と $\psi_{\rm c}$ の場合について，その値をあげた．正則の場合は重なりの最小値も書いてある．この最小値は式 (11.62) に対して最大の寄与する項，つまり $\overline{c_1}\,c_1'\,\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{w}_1\rangle$ の位相が，他の

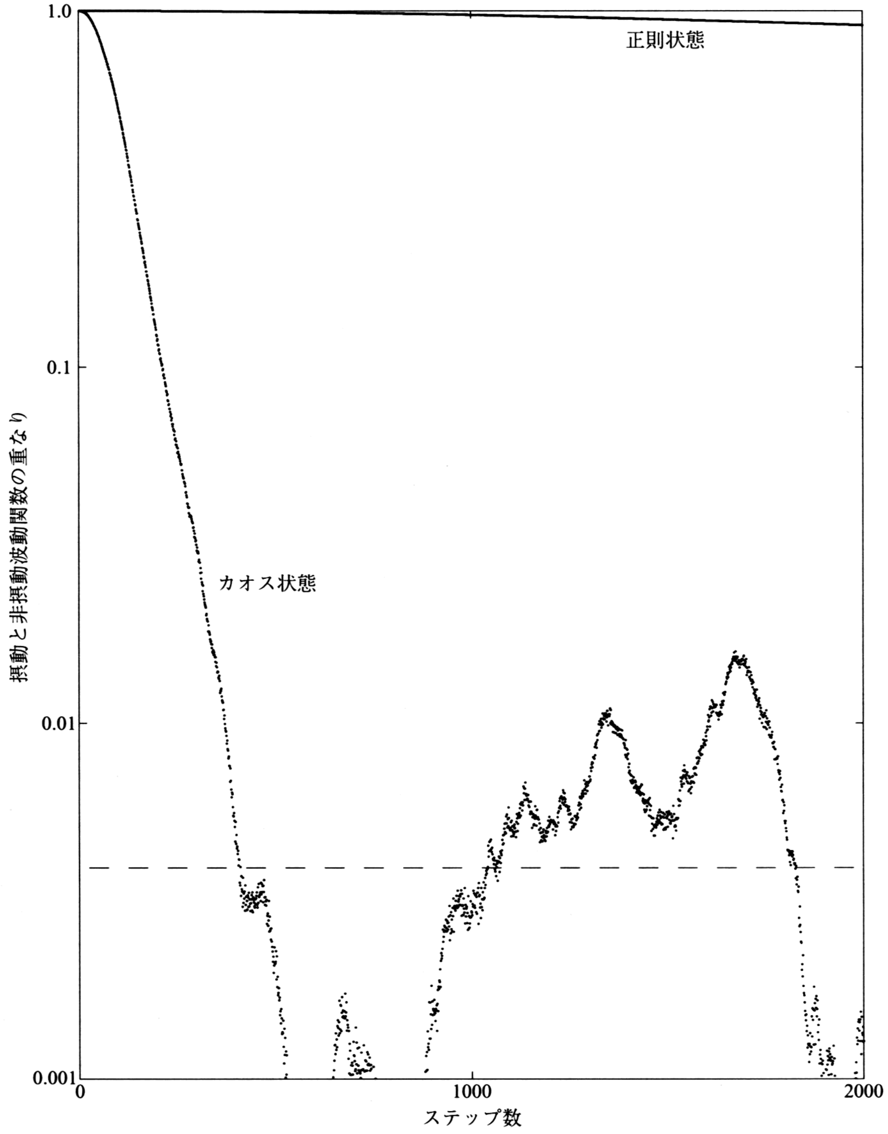


図 11.12 スタートしてから 2000 ステップまで．2 個のカオス状態の重なりは時間の 2 次で崩壊し始め，次いで指数的となり，最後にはその時間平均 0.003923 (破線で示した) 付近をゆれ動く．

すべての寄与する項と反対の位相をもつときに生じる．カオスの場合には最小の重なりはない．それは摂動を受けた ψ_c と非摂動の ψ_c が直交するようになるからである．

図 11.12 と図 11.13 に異なる時間スケールでの P_t のふるまいを示す．二つの正則な状態間の重なりが定常的に振動するのは，ψ_r の 99% 以上が 2 個の**強固**な状態ベクトル，v_1 と v_2 あるいは w_1 と w_2 によっているという事実から生じる．それらが強固である (低エントロピー) ということは，$\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{w}_1 \rangle \simeq \langle \mathsf{v}_2, \mathsf{w}_2 \rangle \simeq 1$，しかし，$\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{w}_2 \rangle$ と

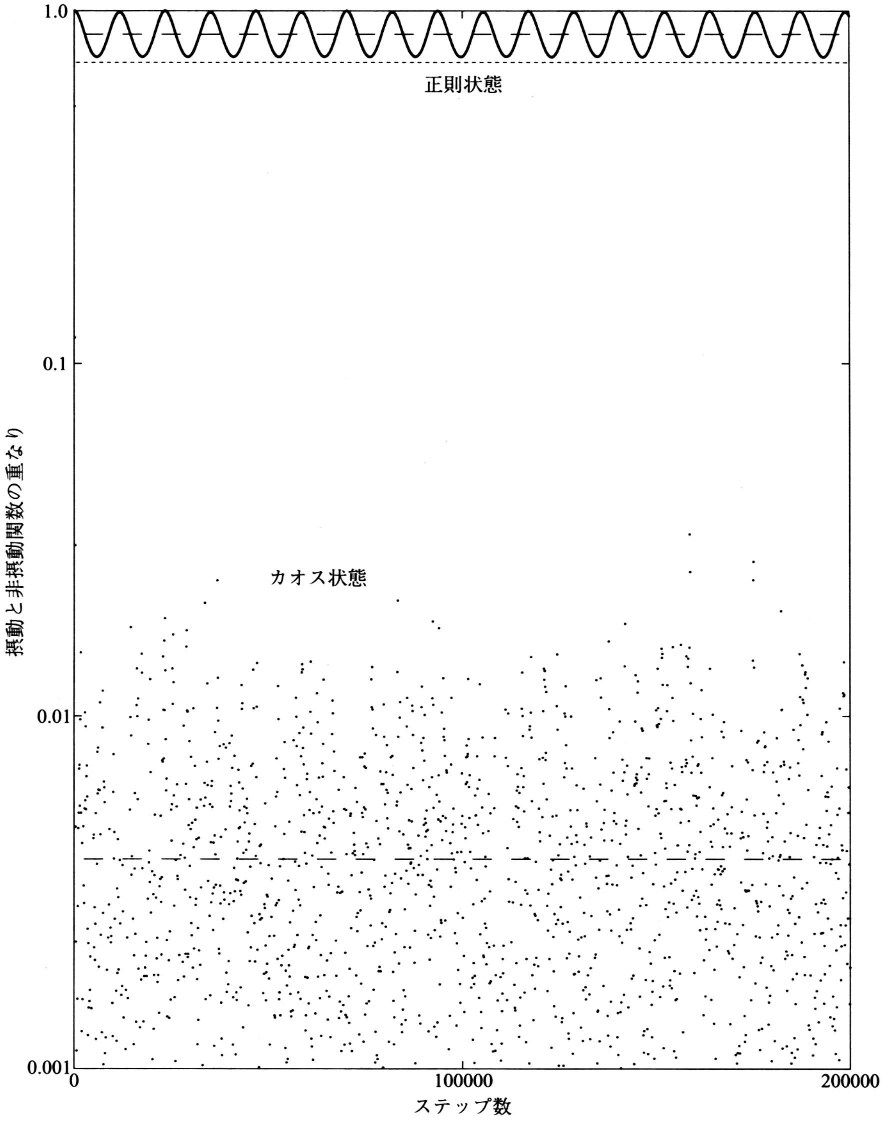


図 11.13　スタートしてから 200000 ステップまで．図は 100 ステップごとに示してある．破線は式 (11.63) で与えられる重なりの平均である．点線は 2 個の正則状態がとりうる最低値である．

$\langle \mathsf{v}_2, \mathsf{w}_1 \rangle$ はきわめて小さいということを意味する．したがって式 (11.62) は

$$\langle \mathsf{U}^t \psi_{\mathrm{r}}, (\mathsf{U}')^t \psi_{\mathrm{r}} \rangle \simeq p_1 e^{it(\phi_1 - \phi_1')} + p_2 e^{it(\phi_2 - \phi_2')} \tag{11.64}$$

となるので，

$$P_t \simeq {p_1}^2 + 2 p_1 p_2 \cos[t(\phi_1' - \phi_1 - \phi_2' + \phi_2)] + O({p_2}^2) \tag{11.65}$$

が得られる．この場合，摂動論は収束し，式 (11.35) から

$$\phi_1' - \phi_1 = -0.0003 \left\langle \mathsf{v}_1 \,, \mathsf{j}_z{}^2 \, \mathsf{v}_1 \right\rangle / 2j \tag{11.66}$$

が得られるが，$\phi_2' - \phi_2$ も同様である．

一方，カオス状態 $\mathsf{U}^t\psi_\mathrm{c}$ と $(\mathsf{U}')^t\psi_\mathrm{c}$ の重なりは，きわめて急速に崩壊することがわかり，その後，平均値はほぼ $1/N$ の付近をランダムにゆれ動く．ここで，$N = e^S$ は ψ_c に無視できない寄与を与える固有状態の数である．このゆらぎは実際上永久に持続する．というのは，式 (11.63) には整合のとれない位相差が，$N^2 \simeq 10^5$ 個も含まれており，ポアンカレ再帰に要する時間は，考えられるいかなる数値実験でも，その持続時間よりずっと長時間となると思われているからである．

演習問題 11.11 初期の崩壊形式が 2 次である理由を説明せよ． ⋆

演習問題 11.12 きわめて小さい (たとえば 10^{-10}) 重なりの 2 個のカオス状態がどの程度の頻度で起こるか評価せよ． ⋆

11.6 純粋状態から混合状態への発展

量子決定論の仮定 (238 ページ) は純粋状態で始まった量子系が，完全に制御されている環境の下で発展するなら，純粋状態に留まることを主張している．より一般的にいえば，エントロピー $S = -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$ はユニタリー時間発展 $\rho \to \rho' = \mathsf{U}\rho\mathsf{U}^\dagger$ の下で不変である．これに対し，環境が完全に制御されておらず，統計的にしかわかっていないときには，時間発展演算子 U をそれぞれ確率 p_α をもつユニタリー行列 U_α の**集合**で置き換えなければならない．そのとき，動力学的時間発展は

$$\rho \;\to\; \rho' = \sum_\alpha p_\alpha \, \mathsf{U}_\alpha \, \rho \, \mathsf{U}_\alpha^\dagger \tag{11.67}$$

となる．

演習問題 11.13 式 (11.67) の ρ' が

$$-\mathrm{Tr}\,(\rho' \log \rho') \geq -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho) \tag{11.68}$$

を満たすことを示せ．この結果エントロピーは決して減少しない． ⋆

このほか，環境中にある別の系と**絡み合っている**量子系を考えても同様な結果が導かれる．この場合，環境に属している系を**無視する**方法を用いれば，劣加法性の定理 (9.21) によって，エントロピーは増加する．

不可逆性におけるカオスの役割

前節で，小さな摂動ハミルトニアンのもとでの運動は，長時間経つと非摂動運動から大きくそれてしまう可能性のあることがわかった．そこでは摂動量子状態と非摂動

量子状態とがほとんど直交するようになる．したがって，その摂動が未知であれば終状態は混合状態となる．これらのことはすべて，**固定された**摂動に対して示されたものである．時間にランダムに依存する摂動 (ふつう**雑音**とよばれる) に対しては，明らかに状況はより悪くなるだけである．

ここで，11.2 節で提案した "沸騰しているお湯の中の氷" の例を量子論の言葉で定式化することができる．再度，ツイストと回転写像 (11.46) を考えよう．問題はこうである．**決めておいた**コヒーレント状態 $|\theta,\phi\rangle$ が 10^5 ステップ後に得られるように ψ_0 は準備できるであろうか? 図 11.13 から，雑音がある場合には，その答は到達したい状態の種類に決定的に依存するということが示されている．

たとえば，時間発展の最終段階で，状態 ψ_{r} を得たいとしよう．その状態はほとんど 2 個の強固な固有ベクトルから構成されている．したがって，ツイストパラメーター α の正確な値を制御できなくとも，その運動は安定であり，予定された時間発展からのずれは限定されていることがわかっている．式 (11.65) と (11.66) から振動の振幅は $\delta\alpha$ に依存しないことがわかる．($\delta\alpha$ に比例するのはその振動数だけである.)

一方，10^5 ステップ後に，コヒーレント状態 ψ_{c} となる状態を準備するには，α の値を式 (11.57) で与えられた限界よりさらによい精度で制御しなければならない．そのような精度が達成できなければ，目標から遠く離れた地点 (ψ_{c} にほとんど**直交する**状態) に行ってしまう．その場合，ψ_{c} から出発する時間発展は**不可逆的**であるということが正当化される．すなわち，逆の時間発展を準備することができないのである．

11.7　付録：写像のポストスクリプトコード

本章にある各種の図を含めて，この本の図は PostScript レーザープリンターによって直接作成された．PostScript は強力なグラフィック機能をもつコンピューター言語である[*34]．その主要な用途はグラフィックスではあるが，PostScript は通常の計算にも使用でき，図の出力が必要なときには非常に便利である．特に数行のコードで繰り返し写像を簡単に生成できる．計算はレーザープリンター自身のマイクロプロセッサーで完全に実行できる．確かに普通のコンピューターで実行した方が早いだろうが，そのときの難点はコンピューターからプリンターへのデータの伝達である．図 11.2 を描くには 10^6 個の座標の組を伝達せねばならないが，読者のプリンターはどのくらいの時間を必要とするであろうか? それが読者の許容範囲を越えているのであれば，PostScript を使えばよい．

例として，ここに，図 11.3 を描いたプログラムを載せておく．

```
%!
% Figure 11.3 (evolution of Liouville domain)
300 400 translate
```

[*34] Adobe Systems Inc., *PostScript Language Reference Manual*, Addison-Wesley, Reading (1985).

```
%                                                   COORDINATE SYSTEM
/Times-Italic findfont 12 scalefont setfont
-9 73 moveto (p) show  72 -10 moveto (q) show
newpath -80 0 moveto 75 0 lineto
   gsave 80 0 translate
      newpath -10 0 4 -30 30 arc 0 0 lineto closepath fill
   grestore
0 -80 moveto 0 75 lineto
   gsave 0 80 translate
      newpath 0 -10 4 60 120 arc 0 0 lineto closepath fill
   grestore
0.2 setlinewidth stroke
newpath -200 dup moveto 200 -200 lineto 200 dup lineto
            -200 200 lineto closepath stroke
/Times-Roman findfont 12 scalefont setfont
20 65 moveto (3 steps) show  84 -63 moveto (6 steps) show
200 92681 div dup scale
%                                                   A CIRCULAR DOMAIN
/r 10000 def
200 setlinewidth
newpath -75000 0 r 0 360 arc stroke
%                                                   THE DYNAMICAL MAP
/Helvetica findfont 250 scalefont setfont
/n 0 def
36000 { /n n 1 add def
            /a n .01 mul def                        % every 1/100 of degree
            /p a sin r mul round cvi def
            /q -75000 a cos r mul add round cvi def
            2 { 3 { /q q p add
                     dup 92681 gt { 185362 sub } if
                     dup -92681 lt { 185362 add } if
                                                   def
                     /p q dup abs 92681 sub mul 92681 idiv p add
                     dup 92681 gt { 185362 sub } if
                     dup -92681 lt { 185362 add } if
                                                   def
                     } repeat
                     q p moveto (.) show
```

```
            } repeat
        } repeat
showpage
```

この繰り返し写像の実行 (PostScript プリンターが 1 ページを出力するのに数分かかる) を加速させるため整数法でコードを書いた．浮動小数点法よりも早く，他のコンピューターへの変換もより簡単なのである．このプログラムの変数 q と p はもとの変数 q と p でなく，92681 q と 92681 p に最も近い整数である．素数 92681 は $2^{16.5} = 92681.9$ より小さいから，|q| (926811 − |q|) は常に 2^{31} 以下であり，これが PostScript の整数に対する限界である．

11.8 参 考 文 献

M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, New York (1991).

F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, Berlin (1992).

L. E. Reichl, *The Transition to Chaos*, Springer, New York (1992).

M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, Wiley, New York (1989).

G. M. Zaslavsky, *Chaos in Dynamic Systems*, Harwood, Langhorne, PA (1985).

これらのうちいくつかは**散逸的**カオスを取り扱っているが，それは本章の主題であったハミルトンカオスとは基本的に異なる．

推 薦 図 書

以下の論文には量子カオスに関する様々な方法の組合せが見られる．

I. C. Percival, "Regular and irregular spectra," *J. Phys. B* 6 (1973) L229.

M. V. Berry, N. L. Balazs, M. Tabor, and A. Voros, "Quantum maps," *Ann. Phys. (NY)* 122 (1979) 26.

M. V. Berry, "Quantizing a classically ergodic system: Sinai's billiard and the KKR method," *Ann. Phys. (NY)* 131 (1981) 163.

P. Pechukas, "Quantum chaos in the irregular spectrum," *Chem. Phys. Lett.* 86 (1982) 553.

M. C. Gutzwiller, "The quantization of a classically ergodic system," *Physica D* 5 (1982) 183; "Stochastic behavior in quantum scattering," *ibid.* 7 (1983) 341.

M. Feingold, N. Moiseyev, and A. Peres, "Classical limit of quantum chaos," *Chem. Phys. Lett.* 117 (1985) 344.

G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, "Dynamical stability of quantum 'chaotic' motion in a hydrogen atom," *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 2437.

J. Ford, G. Mantica, and G. H. Ristow, "The Arnol'd cat: Failure of the correspondence principle," *Physica D* 50 (1991) 493.

G. P. Berman, E. N. Bulgakov, and G. M. Zaslavsky, "Quantum chaos of atoms in a resonant cavity," *Chaos* 2 (1992) 257.

R. Schack and C. M. Caves, "Hypersensitivity to perturbations in the quantum baker's map," *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 525.

量子カオスの実験

J. E. Bayfield, G. Casati, I. Guarneri, and D. W. Sokol, "Localization of classically chaotic diffusion for hydrogen atoms in microwave fields," *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 364.

E. Doron, U. Smilansky, and A. Frenkel, "Experimental demonstration of chaotic scattering of microwaves," *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 3072.

O. Agam, S. Fishman, and R. E. Prange, "Experimental realizations of quantum chaos in dielectric waveguides," *Phys. Rev. A* 45 (1992) 6773.

12
観　測　過　程

12.1　どっちつかずの観測者

量子現象はヒルベルト空間内ではなく，実験室で起きている．それらを記述するときに以下のようなジレンマに陥る．物理系を観測するにはそれを測定装置と相互作用させなければならない．測定装置も量子力学で記述されなければならない．というのは量子系が古典系と相互作用するとき，矛盾のない動力学的枠組が存在しないからである．一方で，測定された結果は古典的な方法で装置によって記録される．(これが科学学術誌に掲載される.) したがって，ヒルベルト空間の枠組から，古典的な言葉への**翻訳**が必要なのである．

他の物理的対象とは異なり，測定装置の真骨頂はこの**どっちつかずさ**にある．測定対象と相互作用している間は，量子系として扱われなければならないが，いったん測定が終了すれば，古典系として取り扱われなければならない．どのようにすれば測定装置を "非量子化" できるのであろうか? この "非量子化" は矛盾なく実行できるだろうか?

シュレーディンガーの猫

このどっちつかずの明快な例としてシュレーディンガーの猫がある[*1]．シュレーディンガーの猫は放射性原子の崩壊でスイッチが入る自動的装置によって，殺される運命になっている．猫と原子の結合系の初期状態は $\mathsf{L}\otimes\mathsf{u}$，つまり生きている猫 (L) と崩壊していない原子 (u) である．原子の半減期には，この状態は

$$\psi = 2^{-1/2}\,(\mathsf{L}\otimes\mathsf{u} + \mathsf{D}\otimes\mathsf{d}) \tag{12.1}$$

となる．ここで，D と d はそれぞれ死んだ猫と崩壊した原子を表す．こんな奇妙な状態にある猫は誰も見たことがない．

"猫のパラドックス" は，状態ベクトル ψ の時間発展が現実の世界で実際に起っている物理過程を表しているという素朴な仮定に起因することは明白である．実際，各瞬間ごとに，物理系がきちんと定まった状態 ψ (あるいは密度行列 ρ) をとったり，$\psi(t)$

[*1] E. Schrödinger, *Naturwiss.* 23 (1935) 807 [*Quantum Theory and Measurement*, ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton Univ. Press (1983) p. 152中に英訳あり].

あるいは $\rho(t)$ の時間依存性が物理過程の実際の時間発展を表しているという証拠はまったくない．量子論を厳密に解釈すると，これらの数学的記号はある決まった事象の起こる**確率**を計算できる**統計的情報**を表している．たとえば，式 (12.1) はシュレーディンガーの**思考実験**を多数回繰り返せば，半数の猫が生きていて，半数の猫が死んでいることを述べている．$\psi(t)$ あるいは $\rho(t)$ によって規定されている情報は，(放射性原子の崩壊によってもたらされるような) 動力学相互作用によって**時間発展**できる．(特に，前章で見たカオス系のように) ハミルトニアンが不完全にしかわかっていないときには，情報は**退化**することもあり，最終的に**劣化**してしまうこともある．

物理学者によっては上記の実用主義的な態度に満足できない人たちもいる．彼らは不確定性関係は容易に認めるが，少なくとも量子論にきちんとした存在論を持ち込みたいと考えるのである．今までに次のような議論をして，波動関数の客観性を救おうとした多くの試みがある.「いまだかつて状態 (12.1) にあるような猫を見た人はいないが，それはただ単に，猫を**観測**すると状態 $\mathsf{L}\otimes\mathsf{u}$ あるいは $\mathsf{D}\otimes\mathsf{d}$ に飛躍[*2]してしまうからである.」(この飛躍は波動関数の**収縮**とよばれる[*3].) このシナリオに形式的な矛盾はないが，観測者の脳と猫のからだ全体との間に，強力でかつ神秘的な相互作用のあることを意味するので，まったく信じられない．結局のところ，測定は超自然現象ではなく，通常のものごとに関わる物理過程であり，何が起ころうとも通常の物理法則によって分析されなければならない．

エヴァレットの解釈とその他の怪奇な理論

波動関数の収縮を要請せずに量子確率を救おうとするもう一つの試み[*4]がある．それは，式 (12.1) のような絡み合った表現が実際の状況を表して**いる**とするものだ．もっと厳密にいうと，式 (12.1) の右辺は “世界の波動関数” の一部分であり，そこでは猫も原子の観測者と考えられる．しかしながら，式 (12.1) の二つの部分は異なる世界に対応し，いったん，**不可逆**過程が生じれば，それらの間には関係を付けることができないのである．この方法にはいくつかの変形版があり[*5]，“相対的状態解釈” や “多世界解釈” とよばれているが，これらは任意性のある収縮の仮定をただ単に非伝達の仮説で置き換えただけで，満足できるものではない．特に，様々な世界間の伝達を妨げるさいに不可逆性が必要だが，それが生じる客観的な基準が存在しない (11 章で見たような評価は存在し**えない**) のである．

測定装置の 2 重性を避けようとして量子論を (再解釈するのではなく) **修正**しようという試みも多数存在する．量子論を変えたこれらのどれ一つとしてそれを支持する実験的証拠は存在しない．逆に，それらに**反する**証拠はたくさん存在する．以下では根拠のない推測についてはこれ以上議論しないことにする．

---

*2 P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Univ. Press (1947), p. 36.
*3 D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1951) p. 120.
*4 H. Everett, III, *Rev. Mod. Phys.* 29 (1957) 454.
*5 M. A. B. Whitaker, *J. Phys. A* 18 (1985) 253.

簡単な測定の模型

一つの装置が正しい測定装置であるかどうかを確かめるには，測定される物理的対象とその相互作用に関する動力学的模型をつくらなけらばならない．この模型は量子力学的な言葉で定式化しなければならないが，また半古典的方法でも理解できるものでなければならない．簡単な模型によって，同一の物理系について，異なる状況下ではどのようにして二つの対立する記述が受容できるのか，説明してみよう．

1.5 節で古典的に論じたシュテルン–ゲルラッハの実験を，今度は量子力学を使って考えてみよう．測定される力学量は，たとえば原子の磁気モーメントの一成分 μ_z である．μ_z の観測値を指示する“ポインター”はその原子の質量中心 $\mathbf{r}$ である．実際，測定装置によって不可逆的に記録されるのは $\mathbf{r}$ の最終的な値である．測定過程は次の二つの力学的な段階によって記述される．シュテルン–ゲルラッハ磁石の非均一磁場 $\mathbf{B}$ を原子が通過しているとき，そのハミルトニアン

$$\mathsf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1.4}$$

は“対象系”の成分である磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ と“測定系”の役割を果たしている質量中心 $\mathbf{r}$ との間の相互作用を含む (図 1.5 参照)．したがって原子はこれら**双方の**系を代表している．($\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ はそのときにより，古典的変数でもあり，演算子でもある.) $\mathbf{r}$ に共役な変数 $\mathbf{p}$ に対する方程式は式 (1.6) のように $\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \mathsf{H}]/i\hbar = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ となるが，ここでは量子系を論じているので，$[\mathbf{p}, H]_{\mathrm{PB}}$ が交換関係に置き換えられている．

しかしながら，原子が磁場を出れば，そのハミルトニアンは $\mathsf{H} = \mathbf{p}^2/2m$ となり，もはや $\boldsymbol{\mu}$ と $\mathbf{r}$ には結合していない．運動方程式は古典力学と量子力学で同じ解

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}\, t/m \tag{12.2}$$

をもつ．もしウィグナー関数 (10.67) をお望みなら，その運動方程式は古典的なリウビル密度に対する運動方程式と同一となる．この段階までは少なくとも原理的には不可逆的なものは何も起っていない[*6]．特に量子測定に必須な過程である**増幅**という第一段階はここでは単に時間の経過が担っており，これによって式 (12.2) の因子 t/m はいくらでも大きくなる．

無矛盾性の問題

測定装置あるいは“観測者”(上の例では質量中心 $\mathbf{r}$) が古典的記述ができない，純粋に量子対象物だとしても，この量子化された装置が，今度は量子的・古典的に両方とも記述できる何か**他の**装置で観測されるならば何ら矛盾は生じないことを示そう．たとえば，シュレーディンガーの猫は観測者と考えるべきなのか，あるいは何か他のも

[*6] J. Schwinger, M. O. Scully, and B.-G. Englert, *Z. Phys. D* 10 (1988) 135.

のによって観測されるべき原子–猫の系の本質的な部分なのかは問題ではない．矛盾があるのではないかと思われる理由は以下のようなものである．

もし，観測者が猫あるいはほかの何か無生物でもきわめて複雑な測定装置でなかったとすれば，式 (12.1) をもたらすユニタリー発展は可逆となろう．簡単で，高度に理想化された測定装置の模型をいくつか組み上げれば，そのような性質をもつものは容易につくれる[*7]．観測が行われた後でも (つまり，その装置は対象系と相関をもっている)，その全測定過程をもとに戻すことができる．測定装置の力学的挙動を完全に解析できる超観測者 (たとえばシュレーディンガーの猫のハミルトニアンを具体的に書き表せるような観測者) がいれば，彼はもとの観測者 (あるいは測定装置として違いはない) に対象系との相関をなくさせ，測定結果を “忘れさせる” ことができよう．たとえば，猫を蘇らせることができよう．そしてそれから超観測者はその同じ系をもう一度測定すると，今度は違った結果が得られる．

もし，このようなシナリオが実際に可能ならば，どのような観測も決定的なものとはいえず，観測という概念が無意味となろう．したがって，無矛盾性から測定過程は**不可逆的**とならざるをえない．私たちの物理的世界には超観測者はいないのである．

測定装置の “非量子化” に関する論理的無矛盾性とは，形式的には式 (1.4) のように量子系 S が装置 A に結合しているとき，同一の過程を異なる二つの仕方で記述してもそれらが同等であることを意味する．この結合系を時間的に発展させ，その結合密度行列の S に関するトレースをとって，装置に関する縮約された密度行列 ρ_A を求めるとしよう．この縮約された密度行列は式 (10.56) によってウィグナー関数 $W_A(\mathbf{q},\mathbf{p})$ に変換できる．ある種のぼかしを行えば (317 ページを参照)，そのウィグナー関数はどこでも負にはならない**ぼかした**ウィグナー関数に変換されるが，もし量子リウビル方程式 (10.67) で巨視的な装置に対し $\hbar^2$ の項が無視できるなら，それはリウビル密度 $f_A(\mathbf{q},\mathbf{p})$ と解釈できよう．装置の終状態に対する**確率分布**が得られていることに注意しよう．量子論は統計的に予測できるだけで，決定的な結果は要請できないのである．

今度は装置 A を測定するため，A と相互作用している第 2 番目のもっと大きな装置 B を考えよう．これは古典的測定である．ここでは A と B についての結合されたリウビル密度がある．リウビル方程式に従って発展した後で，A の変数についての和をとれば，大きな装置について縮約したリウビル密度 $F_B(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ が得られる．これらはまったく単純で直接的な作業である．

しかしながら，違う取り組み方に従うこともできるのであり，この場合に無矛盾性の問題が生じてくる．二つの装置とも量子力学で記述できるので，ρ_A を非量子化して $f_A(\mathbf{q},\mathbf{p})$ を求めるかわりに，その複合**量子**系をユニタリー的に発展させ，A に関するトレースをとって縮約した密度行列 ρ_B が得られる．これをウィグナー関数 $W_B(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ に変換し，それを何らかの方法でぼかせば，新しいリウビル関数 $\mathcal{F}_B(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ が得られる．

[*7] A. Peres, *Am. J. Phys.* 42 (1974) 886.

無矛盾性の問題点は明らかである．$\mathcal{F}_B(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ が前の方法で得られた $F_B(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ と同一かということである．上記の計算では多くの段階が任意的であったことから見て，これはまったくありそうにもない．しかしながら，量子論が予言するものはほかでもなく，**確率**を計算しているだけであるから，これら二つのリウビル密度間のわずかな相違はあまり重要な問題ではないのかもしれない．適切に行われた測定 (つまり，量子検証) を特徴づけるのはこの (近似的な) 客観性なのである．その結果は**確定的**であり，測定装置を量子対象物として再考し，さらに別の装置で観測されるとしても影響を受けない．後者の装置が**リーズナブル**であるなら，それは最初の装置の結果と**ほとんど何時でも**同一の結果を与えるであろう．

ここで最後の二つの文節に注意すべきである．**リーズナブルな**装置 (つまり，10 章の冒頭で定義したように，リーズナブル演算子だけを測定する装置) に限定することは，前述した「超観測者はいない」ということと同等である．また**ほとんど何時でも**という条件が本質的である．その言葉で，量子的観測の概念に曖昧な雰囲気が醸し出されるが，この曖昧さからは逃れられない．量子論的言葉をまったく異なる古典的言葉に曖昧さなく変換する方式はありえないのである．

古典的記述は量子論的記述の近似ではなく，定性的に異なるものである[*8]．古典的ポインターはある位置を占め，その値は実数である．量子論的ポインターもある位置を占めるが，それは演算子である．「ポインターの位置の数値とは何か」といった問題は，古典的言葉では意味があるが，量子論的言葉では無意味である．古典的記述が量子論に唯一残している痕跡は，正準不確定性関係，すなわち，$2n$ 次元の位相空間で最小限 $\hbar^n$ のオーダーだけは広がっているということかもしれない．

開　放　系

物理系はどのようなときに上記の無矛盾性の基準を満たし，申し分のない測定装置となるのであろうか? 一つの必要条件として明らかなのは，その物理系が検証の結果を記録し，保存できる環境から**切り離されていない**ということである．したがって**不可逆性**は量子検証にとって必然的な特徴である．簡単な模型でこれらのポイントを説明しよう．

量子系の初期状態を $\psi=\sum c_m \mathsf{u}_m$ とし，正規直交基底 u_m に対応した状態を測定する**最大**検証を行おう．測定装置の初期状態は ϕ である (これを純粋状態と仮定しても問題はない．演習問題 5.10 を参照)．$\mathsf{v}_{n\alpha}$ をその装置の終状態としよう．添字 n は，たとえばこの検証でどの状態が見つかったかを示すポインターの質量中心のような巨視的自由度を表す．添字 α はポインターの内部エネルギーレベルのような “関係のない” その他の微視的自由度を表す．したがって，正規直交状態 $\mathsf{v}_{m\alpha}$ と $\mathsf{v}_{n\beta}$ は $m \neq n$ のときに限って古典的に識別可能となる．これらの約束の下で，問題にしている系と

[*8] A. Peres and W. H. Zurek, *Am. J. Phys.* 50 (1982) 807.

測定装置との相互作用の結果は

$$\psi\phi \;\rightarrow\; \sum_{n\alpha} c_{n\alpha}\, \mathsf{u}_n\, \mathsf{v}_{n\alpha} \tag{12.3}$$

となるとしよう．これは**線形的重ね合せ**であり，量子論が正しいとすれば何も問題はない．たとえば，式 (12.1) はそのような重ね合せである．式 (12.3) の過程では，系の n 番目の状態が装置の巨視的に区別できる n 番目の組の終状態に**関係づけられている**ので，"観測" とよばれている．

ここで式 (12.3) は最も一般的な観測過程を表しているものではないことを指摘しておこう．一般的な観測過程は 9.5 および 9.6 節で説明したように正値演算子測度 (POVM) に対応する．ここでの議論は簡単にいえば**反復可能な検証**に限定されており，"フォン・ノイマンの観測"，あるいは "第 1 種の観測" ともよばれている．しかし，不可逆性という基本的論点はあらゆる過程を通じて不変である．

演習問題 12.1　もし，

$$|c_n|^2 = \sum_{\alpha} |c_{n\alpha}|^2 \tag{12.4}$$

が成立すれば，時間発展 (12.4) はユニタリーであることを示し，この時間発展を記述するハミルトニアンをつくれ．　★

ここでいま，観測者から対象系を切り離そうとして，式 (12.3) の矢印の向きを反対にしようとすると，巨視的に分別可能な状態に対応する少数の係数 c_n だけでなく，ミクロな $c_{n\alpha}$ の一つ一つを，正確な大きさと位相で規定しなければならない．ここに困難が存在するのである．どんな巨視的な装置でもその内部自由度の力学は本質的にカオス的である．したがって $c_{n\alpha}$ の値は，装置の自由度に弱く結合していて，制御不能な外部環境とのあらゆる相互作用にきわめて敏感なのである[*9]．たとえば，シュレーディンガーの猫を蘇らせるように，ユニタリー発展 (12.3) を逆にすることは不可能なことなのである．

12.2　古典的観測理論

古典力学にもちょうど量子力学と同じように，不確定性関係が存在する．測定装置と対象系には相互作用があるはずなので，その系の何らかの性質を測定すれば，必然的にその他の性質に擾乱を与える．特に，観測装置の準備段階での不確定性は，観測が行われた後のその系の力学に影響を与える．

具体的な例として，ハミルトニアン $H_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ をもつ系を考え，その力学変数の一つ $A(\mathbf{q},\mathbf{p})$ を時刻 t_0 で測定したいとしよう．理想的な観測は次のように行われる．系

[*9] A. Peres, *Phys. Rev. D* 22 (1980) 879.

を装置に結合させるが，この場合極端に理想化しているので，それは単に質量 M，位置 Q，そして運動量 P の自由粒子 (“ポインター”) である．全ハミルトニアンは

$$H = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + (P^2/2M) + g(t - t_0)\, A(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, P \tag{12.5}$$

である．ただし，$g(t - t_0)$ は結合の強さで，(H には含まれていない) **別の**自由度によって支配されており，$t_0 < t < t_0 + \epsilon$ のときは大きいが，それ以外では無視できる．たとえば，シュテルン–ゲルラッハの実験では t_0 は磁石に入るときの時刻，$t_0 + \epsilon$ は出るときの時間である *9．この 2 個のパラメーターは原子の運動によって決定される．

ここで，観測している短時間では式 (12.5) の相互作用項が他のあらゆる項に勝っている，つまり他の項は無視できると仮定しよう．後で使うために

$$G = \int g(t - t_0)\, dt \tag{12.6}$$

を定義しておく．“ポインター” の運動方程式は

$$\dot{P} = [P, H]_{\mathrm{PB}} = 0 \tag{12.7}$$

および

$$\dot{Q} = [Q, H]_{\mathrm{PB}} = (P/M) + g(t - t_0)\, A \tag{12.8}$$

である．同様に，装置に関する任意の変数 $B(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に対して

$$\dot{B} = [B, H]_{\mathrm{PB}} = [B, H_0]_{\mathrm{PB}} + g(t - t_0)\, [B, A]_{\mathrm{PB}}\, P \tag{12.9}$$

となる．式 (12.7) から P は定数となる．$P = P_0$，$B = A$ という特別の場合には式 (12.9) から $\dot{A} = [A, H_0]_{\mathrm{PB}}$ となるが，これは有限である．したがって，きわめて短時間の相互作用による A の変化は ϵ のオーダーであり，無視できる．その結果，式 (12.6) と (12.8) から

$$Q(t_0 + \epsilon) = Q_0 + G\, A(t_0) + O(\epsilon) \tag{12.10}$$

となり，これから知らなかった $A(t_0)$ の値が求まる．簡単のために $Q(t_0 + \epsilon)$ は厳密に測定されると仮定すると，記録された値 $A(t_0)$ の不確定性は

$$\Delta A = \Delta Q_0 / G \tag{12.11}$$

となる．ここで ΔQ_0 は “ポインター” の初期位置での不確定性である．

今度は別の任意の変数 B を考えてみよう．式 (12.9) を積分すると，

$$B(t_0 + \epsilon) = B_0 + G\, \langle [B, A]_{\mathrm{PB}} \rangle_t\, P_0 + O(\epsilon) \tag{12.12}$$

が得られるが，これには測定中におけるポアソン括弧式の**時間平均**が含まれている．ΔP_0 の精度で初期値 P_0 が知られているとすると，終期値 $B(t_0 + \epsilon)$ の不確定さは

$$\Delta B = G\, |\langle [B, A]_{\mathrm{PB}} \rangle_t|\, \Delta P_0 \tag{12.13}$$

となろう．したがって

$$\Delta B\,\Delta A = |\langle [B, A]_{\mathrm{PB}} \rangle_t|\,\Delta Q_0\,\Delta P_0 \tag{12.14}$$

となる．

この結果は量子不確定性関係 (4.40) に似ているように見える．しかしながら，上の議論は純粋に古典的であった．量子論がこの問題で果たす唯一の役割は，実験家の技術とは無関係に，$\Delta Q_0\,\Delta P_0$ の値で絶対的な下限を決めることだけである．このことから，なぜハイゼンベルクの顕微鏡問題で通常展開されているような初歩的な半古典的議論によって，最終的には完全に量子論的に取り扱った場合と同じ量子不確定性が与えられる理由が理解できる．これは単にポアソン括弧式と交換関係の類似性にもとづくもので，その類似性は (10.1 節で定義したような) **リーズナブル**な力学変数に対して成立している．

連 続 測 定

今度はある時刻 t_0 における A の値だけではなく，全時間発展 $A(t)$，あるいは少なくとも一連の値 $A(t_j)$ を知りたいとしよう．もし，$A(t_1)$ が運動方程式によって $B(t_0)$ に依存し，そして $[B, A]_{\mathrm{PB}} \neq 0$ ならば，それ以前の $A(t_0)$ の測定で $B(t_0)$ に与えられた擾乱によって $A(t_1)$ は影響を受けるであろう．

このことは次のようにしてもわかるであろう．$A(t_1)$ は原理的にいつでも $\mathbf{q}(t_0)$ と $\mathbf{p}(t_0)$ の関数として任意の精度で表示できる．(もし，運動方程式が可積分ならこれは閉じた形で解析的に行えるし，そうでない場合でも，摂動論的方法が容易に適用できる.) したがって**異なる時刻の**ポアソン括弧式 $[A(t_0), A(t_1)]_{\mathrm{PB}}$ が定義できよう．前述の議論により，$A(t_0)$ の測定は

$$[A(t_0), A(t_1)]_{\mathrm{PB}} = 0 \tag{12.15}$$

のときだけに限って $A(t_1)$ に影響を与えない．ある力学変数がこの条件を満足するとき，その時間発展を**侵害しない**ような方法で，つまりその時間発展に影響を与えないで，モニターすることができる．式 (12.15) を満たす力学変数は**強固**とよばれる．[量子論では "quantum nondemolition" (量子非破壊) ということで**QND 変数**とよばれる.]

強固でない 変数の簡単な例は自由粒子の位置 x である．$x(t) = x_0 + p_0\,t/m$ なので，

$$\Delta x(t')\,\Delta x(t'') = (\Delta Q\,\Delta P)\,|t' - t''|/m \tag{12.16}$$

となる．以下でもっと複雑な例を議論しよう．

事例研究：強制調和振動子

古典物理学と量子物理学が緊密に接触する状況は重力波の検出で起こる．重力波は，遠く離れた位置にある質量が急激に運動して引き起こされる，時間的に変動する重力

場の非均一性であり，光速度で伝播する．重力波は**潮汐力**として作用し，隣り合った粒子間距離に振動を引き起こす．それらの粒子は (たとえば，干渉型検出器の鏡のように) 自由に運動する場合もあるだろうし，重い "アンテナ" の一部であって力学的なひずみとして誘起される場合もあろう[*10,*11].

重力波検出の問題は量子論とはまったく無縁と思うかもしれない．重力場は弱く，周波数は低く，その結果，量子重力の効果は全体として無視できる．測定したいものはリーマン・テンソルの成分を測定器の大きさにわたって平均した**古典的な**信号 $f(t)$ である．そこには量子論的不確定性や，測定量 $f(t)$ に下限があるはずはない．検出が難しいのは，重力がどのような測定器でも，その力学変数ときわめて弱くしか結合しないからなのである．このため，古典力学で計算するとすれば，次のような結果となる．力学変数は古典的位相空間内の軌道上を動いている．未知の信号 $f(t)$ の値はこの軌道の性質から計算できる．しかしながら，信号がきわめて微弱なら，軌道は $\hbar$ よりも小さな領域を動き回るであろう．結果的にこの事は，測定器は古典系でなく量子系として取り扱われなければならないことを意味している．そのため新たな問題が生じるが，それは 12.4 節で議論しよう．

まずはじめに**古典的な**強制調和振動子の性質を考察しよう．ノイズやその他の散逸効果が無視できるくらい十分にノイズ温度は低いと仮定する．質量と時間の単位を適当に選べば，ハミルトニアンは

$$H_0 = \tfrac{1}{2}(p^2 + x^2) - x\, f(t) \tag{12.17}$$

となる．駆動力 $f(t)$ は未知であり，x と p を測定して，その値を求めることがいまの問題である．運動方程式は

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -x + f(t) \tag{12.18}$$

となる．これらの方程式は次のようにして積分することができる．新しい変数

$$A := x\,\cos t - p\,\sin t, \qquad B := x\,\sin t + p\,\cos t \tag{12.19}$$

を定義しよう．すると

$$\dot{A} = -\sin t\, f(t), \qquad \dot{B} = \cos t\, f(t) \tag{12.20}$$

となる．したがって

$$A(t) = x_0 - \int_0^t \sin t'\, f(t')\, dt' \equiv x_0 - S(t) \tag{12.21}$$

および

$$B(t) = p_0 + \int_0^t \cos t'\, f(t')\, dt' \equiv p_0 + C(t) \tag{12.22}$$

---

*10 J. Weber, *Phys. Rev.* 117 (1960) 306.

*11 P. F. Michelson, J. C. Price, and R. C. Taber, *Science* 237 (1987)150.

となる．最後の式は実験的に決定されるべき関数 $C(t)$ と $S(t)$ を定義している．式 (12.19) から

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (x_0 - S)\cos t + (p_0 + C)\sin t \\
p(t) &= -(x_0 - S)\sin t + (p_0 + C)\cos t
\end{aligned}
\tag{12.23}
$$

が得られる．したがって $[x(t), x_0]_{\mathrm{PB}} = -\sin t$ そして $[p(t), p_0]_{\mathrm{PB}} = -\sin t$ となるから，x も p も式 (12.15) を満たす強固な変数ではないということになる．

演習問題 12.2　振動子のエネルギー $E = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$ は $[E(t), E(0)]_{\mathrm{PB}} = x_0\,C + p_0\,S \neq 0$ を満たすので，これもまた強固な変数でないことを示せ．

したがって，もし $f(t)$ の連続観測に興味があるなら，x, p, あるいは E を測定することは良い考えでない．一方，変数 $A(t)$ と $B(t)$ は明らかに強固であり [式 (12.21) と (12.22) 参照]，そのうちの**一つ** (二つともではない！) は連続的にモニターできる．たとえば，思いのほか $B(t)$ の値が乱されるという犠牲はあるが，$A(t)$ を繰り返し測定してもよいし，あるいはその逆であってもよい．$A(t)$ を連続的にモニターして，関数 $S(t)$ を求めれば，それから $f(t)$ の値が引き出せるのである．この方法は "ホモダイン"(または "位相感応型") 測定とよばれる．

次の問題は式 (12.19) に現れている記号 $\cos t$ と $\sin t$ を**具体化する**ことである．これらの値は**時計**で計れる．時計というものは抽象概念ではない．時計は一つの物理系であり，正準変数で表され，ハミルトニアンに導入されるべき力学的自由度をもつ．概念的に最も簡単な時計はポアソン括弧が $[\theta, J]_{\mathrm{PB}} = 1$ である角度 θ とその共役運動量 J で記述される**回転子**である．この時計を含む新たなハミルトニアンは

$$
H_0 = H_{\mathrm{osc}} + J \tag{12.24}
$$

という形になろう．このハミルトニアンは前と同じ方程式と同時に $\dot{\theta} = 1$ そして $\dot{J} = 0$ を与える．これらの付け加えられた運動方程式は，$\theta = \theta_0 + t$ と $J = \mathrm{const}$ という解をもつ．ここで式 (12.19) のかわりに，

$$
A = x\,\cos\theta - p\,\sin\theta, \qquad B = x\,\sin\theta + p\,\cos\theta \tag{12.25}
$$

を定義すると，

$$
\dot{A} = -\sin\theta\, f(t), \qquad \dot{B} = \cos\theta\, f(t) \tag{12.26}
$$

となるので，解は

$$
\begin{aligned}
A(t) &= A_0 - \int_0^t \sin(\theta_0 + t')\, f(t')\, dt' \\
B(t) &= B_0 + \int_0^t \cos(\theta_0 + t')\, f(t')\, dt'
\end{aligned}
\tag{12.27}
$$

となる．その結果，前と同じ記号を使って

$$
\begin{aligned}
A &= (x_0 - S)\cos\theta_0 - (p_0 + C)\sin\theta_0 \\
B &= (x_0 - S)\sin\theta_0 + (p_0 + C)\cos\theta_0
\end{aligned}
\tag{12.28}
$$

が得られる．式 (12.27) の右辺の積分と A_0，B_0 とのポアソン括弧式は 0 となるので，$A(t)$ と $B(t)$ は強固な変数であることに注意せよ．

この難点はこの回転子時計を具体化する方法がわからないことである．この系は固有値が下限をもたないハミルトニアンを与えることになり，量子論では受け入れられないものである．(ウンルーは近似的な構成法を提案した[*12].) 12.7 節で示すように，有限個の量子状態をもつ回転子時計を構成することも可能だが，有限なヒルベルト空間では (θ だけは別として) $\cos\theta$ も $\sin\theta$ も演算子としてきちんと定義できない．

より実際的にははじめの振動子と同一の振動数をもつ**振動子時計**を選択することである．その時計は，たとえば，適切な変換器を通して機械的な振動子に結合した電気的な LC 回路でもよい[*13]．第 2 の振動子の力学変数を y，p_y としよう．ハミルトニアンは

$$
H_0 = \tfrac{1}{2}({p_x}^2 + x^2) - f(t)\,x + \tfrac{1}{2}({p_y}^2 + y^2) \tag{12.29}
$$

となる．ただし，ここでの p_x は以前の p を表す．運動方程式は前と同じものに $\dot{y} = p_y$，$\dot{p}_y = -y$ が加わるが，それらは容易に解ける．

$$
A := x\,y + p_x\,p_y, \qquad\qquad B := x\,p_y - p_x\,y \tag{12.30}
$$

そして (後で使うために)

$$
D := \tfrac{1}{2}({p_x}^2 + x^2 - {p_y}^2 - y^2) \tag{12.31}
$$

を定義しよう．これらの力学変数は (係数 2 を掛けた) 角運動量の成分間のポアソン括弧式

$$
[A, B]_{\mathrm{PB}} = 2D, \qquad [B, D]_{\mathrm{PB}} = 2A, \qquad [D, A]_{\mathrm{PB}} = 2B \tag{12.32}
$$

を満たす．量子化を考えるとき，この性質は重要な結果をもたらす．A (あるいは B, D) の観測値は**整数**であり，したがって古典力学のように**連続的**に時間発展することはできない．直観的には，一つの固有値から別の固有値へジャンプする確率は次々と行われる観測の時間間隔に依存するだろう．12.5 節で述べるが，詳しく計算すると，対象系の自然な時間スケールについて，非常に多数回測定すると，その系は変化しないように見える．つまり，A の値は決して変化しないのである．この現象は**量子ゼノン効果**とよばれる．これを避けるためには，測定しても引き続く固有値を識別せず，したがって，その系の時間発展を妨害しないような**ファジー**な測定をしなければならない．

[*12] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* 19 (1979)2888.

[*13] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* 52 (1980) 341.

強制調和振動子の古典的運動方程式に戻ろう．振動子時計を使うと，

$$\dot{A} = p_y\, f(t), \qquad \dot{B} = -y\, f(t) \tag{12.33}$$

となる．したがって $[A, \dot{A}]_{\mathrm{PB}} \neq 0$ そして $[B, \dot{B}]_{\mathrm{PB}} \neq 0$ となる．このことから A も B も強固でない．すでに演習問題 12.2 で D が強固でないことを知っている．

式 (12.33) は具体的に解けて，

$$A(t) = A_0 + \int_0^t p_y(t')\, f(t')\, dt' \tag{12.34}$$

となる．したがって $p_y = -y_0 \sin t + p_{y0} \cos t$ であることを利用すれば，

$$A(t) = (x_0 - S)\, y_0 + (p_{x0} + C)\, p_{y0} \tag{12.35}$$

となる．$B(t)$ についても同様な解がある．式 (12.28) と比べれば回転子時計と振動子時計の本質的な違いがわかる．変数 $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のポアソン括弧は 0 である．一方，振動子時計の変数は $[y_0, p_{y0}]_{\mathrm{PB}} = 1$ を満たすが，そのため $[A_0, A(t)]_{\mathrm{PB}} = C\, x_0 + S\, p_{x0} \neq 0$ となる．したがって，A_0 を測定すると，$A(t)$ の値に予測できないゆらぎを与える．そこで，A を測定する装置の力学変数を Q, P とすると，

$$\Delta A_0\, \Delta A(t) \simeq |C\, x_0 + S\, p_{x0}|\, \Delta Q\, \Delta P \tag{12.36}$$

となる．通常，$\Delta Q\, \Delta P$ はその量子極限 $\hbar/2$ よりはるかに大きい．

ここで重要なのは，式 (12.36) の右辺が時計の変数 y，p_y には関係ないのに対し，$A(t)$ それ自身は振動子時計の振幅に比例していることである．信号 $f(t)$ が弱くても，原理的に後者は好きなだけ大きくできるので，$A(t)$ それ自身と比較すれば $A(t)$ の不確定さは無視できる程度に小さくできる．時計は本質的に微弱信号 $f(t)$ を**増幅する**のに役立っており，理論的には $f(t)$ を任意の精度で測定できる．唯一問題となるのは，上の方程式で記述されるような結合を実験室で具体化することである．

12.3 静的パラメーターの評価

量子的粒子は古典的パラメーターを測定するための探査用に使える．たとえば，図 1.3 (7 ページ) では，偏光板の方解石結晶に対する回転角を評価するために光子ビームが使われていたことを知っている．光子はまた，干渉計の二つの鏡間の距離を測定するためにも使われることが多い．これらの鏡は重く，その量子論的拡散 $(\hbar t/m)^{1/2}$ はそれらの間の距離を測定するために必要な時間間隔ではまったく無視できる．したがってこれらの鏡を固定された古典的物体と見なすことは正当化される．

図 12.1 に描かれている実験では，ビーム分離器間の距離と二つの鏡 (濃い線で示されている) 間の相対的距離が変われば，その変化は干渉計の出口部分での位相差として現れる．この位相差は二つの光検出器での相対的なカウント数に影響する．この実験の最終結果は図 1.3 の実験と同一である (45 ページを参照).

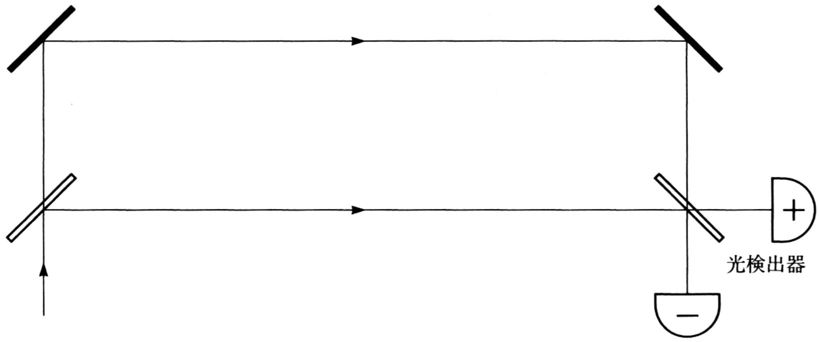


図 12.1　マッハ–ツェンダー干渉計による位相差の検出

このような実験が，フォン・ノイマンの古典的著作[*14]の中で提案されている形式的な枠組に適していないことは明らかである．そこでは自己共役な演算子で表せられる**力学変数**の観測に力点が置かれている．フォン・ノイマンの理論が言及していない別のタイプの測定とは，たとえばコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ のパラメーター α のような，一定の形をした波動関数の未知のパラメーターを決定することである．異なるコヒーレント状態は直交しないので，α の値についてはっきりした答を得ることは不可能である．たかだか確率分布が得られるにすぎない．現実的にはこのためにきわめて複雑な統計的手法を使わざるをえない込み入った問題が出てくる[*15]．ここでは初歩的な問題を分析するだけにしよう．

偏極パラメーターの決定法

角度のコヒーレント状態 $|\theta,\phi\rangle$ で準備されたスピン j の粒子があり，その角度 θ と ϕ を計算しなくてはならないとしよう．これらは**古典的**パラメーターであり，その値はスピン j がつくられた巨視的装置の向きによって決定される．

最大検証 (フォン・ノイマン型観測) が $(2j+1)$ 個の結果しかもたらさないのに対し，θ と ϕ は連続変数だから，式 (9.81) のように，直交しない POVM を含む測定法が最良であろう．この問題で当然使うべき POVM は，式 (10.144) に定義されているものである．単位球を小さな領域 $\sin\theta\, d\theta\, d\phi$ に分け，その一つ一つに対して正値演算子

$$\mathsf{A}_{\theta\phi} = |\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|\,\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,(2j+1)/4\pi \tag{12.37}$$

を定義する．この演算子は $\int \mathsf{A}_{\theta\phi} = \mathbb{1}$ を満たすので，実際に POVM を構成している．

検証の結果，ある $\mathsf{A}_{\theta'\phi'}$ が得られる確率は，式 (9.79) によって，$p_{\theta'\phi'} = \langle\theta,\phi|\mathsf{A}_{\theta'\phi'}|\theta,\phi\rangle$

---

*14 J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) [E. T. Beyer による英訳 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press(1955) がある] Chapt. 6.

*15 C. W. Helstrom, *Internat. J. Theor. Phys.* 11 (1974) 357.

となる．式 (10.146) を使えば，

$$p_{\theta'\phi'} = \cos^{4j}(\Theta/2)\,\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'\,(2j+1)/4\pi \tag{12.38}$$

が得られる．ここで，Θ は二つの方向 (θ,ϕ) と (θ',ϕ') のなす角である．

ひとたび検証が実行され，方向が (θ',ϕ') と決まれば，準備されていた方向 (θ,ϕ) に対する**ア・ポステリオリ**確率分布が求められる．**ア・プリオリ**確率分布が等方的，つまり $\sin\theta\,d\theta\,d\phi/4\pi$ であったとすると，**ア・ポストリオリ**確率はベイズ解析 (2.7 節) によって求められる．その結果は $p_{\theta\phi} = \cos^{4j}(\Theta/2)\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,(2j+1)/4\pi$ となる．

演習問題 12.3　$\int p_{\theta\phi} = 1$ を証明せよ．

演習問題 12.4　特に $j=\frac{1}{2}$ の場合，上の結果を式 (9.110) の場合と比較せよ．後者は POVM というより，むしろフォン・ノイマン観測に相当する．　★

解答：この特別な場合は二つの方法とも情報量の利得は同一である．大きな j ではこの事は成り立たない．

物　理　定　数

そのほか広く行われている別のタイプの測定は，素粒子の質量や磁気モーメントなどといった物理定数の測定である．これらの未知定数は c 数であり，古典的パラメーターと同じように測定される．どのように準備したかがわかっている粒子が量子論的に検証されるのである．これらの検証は，たとえばハミルトニアン (1.4) の中の m や μ のように，未知の物理量が数値パラメーターとして表されている相互作用ハミルトニアンによって記述される．そして実験結果に一番よく合う値をそれらのパラメーターの値とする．

12.4　時間的に変動する信号

ここで，微弱な古典的信号を測定するという，よりいっそう困難な問題に戻ろう．このためには (既知の構造をもつ力学系である) 検出器にその信号を結合させ，ハミルトニアン H が未知の信号に依存する項を含むようにすればよい．このとき，検出器の力学変数の時間依存性を測定することで，H 全体が，未知の信号を含めて再構成できる．12.2 節で論じたような方法で行う信号検出の例は，**古典の**レベルである．

信号が極端に微弱な場合には，検出器の量子論的な性質が無視できない．その場合には古典的信号の連続的な性質と量子論的装置の不連続スペクトルの間にあつれきが起こる．さらに量子系は固有状態の重ね合せとなっているであろうが，最終的な結果は**量子**系では記録できない．その検出器はもう一つの古典的な信号，つまり一連の実数を指示する適切な装置 (メーター) によって “測定” されなければならない．ここで，これらの二つの古典信号間に，量子相関が介在することによって引き起こされるひず

みを検証してみよう．優れたメーターは量子検出器の多数のレベルをまとめあげるような，**適当**な分解能をもつべきだということがわかる．貧弱な分解能では不正確な結果しか得られなのは明らかだが，あまりにも鋭い分解能もまた望ましくない．前者では入力信号と出力信号間の対応を損なってしまうし，また，装置が個々の固有値までの完全な分解能をもっている場合には，検出過程がうまく機能しなくなるからである．

ファジーな測定

具体的な例として，この章のはじめに古典的な言葉とハイゼンベルク描像で論じた(形式的にはこの二つは同一である) 簡単化したシュテルン–ゲルラッハの実験に戻ろう．ここではシュレーディンガー描像を使おう．未知のハミルトニアンを観測によって決定しなければならない状況ではこの描像の方が適切である．問題を扱いやすくするにはさらに簡単化した方がよい．初期状態がスピノール $\binom{\alpha}{\beta}$ で記述されているスピン $\frac{1}{2}$ の粒子を考えよう．それ以外の自由度はなく，この段階では粒子に力は働いていない．ここでの問題は，観測値 ± 1 をもつとされる力学変数 σ_z を測ることである．

この測定を実行する“メーター”は，測定される変数の値を示す 1 個の無次元の自由度 q をもつと理想化する．共役な自由度 p は $[\mathsf{q},\mathsf{p}]=i\hbar$ を満たす．この測定過程を記述するハミルトニアンの核心部分は

$$\mathsf{H}=g(t)\sigma_z\mathsf{p} \tag{12.39}$$

となる．ただし，$g(t)$ は $t=0$ 近傍に狭いサポートをもち，$\int g(t)\,dt=1$ を満たす．

$\phi(q)$ がメーターの初期波動関数を表すとしよう．ハミルトニアン (12.39) によって生成される時間発展は

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\otimes\phi(q)\;\to\;\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix}\otimes\phi(q-1)+\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}\otimes\phi(q+1) \tag{12.40}$$

となる．この過程を図 12.2 に示したが，$\phi(q)$ は $q=0$ に鋭いピークをもっていると仮定されており，そのため測定前のメーターの位置は $q=0$ 近傍にあることが最も確からしい．式 (12.40) の右辺の意味は次の通りである．$q=1$ 近傍にメーターがあって

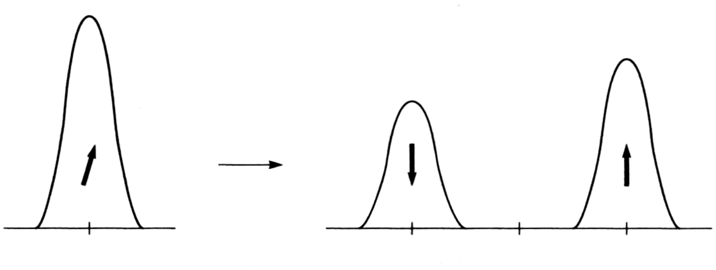


図 12.2　式 (12.39) を図示したもの．この図と次の図では $\alpha=0.8$，$\beta=0.6$ である．濃い矢印はスピンの向きを表す．

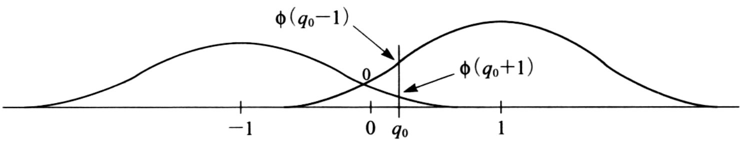


図 12.3 これは，メーターの初期位置が固有値 ±1 の間隔より不確定なので，測定が "ファジー" となっていることを除けば，図 12.2 図の終状態と同じである．

上向きスピン粒子を見つける確率振幅は $\alpha\phi(q-1)$ であり，$q=-1$ にメーターがあって下向きスピン粒子を見つける確率振幅は $\beta\phi(q+1)$ である．

"σ_z の測定値" とよばれるものはメーターの最終位置である．状態ベクトル (12.40) は可能な最終位置にメーターを観測する確率を記述している．理想的には ϕ の幅は 0 のはずで，測定の結果は ±1，つまり σ_z の固有値の一つとなるべきである．しかしながら，実際に測定される σ_z の値は $\Delta\mathsf{q}$，つまりメーターの波動関数の広がりだけ，理想的な値から外れるであろう．この不一致は "技術的困難" といった自明なものではなく原理的なものである．実際後で見るように，一連の固有値の間隔より $\Delta\mathsf{q}$ を大きくとるのが有利となる場合もありうる．

図 12.3 には $\Delta\mathsf{q}$ が大きい状況が描かれている．q_0 と q_0+dq_0 の間にメーターを観測する確率は

$$P(q_0)\,dq_0 = \Big[|\alpha|^2\ |\phi(q_0-1)|^2 + |\beta|^2\ |\phi(q_0+1)|^2\Big]\,dq_0 \tag{12.41}$$

である．もし，観測値 q_0 が式 (12.41) の右辺の第 2 項のいずれもが寄与する値であれば，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の終状態は σ_z の固有状態ではない．それは適切に規格化され，$q=q_0$ で計算された式 (12.40) の右辺で与えられる状態である．

後の便利のために，固有値 λ_m をもつ任意の演算子 A (上で考えた簡単な場合では A は σ_z，$\lambda_m=\pm1$ であった) を測定するとして，これまでの式を密度行列で書き換えておこう．A の対角表示で，量子系の密度行列を ρ_{mn}，メーターの初期密度行列を $\Phi(q',q'')=\phi(q')\,\overline{\phi(q'')}$ としよう．結合系の密度行列は

$$\rho_{mn}(q',q'') = \rho_{mn}\,\Phi(q',q'') \tag{12.42}$$

である．

ハミルトニアン (12.39) は $g(t)\mathsf{Ap}$ となり，また，式 (12.40) のかわりに，今度は

$$\rho_{mn}(q',q'')\ \to\ \rho_{mn}(q'-\lambda_m,q''-\lambda_n) \tag{12.43}$$

となる．この表現には互いに相関をもった量子系とその系を測定するために使用されるメーターの状態に関するあらゆる情報が含まれている．

ここで，もう量子系について興味がないとすれば，それに関する添字についてトレースをとることで，メーターについての縮約された密度行列が得られる．こうして，メー

ターと量子系との間の相互作用が終了した後，任意の観測関数 $f(\mathsf{q})$ の平均値は

$$\langle f(\mathsf{q})\rangle = \sum_j w_j \int \Phi(q-\lambda_j\,,q-\lambda_j)\,f(q)\,dq \tag{12.44}$$

となる．ただし，$w_j = \rho_{jj}$ は 相互作用の直前に (そしてまた直後に) A の j 番目の固有状態がとりうる確率である．たとえば，メーターが $\phi(q) = \phi(-q)$ のように対称的に準備されていれば

$$\langle \mathsf{q}\rangle = \sum_j w_j\,\lambda_j \tag{12.45}$$

そして

$$\langle \mathsf{q}^2\rangle = \sum_j w_j \left(\int q^2|\phi(q)|^2 dq + \lambda_j^2\right) \tag{12.46}$$

となる．したがって，

$$\langle \mathsf{q}^2\rangle - \langle \mathsf{q}\rangle^2 = (\Delta \mathsf{A})^2 + (\Delta \mathsf{q})^2 \tag{12.47}$$

が得られる．ただし，

$$(\Delta \mathsf{A})^2 = \sum_j w_j\,\lambda_j^2 - \left(\sum_j w_j \lambda_j\right)^2 \tag{12.48}$$

は量子系の分散，そして

$$(\Delta \mathsf{q})^2 = \int q^2\,|\phi(q)|^2\,dq \tag{12.49}$$

はメーターの分散である．

逆に，メーターそれ自体ではなく (後で使うために) 量子系に興味があるなら，縮約された量子系の密度行列 ρ'_{mn} は q' と q'' について行列のトレースをとり，

$$\rho'_{mn} = \int \rho_{mn}(q-\lambda_m\,,q-\lambda_n)\,dq = \rho_{mn}\,S_{mn} \tag{12.50}$$

のように得られる．ただし，S_{mn} は **コヒーレンス行列**[*16]

$$S_{mn} := \int \phi(q-\lambda_m)\,\overline{\phi(q-\lambda_n)}\,dq \tag{12.51}$$

である．

演習問題 12.5　$S_{mn} = \langle e^{i\mathsf{p}(\lambda_m-\lambda_n)/\hbar}\rangle$ が成り立つことを示せ．

たとえば，メーターがコヒーレントな状態 $\phi(q) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}\,e^{-q^2/4\sigma^2}$ に準備されているとすれば，$\Delta\mathsf{q} = \sigma$ であり，また

$$S_{mn} = \exp[-(\lambda_m-\lambda_n)^2/8\sigma^2] \tag{12.52}$$

[*16] A. Peres, *Phys. Rev. D* 39 (1989) 2943.

となる．明らかに (任意の ϕ について)，$S_{mm} \equiv 1$ であり，その結果，対角行列要素 ρ_{mm} は測定過程で影響されない．一方，ρ の非対角要素は S_{mn} という因子だけ小さくなり，図 12.2 のように，ずらしを受けた波動関数が互いに直交しているような場合には 0 にさえなってしまう．しかしながら，図 12.3 のように $\Delta \mathsf{q} \gtrsim |\lambda_n - \lambda_{n-1}|$ ならば，ρ の非対角要素は完全には 0 とならない．特に，縮退している固有値があれば，それらの固有値に対応する部分行列 ρ_{mn} はまったく影響を受けない．

一連の連続測定

時間に依存する信号を解析するには，時刻 $t_1, t_2, \cdots$ などに対応した**一連の数字**が得られるように，一連の測定を数多く行う必要がある*17．たとえば，式 (12.39) のように，測定がメーターと対象系間の**ごく短時間で瞬間的な相互作用**として定義されるような場合には，連続測定などは存在しない．特に，引き続く観測が重ならないためには，時間間隔 $t_k - t_{k-1}$ は $g(t)$ の持続時間よりも大きくなければならない．

一方，有限の時間間隔をもつ測定も考えられる．そこでは関数 $g(t)$ が，対象系に特有な時間スケールに比べ，十分長い時間にわたって広がっている．そのような測定では **1 個の数字**がもたらされるだけだが，12.6 節でわかるように，それは最も良い場合でも観測された変数の時間平均に相当しているだけである．たとえば，原子核の崩壊を待ち構えているガイガー・カウンターのような受動型検出器が考えられる．そのような装置は，測定に関していま述べているような定義にはまったく対応していない．それは，いくつかの崩壊チャンネルをもった不安定系として記述するのが最善である*18．

量子論は，信号のモニターにさいして，それがどのように微弱でも，どのように短かな時間内でも，何ら基本的な制限を付けない．制限が生じるのは，何か特別な検出器を使おう，あるいは使わざるをえないという理由がある場合だけである．たとえば，重力波はきわめて微弱にしか物質に結合しないために，検出器は重量物のアンテナ *11，あるいは巨大な干渉計*19とならざるをえない．したがって，量子論的平均を評価する目的で多数の同一の重力波検出器をそろえることは実行上不可能である．**1 回ごとの**測定からできるだけ多くの情報を引き出さなくてはならない．一般に古典的時間発展に類似した量子論的時間発展であることが，そして出力信号が入力信号の増幅された複製であることが望ましい．信号のひずみは最小となるべきである．これらの目的がどのくらい達成されているかをしらべてみよう．

時刻 $t_1, \cdots, t_N$ に一連の測定を行い，メーターの座標が $\mathsf{q}_1, \cdots, \mathsf{q}_N$ であったとし

---

*17 C. M. Caves, *Phys. Rev. D* 33 (1986) 1643; 35(1987) 1815.

*18 A. Peres, in *Information Complexity and Control in Quantum Physics*, ed. by A. Blaquière, S. Diner, and G. Lochak, Springer, Vienna (1987) p. 235.

*19 A. Abramovici, W. E. Althouse, R. W. P. Drever, Y. Gürsel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spero, K. S. Thorne, R. E. Vogt, R. Weiss, S. E. Whitcomb, and M. E. Zucker, *Science* 256 (1992) 325.

よう．検出器とメーターの初期密度行列は式 (12.42) を一般化した

$$\rho_{mn}(q_1',q_1'',\cdots,q_N',q_N'') = \rho_{mn}\prod_j \Phi_j(q_j',q_j'') \tag{12.53}$$

である．結合系のハミルトニアンは式 (12.39) と同様な記号で，

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{A}\sum_j g(t-t_j)\,\mathsf{p}_j \tag{12.54}$$

である．ここで H_0 は検出器の力学変数だけを含み，メーターのものは含まない．前と同様に，ハミルトニアンの中に $\mathsf{p}_j{}^2/2m_j$ のような項は存在しない．つまり，メーターの質量は非常に重いと仮定しているので，その波束の各瞬間における広がりは無視できる．

測定と測定の間では H_0 によってユニタリー発展し，$\rho \to \mathsf{U}\rho\mathsf{U}^\dagger$ となる．一方，各時刻 $t=t_j$ のごく近傍では，式 (12.43) と同様な変換

$$\rho_{mn}(\cdots,q_j',q_j'',\cdots) \;\to\; \rho_{mn}(\cdots,q_j'-\lambda_m,q_j''-\lambda_n,\cdots) \tag{12.55}$$

が行われる．新しい密度行列では，不連続な添字 mn に関し検出器と j 番目のメーターの座標が非自明的に絡み合っていることに注意しよう．

式 (12.55) には検出器と各メーターの状態に関するあらゆる情報が含まれている．ここで，いろいろな問題を考えることができる．たとえば，すでに検出器と相互作用してしまったメーターには関心がなく，検出器だけに興味があるとすれば，その正味の観測は式 (12.50) によって与えられ，

$$\rho_{mn} \;\to\; \rho'_{mn} = \rho_{mn}\,S_{mn} \tag{12.56}$$

となる．結局その後のメーターは，もし観測するとすれば，

$$w_j = \sum_{mn} U_{jm}\,\rho'_{mn}\,\overline{U_{jn}} \tag{12.57}$$

として，式 (12.45), (12.46) と同様な結果を与えるであろう．ここで，U は直前の測定で状態 ρ'_{mn} とされた検出器のその後の自由な時間発展を表すユニタリー行列である．

また違うメーターの読みを比較することに興味をもつかもしれない．たとえば，連続して N 回測定するが，時刻 $t_2,\cdots,t_{N-1}$ で得られる結果には関心がなく，期待値 $\langle(\mathsf{q}_1-\mathsf{q}_N)^2\rangle$ を予言したいような場合である．前と同様に，ρ_{mn} を最初の測定直前における検出器の密度行列としよう．1 回目の測定で

$$\rho_{mn}\,\Phi_1(q_1',q_1'') \;\to\; \rho_{mn}\,\Phi_1(q_1'-\lambda_m,q_1''-\lambda_n) \equiv \rho^{(1)}_{mn}(q_1',q_1'') \tag{12.58}$$

と変換する．式 (12.58) ではそれ以降の測定に関わる q_j は簡単のため省略してある．1 回目と 2 回目の測定の間には再びユニタリー発展，$\rho^{(1)} \to \rho^{(2)} = \mathsf{U}^{(1)}\rho^{(1)}\mathsf{U}^{(1)\dagger}$ があるので，t_2 の直前では，

$$\rho^{(2)}_{rs}(q_1',q_1'') = \sum_{mn} U^{(1)}_{rm}\,\overline{U^{(1)}_{sn}}\,\rho^{(1)}_{mn}(q_1',q_1'') \tag{12.59}$$

となる．ここで 2 回目の測定を実行する．計算したい表式は $\langle(\mathsf{q}_1-\mathsf{q}_N)^2\rangle$ であり，この計算にはその測定結果は必要ないので，密度行列で q_2' と q_2'' について行列のトレースをとる．式 (12.50) によれば，この結果，$\rho_{rs}^{(2)} \to \rho_{rs}^{(2)} S_{rs}$ のように非対角要素が落ちてしまう．この後繰り返される測定も同様に取り扱える．

12.5 量子ゼノン効果

今度は測定が (図 12.2 のように) **鋭く**，その結果 $S_{rs}=\delta_{rs}$ であるような特別な場合を考えよう．式 (12.59) に戻ると，t_2 の直後ではこの式により，密度行列は対角要素 $\rho_{rr}^{(2)}$ だけをもつようになる．そして，3 回目の測定まではユニタリー発展 $\rho^{(2)} \to \rho^{(3)}=\mathsf{U}^{(2)}\rho^{(2)}\mathsf{U}^{(2)\dagger}$ するので，

$$\rho_{st}^{(3)}(q_1',q_1'')=\sum_r U_{sr}^{(2)}\,\overline{U_{tr}^{(2)}}\,\rho_{rr}^{(2)}(q_1',q_1'') \tag{12.60}$$

となる．ここで再び鋭い 3 回目の測定によって対角要素

$$\rho_{ss}^{(3)}(q_1',q_1'')=\sum_r V_{sr}^{(2)}\,\rho_{rr}^{(2)}(q_1',q_1'') \tag{12.61}$$

だけが残る．ただし，

$$V_{sr}^{(2)} := |U_{sr}^{(2)}|^2 \tag{12.62}$$

である．一般的な規則は明らかである．同様な操作を $t_4,\cdots,t_{N-1}$ で繰り返し，$\langle(\mathsf{q}_1-\mathsf{q}_N)^2\rangle$ の値を求めるためには必要のない中間の時刻の q_j についてトレースをとる．その結果，t_{N-1} での測定後には

$$\rho_{xx}^{(N-1)}(q_1',q_1'')=\sum_{wv..}\sum_{..sr} V_{xw}^{(N-2)}\,V_{wv}^{(N-3)}\cdots V_{ts}^{(3)}\,V_{sr}^{(2)}\,\rho_{rr}^{(2)}(q_1',q_1'') \tag{12.63}$$

を要素とする対角行列が得られる．そして最終的に N 回目の測定では

$$\rho_{zy}^{(N)}(q_1',q_1'';q_N',q_N'')=\sum_x U_{zx}^{(N-1)}\,\overline{U_{yx}^{(N-1)}}\,\rho_{xx}^{(N-1)}(q_1',q_1'')\,\Phi_N(q_N'-\lambda_z,q_N''-\lambda_y)$$

が得られる．興味があるのは $\langle(\mathsf{q}_1-\mathsf{q}_N)^2\rangle$ だから，測定器の添字に関するトレースを取り，q_1 と q_N を含む縮約された密度行列だけが必要である．それは

$$\rho(q_1',q_1'';q_N',q_N'')=\sum_{zr} W_{zr}\,\rho_{rr}^{(2)}(q_1',q_1'')\,\Phi_N(q_N'-\lambda_z,q_N''-\lambda_z) \tag{12.64}$$

となる．ただし，

$$W_{zr} := \sum_{x\cdots s} V_{zx}^{(N-1)}\,V_{xw}^{(N-2)}\cdots V_{ts}^{(3)}\,V_{sr}^{(2)}, \tag{12.65}$$

そして

$$\rho_{rr}^{(2)}(q_1',q_1'')=\sum_{mn} U_{rm}^{(1)}\,\overline{U_{rn}^{(1)}}\,\rho_{mn}\,\Phi_1(q_1'-\lambda_m,q_1''-\lambda_n) \tag{12.66}$$

である．

ここで，測定回数 N を大きくして時間間隔を非常に短くし，ほぼ連続的なモニターを実行してみたいと思うかもしれない．しかし，すぐわかるが，そうすると情報量が完全に**失われる**ことになる．等しい時間間隔 $\tau = (t_N - t_1)/(N-1)$ で測定する特別な場合を考え，$T = t_N - t_1$ を一定にして $N \to \infty$ としてみよう．ここで

$$\mathsf{h} := \int_{t_n}^{t_n+\tau} \mathsf{H}(t)\,dt \tag{12.67}$$

とする．そうすると短い時間間隔 τ では

$$\mathsf{U} = e^{-i\mathsf{h}} = \mathbb{1} - i\mathsf{h} - \tfrac{1}{2}\mathsf{h}^2 + \cdots \tag{12.68}$$

となり，したがって

$$V_{sr} := |U_{sr}|^2 = \delta_{sr} - \delta_{sr}\sum_j |h_{sj}|^2 + |h_{sr}|^2 + O(\mathsf{h}^4) \tag{12.69}$$

となる．式 (12.65) の V_{mn} は単位行列と $(TH/N)^2$ のオーダーだけしか違わないことがわかる．式 (12.65) にはそのような項が $N-2$ 個あるので，$W_{zr} = \delta_{zr} + O(T^2H^2/N)$ となる．したがって，$N \to \infty$ の極限では，あらゆる U_{mn} と V_{mn} が単位行列で置き換えられ，

$$\rho(q_1', q_1''; q_N', q_N'') = \sum_j w_j\, \Phi_1(q_1' - \lambda_j, q_1'' - \lambda_j)\, \Phi_N(q_N' - \lambda_j, q_N'' - \lambda_j) \tag{12.70}$$

が得られる．ただし，いつものように $w_j = \rho_{jj}$ である．したがって，式 (12.45), (12.46) を使って，

$$\langle(\mathsf{q}_1 - \mathsf{q}_N)^2\rangle = (\Delta\mathsf{q}_1)^2 + (\Delta\mathsf{q}_N)^2 \tag{12.71}$$

が得られる．

この結果はメーターの初期と終期の $\Delta\mathsf{q}$ だけに依存し，繰り返し測定している検出器の力学には依存していない．検出器の時間発展はメーターとの連続的な相互作用によって，無力化されてしまったように見える．このことは**量子ゼノン効果**[*20,*21]とよばれるが，"**量子ゼノン・パラドックス**"といわれることもある．これにはパラドックス的なものは何もない．起ったことは単に量子系がそれと連続的に相互作用するメーターによって圧倒されてしまっているだけである．ゼノン効果は 3 準位原子で実験的に観測されたが，そこでは頻繁にレーザーパルスを照射して輻射遷移を禁止し，これらの原子がどの準位にあるかを測定している[*22]．

[*20] ギリシアの哲学者，エレアのゼノンは次のようなパラドックスを提案した.「どんなものでも空間的にそれ自身に一致しているなら，それは静止している．一本の矢は飛んでいる各瞬間において空間的にその矢自身と一致しており，したがって飛行期間中ずっと一致している．それゆえに飛んでいる矢は静止している.」[F. Cajori, *Am. Math. Mon.* 22 (1915) 1, 292].

[*21] 実際これははるか昔，測定を急速に繰り返すことによって，量子系をある量子状態から他の任意の量子状態に移らせるためにフォン・ノイマンによって工夫された過程の特別な場合である (386 ページの脚注の文献*14 を参照).

[*22] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* 41 (1990) 2295.

上で導いたことは，本質的に $\Delta\mathbf{q} \ll |\lambda_j - \lambda_{j-1}|$ の結果から出てくる $S_{mn} = \delta_{mn}$ という仮定に依存している．粗い分解能のメーターでは検出器の運動を完全にくい止めることはできず，もし，$\Delta\mathbf{q}$ が τ^{-1} のように増加するとすれば，τ はいくらでも望むだけ小さくできる[*23]．これらの二つの極端な場合の中間として"部分的なゼノン効果"が可能であり，これは実験的検証も容易である[*24]．

事例研究：時間に依存するトルクの検出

一例として，時間に依存するトルク $\omega(t)$ が角運動量 $\mathbf{J}$ をもつ回転子に作用していると仮定してみよう．具体的な計算によれば，頻繁に鋭敏な測定を多数回繰り返せば回転子の運動は止められることがわかる．あまり頻繁でないか，あるいはファジーな測定では部分的なゼノン効果が現れるが，それは古典極限で消滅してしまう．

回転子のハミルトニアンは (古典的な書き方で)

$$H = H_0 + \omega(t)\, J_y \tag{12.72}$$

である．回転子が球対称ならば，$H_0 = \mathbf{J}^2/2I$ は運動の定数であり，無視できる．(古典的，あるいは量子論的) 運動方程式は

$$\dot{J}_x = \omega(t)\, J_z\,, \qquad \dot{J}_y = 0, \qquad \dot{J}_z = -\omega(t)\, J_x \tag{12.73}$$

となる．これらの解は

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x0}\, \cos\tau + J_{z0}\, \sin\tau \\ J_y &= J_{y0} \\ J_z &= -J_{x0}\, \sin\tau + J_{z0}\, \cos\tau \end{aligned} \tag{12.74}$$

である．ただし

$$\tau = \int_0^t \omega(t)\, dt \tag{12.75}$$

である．

ここで，問題は $\mathbf{J}$ の運動を観測して $\omega(t)$ を決定することである．古典物理学では初期値 J_{k0} が既知とされており，続いて J_x と J_z を測定すれば

$$\tau = \tan^{-1}\left(\frac{J_x}{J_z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{J_{x0}}{J_{z0}}\right) \tag{12.76}$$

のように $\tau = \tau(t)$ が与えられ，これにより $\omega(t)$ が得られる．残念ながら，この方法は量子系には適用できない．それは J_x と J_z が交換せず，式 (12.76) に意味がなくなるからである．"回転子" がスピン $\frac{1}{2}$ の粒子のときに何が行えるかを詳しくしらべてみよう．それからさらに大きなスピン j の粒子を考えることにする．

---

*23 C. M. Caves and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* 36 (1987) 5543.

*24 A. Peres and A. Ron, *Phys. Rev. A* 42 (1990) 5720.

スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の状態は $\mathbf{m} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ として，密度行列

$$\rho = \tfrac{1}{2}\,(\mathbb{1} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{12.77}$$

で記述される．運動方程式 (12.74) は線形なので，$\mathbf{J}$ と同様 $\mathbf{m}$ によっても満足される．たとえば，もし最初 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ であったとすると，$\mathbf{m}$ の運動は xz 面に留まる．コヒーレンス行列 S_{mn} は対角要素 1 と非対角要素 $S_{12} = S_{21} = S < 1$ (簡単のために実数と仮定した) をもつ．この記号を使えば，縮約された密度行列 (12.50) は単に

$$m'_x = S m_x\,, \qquad\qquad m'_z = m_z \tag{12.78}$$

となる．

これはまた，直前の測定からの時間間隔における積分量を $\theta = \int \omega(t) dt$ として，

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_z \end{pmatrix} \;\to\; \begin{pmatrix} m'_x \\ m'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S\,\cos\theta & S\,\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_z \end{pmatrix} \tag{12.79}$$

とも書ける．ガウス型の $\phi(q)$ では $S = \exp[-1/8(\Delta\mathsf{q})^2]$ となることを思い起こそう．$\Delta\mathsf{q} \gg 1$ という極端な場合では $S \simeq 1$，つまりベクトル $\mathbf{m}$ の回転は乱されない．(もちろん，観測はしていない.) 他方 $\Delta\mathsf{q} \ll 1$ (したがって $S \simeq 0$) という極限は鋭敏な測定に対応する．

σ_z を繰り返し測定するとしよう．最初に，回転子は $\langle \sigma_z \rangle = 1$ としておく．その後，測定を行うと一連の $+1$ と -1 からなる時系列が得られるが，それから関数 $\tau(t)$ を再構成しなければならない．明らかにスピン $\frac{1}{2}$ 粒子はトルク検出器として良いものではない．ヒルベルト空間が小さ過ぎるのである．その一方でこれらの粒子は手軽に使える (つまり，紙と鉛筆の実験で間に合う) ので，同一の検出器を多数 (N 個) 使える．いろいろな状況下での期待値 $m_z = \langle \sigma_z \rangle$ をしらべてみよう．

次の二つの図は，$\omega = 1$ (したがって $\tau = t$) という簡単な場合における，$t = 0$ から $t = 5\pi/2$ までの $m_z(t)$ のふるまいを示している．点線は $\Delta\mathsf{q} \gg 1$ という擾乱のない場合の時間発展 $m_z = \cos t$ である．(もちろん実際に点線の一つの点を求めるためには，$N \gg (\Delta\mathsf{q})^2$ となるような多数回の測定をして N 個のデータを平均する必要がある.) 図 12.4 には，この理想的な結果が，$S = 0$ (すなわち，鋭敏な測定) の場合で 10, 30 そして 90 回の測定を等間隔に行った結果と比べられている．明らかに，測定回数が多くなればなるほど，m_z の変動が少なくなる．(これが量子ゼノン効果である.) いずれの場合でも，m_z は指数関数的に減衰する．擾乱を受けていない場合のように振動はしない．このことは式 (12.79) の行列の固有値を計算すれば証明できる．固有値は永年方程式 $\lambda^2 - \lambda\cos\theta\,(1 + S) + S = 0$ によって与えられ，

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\Big[(1 + S)\cos\theta \pm \sqrt{(1 + S)^2\cos^2\theta - 4S}\,\Big] \tag{12.80}$$

となる．$S = 0$ ならば，$\lambda_+ = \cos\theta$ をもつ固有ベクトル $u_+ = \binom{0}{1}$，と $\lambda_- = 0$ をもつ固有ベクトル $u_- = \binom{1}{0}$ が求まる．初期状態 u_+ から出発すると，偏極ベクトル $\mathbf{m}$ は測定するたびに，$\cos\theta$ だけ小さくなる．

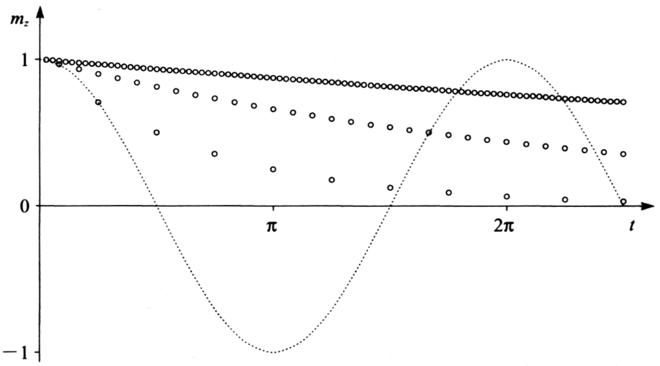


図 12.4 y 軸のまわりの一定のトルクによるスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の歳差運動．初期状態では $m_z := \langle \sigma_z \rangle = 1$ である．点線は擾乱を受けていない場合の時間発展に対応する．(すなわち，各点はその時刻で初めて測定された場合に観測される m_z の値を示す.) 丸印は **鋭敏な**測定が (上から順に) $5\pi/180$, $5\pi/60$, と $5\pi/20$ の間隔で実行された場合に観測される m_z の値を表している．

また，$0 < S < 1$ のときには，$(1+S)^2 \cos^2\theta - 4S$ の符号によって，固有値 $\lambda_\pm$ は実数，または複素共役数となる．したがって，指数関数的な減衰か，減衰振動が見られることになる[*25]．その転移は $S_{\rm cr} = (1-\sin\theta)/(1+\sin\theta)$ のときに起こる．図 12.5 にはそれぞれ $\Delta\mathsf{q} = 0.37$ と 1.09 に対応する $S = 0.4$ と 0.9 の場合が，$\theta = 5\pi/60$ として示されている．大きな $\Delta\mathsf{q}$ では，固有値 $\lambda_\pm$ が複素数となり，m_z は減衰振動する．

最悪の状況とは，引き続いて 2 回の測定をそれぞれ $\tau = \pi/2$ と $\tau = \pi$ のときに行う場合であり，このときは $\sin\theta = 1$ である．この結果は簡単に具体形が求まるので，後でスピン j の回転子の場合と比較しよう．2 回の測定後は，式 (12.79) を 2 度用いれば，$\mathbf{m}$ には単に $-S$ が掛かるだけであることがわかる．ファジーな測定 ($\Delta\mathsf{q} \gg 1$) で

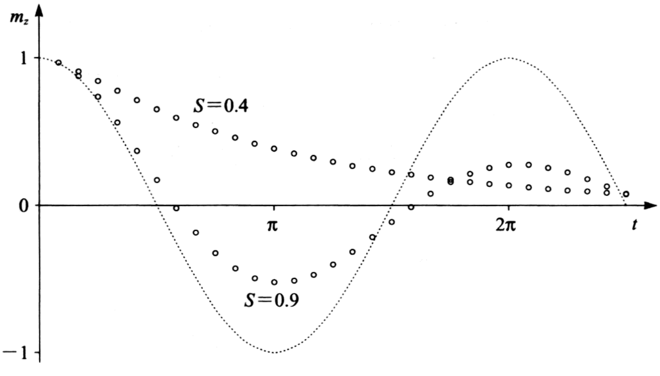


図 12.5 2 組の丸印は，図 12.4 と同じ条件で，ファジーな測定を間隔 $5\pi/60$ で行ったときに観測された m_z の値を示す．コヒーレンス因子 $S = 0.4$ と 0.9 はそれぞれ $\Delta\mathsf{q} = 0.37$ と 1.09 に対応する．m_z が振動し始める S の臨界値は $S_{\rm cr} = 0.589$ である．

*25 G. J. Milburn, *J. Opt. Soc. Am. B* 5 (1988) 1317.

は，$-S \simeq -1$ となるので，期待されるように半周期ごとにスピンが**反転**することがわかる．一方，$S = 0$ (鋭敏な測定) では，$\mathbf{m}$ は 0 となり，回転子の運動からは何の情報も得られない．

スピン j の回転子

スピン $\frac{1}{2}$ 粒子が式 (12.72) で記述される古典的回転子と似ていないことは明白である．したがって，スピン j の場合に関心を戻そう．簡単のため，$\hbar = 1$ とする．J_z の固有状態にある回転子を準備し，$j_z = j$ とする．前述した $\theta = \pi/2$ という "最悪の状況" だけを議論しよう．この場合 1 回目は固有値 j をもつ J_x の固有状態に対して J_z についての測定が行われることになる．

角度 $\theta = \pi/2$ だけの回転はユニタリー行列 U によって表される．ウィグナーの記法では[*26]

$$U_{mj} = \mathcal{D}^{(j)}(\{0\,\tfrac{\pi}{2}\,0\})_{jm} = \sqrt{(2j)!/[2^j\,(j+m)!\,(j-m)!]} \tag{12.81}$$

となる．$j_z = m$ が得られる確率は，この行列要素の 2 乗である．これは偏差 $j/2$ の 2 項分布である．図 12.6 には $j = 32$ (このときの標準偏差は $\Delta\mathsf{J}_z = \sqrt{j/2} = 4$ である) 場合が示されている．

それ以降の観測は，1 回目の測定が鋭敏であるかファジーであるかによって異なる．鋭敏の場合には ($S_{mn} = \delta_{mn}$)，第 2 回目の観測 ($\theta = \pi$ のところ) で期待される結果のヒストグラムは図 12.7 の一番上の図に示されている．この分布はほぼ一様であり，これからはきわめてにわずかな情報しか得られない．より良い結果は 1 回目の測定がファジーのときに得られる．図 12.7 の残りの図は，1 回目の測定で使われたメーターの $\Delta\mathsf{q}$ の関数として，2 回目の測定結果の分布を示している．明らかに，非常に広い $\Delta\mathsf{q}$ の場合は量子状態が $j_z = -j$ 近傍に再構成されるが，それは 1 回目の測定が行われなかったとした場合に時刻 $t = \pi$ でとる値である．

一方，Δq が広すぎれば，"観測" が無効となる．最適化すべき表式が式 (12.47) であることは明らかである．上でしらべた例から，メーターのファジーさは検出器の波

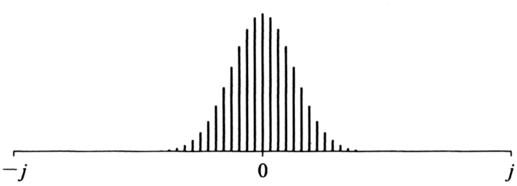


図 12.6　はじめに $j_z = j$ の状態を準備し，$\pi/2$ だけ回転して J_z を測定したときの予想確率分布．$j = 32$ の場合を計算した．標準偏差は $\Delta\mathsf{J}_z = 4$ である．

---

*26 E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, New York (1959) p. 167.

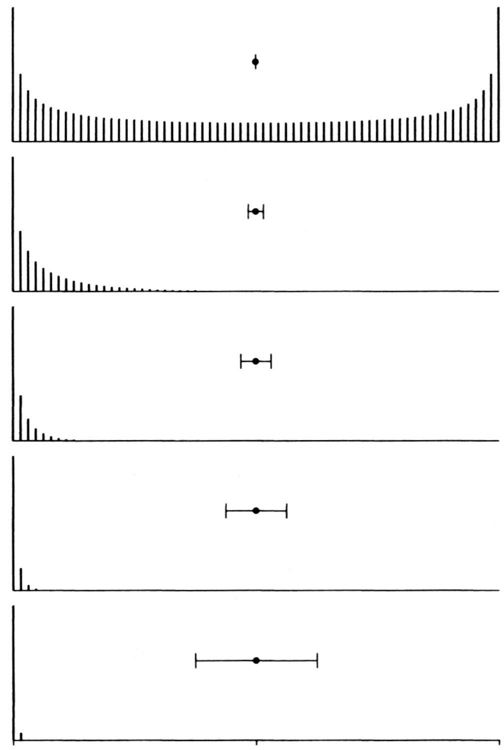


図 12.7 もう一度 $\pi/2$ だけ回転した後，2 回目に J_z を測定したときの予想確率分布．その結果は 1 回目に測定したメーターの $\Delta\mathsf{q}$ に依存する．この $\Delta\mathsf{q}$ (横線の誤差棒で示されている) は，上から順に 0, 1, 2, 4, そして 8 である．縦軸のスケールは見やすくするために各図で違えてある．それぞれの図では縦線の和を 1 と定義している．

束の自然幅程度であるべきと思われる．分解能が悪ければ不正確で役に立たない結果が得られるが，鋭敏な分解能では興味のある情報が破壊されてしまうのである．

演習問題 12.6 図 12.7 に示されているデータを計算せよ．そのためには回転行列 $\mathsf{U} = e^{-i\pi \mathsf{J}_z/2}$ が必要になる．ただし，ウィグナーの式 [*26] は使わないこと．というのも，j が大きくなると，この式は符号を変えて現れる大きな数の間の小さな差となってしまい，取り扱いにくいからである．U を計算するもっと良い方法は $\mathsf{U}\mathsf{J}_y = -\mathsf{J}_x\mathsf{U}$ を使うことであり，これによって J_z の対角表示を基底として U の隣り合う行列要素間の循環公式が与えられる． ⋆⋆

ゼノン効果は量子物理学に特異な現象である．固有値の密度が極端に大きくなるような半古典極限ではこの効果は消滅してしまう．量子論的観点からすると**古典的測定は常にファジーである．**このことがポットを見続けても結局は沸騰してしまう理由である．ポットを見ている観測者はそのエネルギーレベルを分離できないのである．もしこれらのエネルギーレベルを分離できる仮想的な装置があれば，それはポットの挙動を根本的に変えてしまうであろう．同様に，単にガイガー・カウンターを置いただ

けでは放射性原子核の崩壊を止めることはできない *18．ガイガー・カウンターは原子核のエネルギーレベルを明らかにするわけではなく，原子核からの崩壊生成物 (そのハミルトニアンは運動エネルギーを含むため連続スペクトルとなる) と相互作用をするだけである．すでにベルの定理の意味するところ (184–185 ページ) を論じたときにわかったように，装置が一つ一つのレベルを分解できるときに限って，量子効果が私たちの古典的直観を破るのである．

QND 測定と QND 変数

系が測定される演算子の固有状態の一つにあることが知られているとき，その系に対して実行される測定を量子非破壊 QND (quantum nondemolition) 測定という．このような測定の目的はその固有状態を決定することである．なすべきことは，その演算子で定義される基底による最大検証を実行することだけである．もし，この観測が繰り返されて行われる検証ならば，この系の最終状態は厳密に初期状態と同一であり，それゆえに，“非破壊” といわれる．

QND **変数** [“quantum nondemolition detection” (非破壊測定)*12 のことから QNDD とよばれることも多い] とは $[\mathsf{A}(t), \mathsf{A}(t')] = 0$ を満たす変数であり，式 (12.15) で定義される**強固**な古典的変数に対応する．原理的にそのような力学変数は，その時間発展を乱すことなく任意の精度で連続的にモニターできる．たとえば，$v(t)$ をランダムな古典的信号，そして $\mathsf{H} = v(t)\mathsf{p}$ とすると，q は QND 変数である．それは $\dot{\mathsf{q}} = v(t)$ から

$$\mathsf{q}(t) = \mathsf{q}(0) + \int_0^t v(t')\, dt' \tag{12.82}$$

となり，$[\mathsf{q}(t), \mathsf{q}(t')] = 0$ となるからである．もちろん q を測定すると，p は乱されるが，q 自身の時間発展には影響しない．残念ながら，ハミルトニアン $\mathsf{H} = v(t)\mathsf{p}$ は数学的なつくり物にすぎず，実験的に対応するものはない．

QND 変数は連続スペクトルをもつことに注意しよう．これらは連続的に発展しなければならないから，このことは直観的に明らかであるが，$[\mathsf{A}(t), \mathsf{A}(t')] = 0$ という性質から，形式的にも示せる *16．非自明な QND 変数の実現はありそうにもない．その理由は，その時間発展が微弱な外部信号に敏感である一方で，測定過程に必要とされる強い相互作用によって乱されてはいけないという相反する要請を満たさなければならないからである．

12.6 有限な持続時間の測定

これまでは，測定装置と観測される対象系間の相互作用はほとんど瞬間的であると仮定してきた．この時間間隔での系の運動は無視され，測定は式 (12.3) のように，単にユニタリー変換で表された．このような思い切った簡単化は常に正当化されるわけ

ではない．自然界で起こっている結合定数は有限であり，非常に小さいことが多い．それゆえ，対象系と測定装置は有限の，しかもたぶん長い時間結合されている必要があるだろう．そこで，有限な時間間隔の測定で何が起っているかをしらべてみよう．

第1段階として装置と観測される対象系の自由ハミルトニアンは無視し，式 (12.39) の簡単なモデルにしたがってその間の相互作用だけを考察しよう．時刻 $t=0$ で相互作用が始まるとし，時間発展のパラメーター $l(t)$ を

$$l(t) := \int_0^t g(t')\,dt'/\hbar \tag{12.83}$$

で定義しよう．こうすると，$l(t)$ は 0 から次第に増加し，測定が完了したときに最終値 1 に到達する．この場合のユニタリー変換 (12.40) は $(q \pm 1)$ を $[q \pm l(t)]$ で置き換えた時間に依存する関係式となる．右辺の波動関数は，ちょうど図 12.3 に描いたような形となる．したがって，測定途中は，時間に依存するコヒーレンス行列をもったファジーな測定の特別な場合に相当する．その場合，式 (12.51) の固有値 λ_m は $\lambda_m l(t)$ で置き換えられている．

ここで再び σ_z の測定という簡単な場合を考える．この状況は $l = l(t)$ として，密度行列

$$\rho(q', q''; t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2\,\phi(q'-l)\,\overline{\phi(q''-l)} & \alpha\bar{\beta}\,\phi(q'-l)\,\overline{\phi(q''+l)} \\ \beta\bar{\alpha}\,\phi(q'+l)\,\overline{\phi(q''-l)} & |\beta|^2\,\phi(q'+l)\,\overline{\phi(q''+l)} \end{pmatrix} \tag{12.84}$$

で記述される．この表現の物理的意味は通常の通りである．時刻 t で，スピン $\frac{1}{2}$ の粒子，**そして**その粒子に作用する"ポインター"の相関を**瞬間的に**検証できる**理想的な**装置があるとしよう．密度行列 (12.84) によって，これらの理想的な検証の結果について統計的な予言をすることができる．そのような相関をもったポインターの状態を完全に無視し，その座標 q についてトレースをとると，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対する縮約された密度行列が式 (12.50) で与えられることはすでにわかっている．ここでの新しい特徴はコヒーレンス行列 S_{mn} が測定過程の時間に依存していることである．

それだけでなく，さらにいっておくことがある[*27]．たとえば，次のような **一組の**質問ができよう．「一定の領域 $q_1 < q < q_2$ の中にポインターを見いだす確率はどうなるか? また，**その場合**スピンの性質はどうなるか?」この質問に答えるには，式 (12.84) からその領域以外のすべての q を消去し，領域内の q について

$$\rho(q', q''; t) \;\to\; \mathsf{R}(t) := \int_{q_1}^{q_2} \rho(q, q; t)\,dq \tag{12.85}$$

のように積分しなければならない．行列 $\mathsf{R}(t)$ はスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の密度行列に似ているが，トレースは 1 に規格化されていない．むしろそのトレースは指定された領域にポインターを見いだす確率である．ポインターがその領域に見いだされるとき，任意のスピン変数 A の平均値は

$$\langle \mathsf{A}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}\mathsf{R})/\mathrm{Tr}\,\mathsf{R} \tag{12.86}$$

[*27] A. Peres and W. K. Wootters, *Phys. Rev. D* 32 (1985) 1968.

となる．

演習問題 12.7　R(0) は，粒子の初期密度行列と，ポインターが q_1 と q_2 の間に見いだされる確率の積に等しいことを示せ．

演習問題 12.8　$l(t)$ が十分大きくなり，波動関数 $\phi(q+l)$ と $\phi(q-l)$ が重なり合わなくなれば，最終的な R 行列は，$q>0$ に対して

$$\mathsf{R} = |\alpha|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.87}$$

となることを示せ．この式の物理的意味は何か?

ここで式 (12.85) の性質を誤解すべきでない．これは力学的過程を表しているわけではないのであり，たとえば，式 (12.3) とは違って，ハミルトニアンによって記述されているのではない．式 (12.85) は力学変数には含まれていない外部的作因によってポインターの位置の領域が選択されることを定式化しているにすぎない．

事例研究：シュテルン–ゲルラッハの実験

具体的な例として，シュテルン–ゲルラッハの実験の連続的時間発展をしらべてみよう．粒子を σ_x の固有状態で準備し，σ_z を測定したところ，その結果が，たとえば 1 であったとしよう．簡単のために，式 (12.39) の $g(t)$ は定数，ポインターの初期状態は

$$-a<q<a \text{ で} \qquad \phi(q) = (2a)^{-1/2} \tag{12.88}$$

それ以外では $\phi(q)=0$ と仮定する．$l(t)=gt/\hbar \geq a$ となれば波動関数は分離し，測定は完了しよう．しかしながら，**もっと早い**時刻，つまり $l(t)<a$ における状況に関心 (この時点ではポインターの二つの波動関数はまだ重なり合っている) があり，「そのような時刻 t で，$q>0$ に粒子を見いだす確率はどうなるか，また**その場合**，スピンはどうなるのだろうか?」

初期状態は，上と同じ記号で $\alpha=\beta=2^{-1/2}$ として与えられる．$b:=l(t)/a<1$ として，式 (12.84) と (12.85) から

$$\mathsf{R}(t) = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+b & 1-b \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \tag{12.89}$$

が得られる．これから

$$\langle\sigma_z\rangle/\langle\sigma_x\rangle = b/(1-b) = l/(a-l) \tag{12.90}$$

となる．

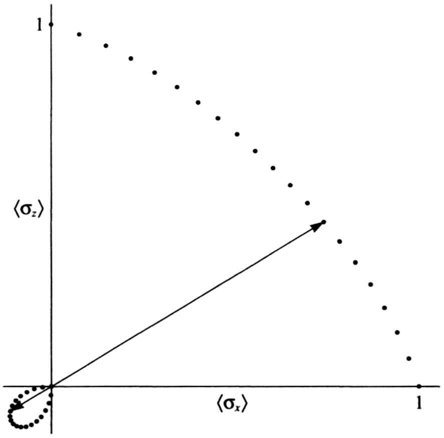


図 12.8 スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の状態は初期，中間，終期を通して $\langle\sigma_x\rangle=1$ から $\langle\sigma_z\rangle=1$ まで時間発展する．黒点は等間隔の 20 ステップを表す．中間の時刻での状態は，逆向きの矢印で示された，互いに正規直交するスピン状態の混合である．矢印の長さは，対応する状態の統計的重み (12.91) に等しい．

演習問題 12.9 $\mathsf{R}(t)$ の固有値が

$$w_j(t)=\frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{1-2b+2b^2}\right) \tag{12.91}$$

であることを示し，正規直交する固有状態を求めよ．

図 12.8 にこれらの結果を示すが，R の互いに正規直交した固有状態は，対応する確率 w_j に比例する長さのベクトル対で示されている．これらのベクトルは互いに逆方向を向いているが，それはヒルベルト空間で直交する状態は反対のスピン偏極に対応しているからである．予想通り，スピン偏極は測定開始時の $\langle\sigma_x\rangle=1$ から終了時の $\langle\sigma_z\rangle=1$ まで連続的に発展している．

式 (12.90) あるいは式 (12.89)(はっきりと表されているわけではない) の時間依存性は，**1 個**のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子について時々刻々に追跡できる類の時間発展ではない．量子論は基本的に統計的である．図 12.8 に例示されている時間依存性を測定するには，与えられた初期状態にある多数の粒子を準備し，それらを 20 の部分集合に分ける．(各部分集合には多数の粒子が含まれている.) そして各部分集合は，粒子とそれに関わるポインター (もちろん 1 個 1 個の粒子に 1 個のポインターを対応させる) を観測する前に，ある一定時間だけ発展させなければならない．そのとき，各部分集合について，ポインターの位置が正となる粒子の統計的性質を正確に記述したものが式 (12.89) と (12.90) である．

時間依存性のこのような新しい記述法はシュレーディンガー方程式そのものである．時間依存性を観測するためにはいずれの場合でも同一の集合を多数準備しなければならない．唯一の違いは，今の例でいえば，ポインターが “右か左” ということを観測で指定しない限り，各部分集合の時間発展が指定できないことである．

時間に依存する変数の観測

ここでは，運動の定数でない力学変数の非瞬間的な測定において何が起こるかをしらべてみよう．この問題は量子論に特有なものではない．それは日常生活でも起こりうることであり，たとえば，写真家が運動物体のスナップショットを撮るときである．しかしながら，量子論には新しい特徴が現れる．それは測定が受動的観測にとどまらず，新たな状態を**つくり出してもいる**からである．特に，そのような測定の結果は，測定期間中における測定量の時間平均ではないのが一般的なのである．

この問題はひとまずおいて，ここでは測定が完了したものだけを考えよう．一例として，再びスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の σ_z の測定を考える．この場合，粒子の自由なハミルトニアンは $\hbar\omega\sigma_x$ であるから，粒子は x 軸のまわりに 2ω の角速度の歳差運動を "することになる"．ハミルトニアンは

$$\mathsf{H} = \hbar\omega\sigma_x + g(t)\,\mathsf{p}\sigma_z \tag{12.92}$$

となる．簡単のために，$g(t)$ は時間間隔 $0 < t < T$ においては一定値 T^{-1} をとり，それ以外のときは 0 と仮定しよう．ここで，前と同じ質問をしよう．「粒子とポインターの初期状態が与えられたとき，時刻 $t = T$ でポインターを $q > 0$ に見いだす確率はいくらか? またそのとき，粒子の状態はどうなるか?」($t > T$ では，粒子は x 軸のまわりに角速度 2ω の歳差運動をし続けるであろう．これは通常の時間発展であり，いまは関心がない.)

この計算では，ポインターの状態に式 (10.54) で定義される運動量表示を使うのが都合良い．この場合，演算子 p は c 数 p に置きかわり，$0 < t < T$ における複合系の時間発展は，ユニタリー演算子

$$\mathsf{U}(p) = e^{-i\int \mathsf{H}\,dt/\hbar} = e^{-it[\omega\sigma_x + (p\sigma_z/\hbar T)]} \tag{12.93}$$

で与えられる．これは，任意の p の値に対して一定の角速度 $(2\omega, 0, 2p/\hbar T)$ の歳差運動を与えられているにすぎない．しかしながら，p の値は鋭い分布をしているわけでないことに注意しよう．$\phi(q)$ は狭い波束のはずであるから，$\tilde{\phi}(p)$ は広い分布をもち，様々な成分の状態ベクトルが，様々な角速度で歳差することになる．q 空間の波束が狭ければ狭いほど，関与する p の値はより大きくなる．特に，$\Delta\mathsf{q} \ll 1/\omega T$ ならば，波動関数のほとんどが $p \gg \hbar\omega T$ の成分をもっており，歳差軸はほぼ z 軸にそろう．詳しい計算 *27 によれば，$\omega\sigma_x$ によって生じる自由な歳差は，たとえ T が非常に大きく，そのため結合定数 g が小さくても，ほとんど止まってしまうことが示される．(これは $\omega T > 2\pi$ の場合を含む.) σ_z の二つの固有状態の和として初期波動関数を表したとすると，これらの成分の振幅はほとんど一定に保たれる．これは量子ゼノン効果のもう一つの例である．ハミルトニアンの自由部分，$\hbar\omega\sigma_x$ は相互作用項 $gp\sigma_z$ によって圧倒されてしまったのである．

演習問題 12.10　$\mathsf{U}(p)$ の q 表示を書き下し，$t = T$ における q 空間での終状態波動関数を求めよ．　　★★

この演習問題の解は線形的非局所変換となるが *27，その積分核 $K(q-q')$ は $q=q'\pm1$ に特異性をもち，その間では連続的に複素数値をとる．これは直観的には次のように解釈できる．$\sigma_z=1$ あるいは -1 であるかによって，ポインターは右か左に動かなければならない．しかし，σ_z は運動の定数でない．$\sigma_z=\pm1$ の状態は歳差運動 $\omega\sigma_x$ のために，$\sigma_z=\mp1$ の成分をもつようになる．このため，ポインターはジグザグに運動し，その最終的な位置は，$q=\pm1$ に集中せずに，-1 と 1 の間に連続的に広がる．

ポインターが最終的にとる位置によって，スピン状態はどうなるであろうか? 理想的には $q>0$ ならば，$\sigma_z=1$，$q<0$ ならば，$\sigma_z=-1$ となってもらいたい．現実的には上で説明したように，スピン状態は縮約された密度行列 $\mathsf{R}(T)$ で与えられている．それは非局所的な積分核を含むので，粒子は反対スピンの状態の一次結合で与えられている．この不完全な装置を使って，反対向きに偏極した二つのビームを**準備**しようとすると，これらのビームには異なった偏極の粒子が紛れ込んでしまう．これらの結果は純粋に古典的な基盤から期待されるものとは根本的に異なる．

古典論では，σ_z に鋭敏な装置ではただ単に $t=0$ から $t=T$ までの σ_z の時間平均を与えるだけである．量子論では，上述のように一定の $g(t)$ をもった簡単な装置で，そのような時間平均を直接測定はできない．しかしながら，もし測定される系の運動の法則が原理的にわかっていて，やるべきことがその法則に含まれる未知の数値パラメーターを決定するだけなら，もっと精緻な方法を利用できる．その場合には，ある一定時間が経過したときにポインターの位置が未知の数値パラメーターの値と相関をもつような仕方で，時間に依存する相互作用ハミルトニアンをつくり上げることが可能である．残念ながら一般的な処方はないので，それぞれの場合ごとに取り扱わなければならない．

12.7 時間の測定

時間は力学変数でないので，時間の測定は位置，運動量，エネルギーといった量の測定とは違っている．たとえば，古典的粒子ははっきりした位置，エネルギーなどをもっているが,「粒子がはっきりした時間をもっている」ということはできない．形式的には，t と他の任意の力学変数とのポアソン括弧式 (古典力学)，あるいは交換関係 (量子論) は常にゼロである．

実際に時間の測定とよんでいるものは，運動法則が既知の (そしてふつうは時計の文字盤上の針の運動のように一様な) 何らかの力学変数を観測している．たとえば，古典的ハミルトニアン $H=p^2/2m$ をもつ自由粒子を観測しているとき，$T=mq/p$ という量は $[T,H]_{\mathrm{PB}}=1$ を満たすので，(この特別なハミルトニアンに対する)“時間の表現” のように考えられる．

演習問題 12.11　(運動量表示での) 演算子

$$\mathsf{T} = \frac{i\hbar m}{2}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{p}\right) \tag{12.94}$$

は交換関係 $[\mathsf{T}, \mathsf{H}] = i\hbar$ を満たし，$\mathsf{T}\psi = t\psi$ の形式解は $\psi \sim \sqrt{p}\, e^{-ip^2 t/2m\hbar}$ であることを示せ.

上の演習問題の結果を説明できる簡単な物理的意味はない．別の演習問題をやりたいなら，自由粒子のかわりにたとえば調和振動子 $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ を考えてみよう．結果はさらに悪くなる．この場合，古典力学では $T = \tan^{-1}(q/p)$ を定義できるが，これはちょうど普通の時計が 1 時間ごとにもとに戻るように，多価である．しかし，正しく定義されたヒルベルト空間では "多価の演算子" のようなものは存在しないのである.

ラーモア時計

12.2 節で導入した連続的な回転子時計を量子化する基底とし，321 ページで論じた有限次元の量子ダイヤルを使うことによって，簡単な量子時計をつくることができる[*28–*30]．時計のハミルトニアンは

$$\mathsf{H}_c = \omega \mathsf{J} = -i\hbar\omega\,\partial/\partial q \tag{12.95}$$

である．その固有状態 u_m は $m = -j, \cdots, j$ として q 表示で $e^{imq}/\sqrt{2\pi}$ である．$N = 2j + 1$ としてベクトル

$$\mathsf{v}_\mu := N^{-1/2} \sum_{m=-j}^{j} e^{-2\pi i \mu m/N}\, \mathsf{u}_m \qquad (\mu = -j, \cdots, j) \tag{10.89}$$

はその補足的状態であり，v_μ は**ダイヤル状態**とよばれる.

この時計は

$$\tau = 2\pi/N\omega \tag{12.96}$$

の時間分解能をもつが，それは

$$e^{-i\mathsf{H}_c\tau/\hbar}\,\mathsf{v}_k = \mathsf{v}_{k+1\,(\mathrm{mod}\,N)} \tag{12.97}$$

からわかるであろう．もし，時計がダイヤル状態 v_0 に準備されているとすれば，時間間隔 τ ごとに時計は次々と正規直交状態 $\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \cdots$ を通過していくであろう．し

[*28] H. Salecker and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* 109 (1958) 571.
[*29] M. Büttiker, *Phys. Rev. B* 27 (1983) 6178.
[*30] J. P. Falck and E. H. Hauge, *Phys. Rev. B* 38 (1988) 3287.

たがって演習問題 10.21 (まだ解いていない読者がいれば，ぜひやってほしい) のように**時計–時間演算子**を定義できる．

$$\mathsf{T_c} = (2\pi/N\omega) \sum_\mu \mu\, \mathsf{v}_\mu\, \mathsf{v}_\mu{}^\dagger \tag{12.98}$$

当然，有限次元のハミルトニアンと時計–時間演算子は $[\mathsf{T_c}, \mathsf{H_c}] = i\hbar$ を満たさない．

この時計のエネルギー収支をしらべてみよう．時計–時間固有状態 v_μ については $\langle \mathsf{H_c} \rangle = 0$ そして

$$\langle \mathsf{H_c}{}^2 \rangle = |\mathsf{H_c}\, \mathsf{v}_\mu|^2 = (\hbar^2\, \omega^2/N) \sum \mu^2 = \hbar^2\, \omega^2\, j(j+1)/3 \tag{12.99}$$

である．大きな j では，エネルギーの広がり

$$\Delta \mathsf{H_c} \simeq j\hbar\omega/\sqrt{3} \simeq (\pi/\sqrt{3})\, (\hbar/\tau) \tag{12.100}$$

は，とりうる最高エネルギー $j\hbar\omega$ とほぼ同じ大きさである．それゆえこの時計は本質的に非古典的なものである．すぐわかるように，このことは他の物体との相互作用に反映される．

すでに量子ダイヤルの性質を論じたときに，q の**局所関数**は $f(\mathsf{q}) = \mathrm{const.}$ を除けば，演算子とはならないことを知った．逆に，N 次元ヒルベルト空間の任意の非自明な行列 A_{mn} は，q 表現では非局所関数 $A(q', q'')$ となる．**時間における非局所性**は有限次元量子時計の本質的な性質である．たとえば，そのような時計は，これまでの観測モデルで可能であると仮定したような，正確な時刻に相互作用を入れたり，切ったりすることは不可能なのである．

演習問題 12.12 $A_{mn} = 1, \forall m, n$ という行列の q 表示を求めよ． ⋆

時間分解能 τ を実現するために必要とされる最小の数よりももっと多くの状態をもつヒルベルト空間を使えば，$\Delta \mathsf{H_c} \ll \langle \mathsf{H_c} \rangle_{\max}$ という，より古典的な時計をつくることができる．たとえば，M を大きな数，A を規格化定数として $\psi = A\, e^{M^2 \cos(q-q_0)}$ を考えてみよう．角度の分解能は $\Delta q \simeq M^{-1}$ なので，ほぼ $2\pi M$ 個の異なる "ポインター状態" が存在する．しかし，ψ をフーリエ変換すればわかるように，この ψ をフーリエ級数によって良く表現しようとすると，ほぼ $2M^2$ 個の項が必要となる．ヒルベルト空間のほとんどを "浪費" しているだけでなく，エネルギーの広がり $2M^2\hbar\omega \simeq 2M\hbar\omega/\Delta q$ は，同じ精度 Δq をもつラーモア時計の場合よりもはるかに大きい．したがって，この "古典的" な時計は，相互作用する量子系にかなり大きな擾乱を与えてしまうことだろう．

飛行時間の測定

運動している粒子の並進自由度に結合させられた量子時計は，2 個の測定器間の通過時間の測定に使うことができる．特に，その飛行時間の記録は永遠に保存しておく

ことが可能であり，すぐわかるように，その過程が完了してから長い時間が経過した後に読み出すことができる．

これを最も簡単に行うには，粒子がはじめの測定器を通過したときに時計を始動し，2 番目の測定器を通過したときに止めるようにすればよい．測定器の位置を x_1，x_2，粒子の位置の演算子を x としよう (時計の文字盤上のポインターの位置を q としていることに注意)．x 表示での射影演算子

$$P(x) = \begin{cases} 1 & (x_1 < x < x_2) \\ 0 & (\text{上記以外の } x) \end{cases} \tag{12.101}$$

を定義する．(質量 m の) 粒子と時計に対する適切なハミルトニアンは

$$\mathsf{H} = (\mathsf{p}^2/2m) + \mathsf{P}(\mathsf{x}) \otimes \mathsf{H}_c \tag{12.102}$$

であり，粒子が測定器間に存在するときだけ時計は作動する．H と H_c は両者とも運動の定数である．時計の初期状態はダイヤル状態 $\mathsf{v}_0 = \sum \mathsf{u}_n/\sqrt{N}$ である．時計が H_c の固有状態，たとえば u_n にあるとすれば，運動方程式は比較的簡単に解けるので，初期状態 v_0 に対応する解になるように n についての和をとればよい．

もし時計の状態が u_n であれば，演算子 H_c は数値 $n\hbar\omega$ で置き換えられ，ハミルトニアン (12.102) は単に高さ $V = n\hbar\omega$，幅 $L = x_2 - x_1$ の障壁ポテンシャル中の質量 m の粒子を表すことになる．障壁の外側の波数は $k = (2mE)^{1/2}/\hbar$ であり，内側の波数は $k' = [2m(E-V)]^{1/2}/\hbar$ である．ここで $E = p^2/2m$ は H の固有値である．したがってこの障壁による位相のずれは

$$(k' - k)\, L \simeq -n\omega L/(2E/m)^{1/2} \tag{12.103}$$

となる．ただし，右辺は $|V| \ll E$ のときに成り立つ近似式である．$v = (2E/m)^{1/2}$ は粒子の古典的速度なので，L/v は古典的飛行時間 T であることに注意しよう．そこで，入射波動関数 (障壁の手前) を

$$e^{ikx}\, \mathsf{v}_0 = e^{ikx} \sum_n \mathsf{u}_n/\sqrt{N} \tag{12.104}$$

とすれば，通過波 (障壁の後) は

$$e^{ikx} \sum_n e^{-in\omega T}\, \mathsf{u}_n/\sqrt{N} = e^{ikx} \sum_n e^{in(q-\omega T)}/(2\pi N)^{1/2} \tag{12.105}$$

となる．ポインターは最初 $q \simeq 0$ を指していたが，$q \simeq \omega T$ の方を向いて終了しており，測定器間の飛行時間を正しく示している．

この導出方法の著しい特徴は，粒子が L よりはるかに狭い波束中に留まるとか，あるいは一般的に粒子が各測定器をある決まった時刻に通過するとかは仮定していないことである．2 個の検出器間の**合間の**時間だけが測定したかったのである．各測定器を通過する時刻はまったく不確定であるが，その間の時間は初期運動量 $p = \hbar k$ で完全に定義される．

$|V| \ll E$ が唯一の仮定であったので，測定による擾乱は小さい．$|V|$ は $j\hbar\omega \simeq \pi\hbar/\tau$ 程度の値をとりうるので，$\tau \gg \hbar/E$ となる．これによって与えられる時計の時間分解能の下限からは，長さ L で測定した速度の精度の限界

$$\Delta v \simeq \tau v^2/L \gg \hbar/mL \tag{12.106}$$

が導かれ，これは $\Delta p \gg \hbar/L$ のようにも書き換えられる．この結果をもう一つ別のハイゼンベルクの不確定性関係と解釈すべきでない．むしろ，粒子の速度を測定する飛行時間法に本質的な制限なのである．もちろん，他の方法を使えば任意の精度で運動量 p を測定できる．

原子はいつ崩壊するか?

シュレーディンガーの猫はいつ死んだのだろう? 伝説の猫のかわりに，放射性原子が崩壊しない限り動き続ける時計を考えれば，この質問は次のように置き換えられる．時計はいつ止まったのだろうか?

$t \to \infty$ のときのポインターの位置を計算しよう．ハミルトニアンとして，

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_\mathrm{a} + \mathsf{P}_0\,\mathsf{H}_\mathrm{c} \tag{12.107}$$

を採用する．ただし，H_a は放射性原子のハミルトニアン，P_0 は原子の初期状態 ϕ_0 への射影演算子，そして前と同じように $\mathsf{H}_\mathrm{c} = \hbar\omega\mathsf{J}$ である．放射性原子のハミルトニアンを $\mathsf{H}_\mathrm{a} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{V}$ と書こう．ただし，H_0 は**離散**スペクトル (特に，E_0 に対応する固有状態 ϕ_0 が含まれる) およびその領域内に E_0 を含む**連続**スペクトルをもっている．たとえば，ϕ_0 は原子の励起状態として，連続スペクトルはその基底状態に任意エネルギーの 1 個あるいは数個の光子が伴われた状態に相当する．議論を簡単にするため，しばらくは，原子は大きな箱で囲まれているとしよう．その結果，連続スペクトルは離散的となり，粗視化された密度 ρ_E をもった規格化された状態 ϕ_E から構成されるようになる．これらの状態は互いに直交している．

このモデルをさらに簡単化するために，V の 0 でない行列要素は

$$\langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle = \overline{\langle \phi_0, \mathsf{V}\phi_E \rangle} \tag{12.108}$$

に限り，また，これらの行列要素はゆっくりした E 依存性しかもたないと仮定する．これらの仮定のもとで，波動関数

$$\psi = a_0(t)\,\phi_0\,e^{-iE_0t/\hbar} + \sum_E a_E(t)\,\phi_E\,e^{-iEt/\hbar} \tag{12.109}$$

の初期状態 ϕ_0 は近似的に $a_0 \simeq e^{-\gamma t/\hbar}$ のように指数的に崩壊することが示せる[*31]．この結果をシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\, da_E/dt = \langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle\, a_0\, e^{i(E-E_0)t/\hbar} \tag{12.110}$$

*31 A. Peres, *Ann. Phys. (NY)* 129 (1980) 33.

に代入すると，具体的に $a_E(t)$ が得られる．特に，$t \to \infty$ では

$$a_E \ \to \ \langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle / (E - E_0 + i\gamma) \tag{12.111}$$

となり，その結果

$$\psi(t) \ \to \ \sum_E \langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle \, \phi_E \, e^{-iEt/\hbar} / (E - E_0 + i\gamma) \tag{12.112}$$

となる．ノルムは保存する (つまり，$\langle \psi, \psi \rangle = 1$) ので，

$$\sum_E |\langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle|^2 / [(E - E_0)^2 + \gamma^2] = 1 \tag{12.113}$$

となり，これから実際の γ の値が得られよう．

まず，箱の体積 Ω を無限大としたとき，上の無限和がどうなるかをしらべなければならない．規格化された固有関数 ϕ_E が局所化されていないとすれば，その振幅は $\Omega^{-1/2}$ のようにふるまう．したがって，もし初期波動関数 ϕ_0 が局所的であるとすれば，$\langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle$ もそうなるから，$V(E) := \Omega^{1/2} \langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle$ という表現は $\Omega \to \infty$ で (E の滑らかな関数としての) 極限値に近づく．同様に，状態密度 $\rho(E) := \rho_E / \Omega$ も滑らかな極限値をとる．したがって式 (12.113) は

$$\int \frac{|V(E)|^2}{(E - E_0)^2 + \gamma^2} \, \rho(E) \, dE = 1 \tag{12.114}$$

のように書き直せる．関数 $\rho(E)$ と $V(E)$ は γ よりも広い領域でほとんど一定なので，式 (12.114) から

$$\gamma = \pi \, \rho(E_0) \, |V(E_0)|^2 \tag{12.115}$$

となるが，これはフェルミの黄金律である．

ここで，原子を式 (12.107) のように時計に結合させよう．時計の初期状態は $\mathsf{v}_0 = \sum \mathsf{u}_n / \sqrt{N}$ であるが，再び固有状態 u_n にある時計で問題を解こう．この場合，H_{c} は一定値 $n\hbar\omega$ で置き換えられる．ハミルトニアン H での唯一の違いは，初期状態 ϕ_0 のエネルギーが E_0 から $E_0 + n\hbar\omega$ にずれていることである．これによって式 (12.115) の γ の値が修正されるかもしれないが，

$$j\hbar\omega \left| \frac{d\,\rho(E_0)\,|V(E_0)|^2}{dE_0} \right| \ll \rho(E_0)\,|V(E_0)|^2 \tag{12.116}$$

である限り，新しい崩壊定数も古い値にきわめて近いものとなろう．したがって，再び時計の時間分解能について下限

$$\tau \gg \hbar \left| d[\log \, \rho(E_0) \, |V(E_0)|^2] / dE_0 \right| \tag{12.117}$$

が得られる．これより短い時間分解能ならば，崩壊法則が変化することになる．(そして $\tau \to 0$ の極限では，もちろんゼノン効果が現れる.)

以下では，時計のエネルギーは十分小さく，したがって時間分解能は十分に悪くしておく．その結果，不等式 (12.117) は満足され，崩壊の法則は時計によってそれほど影響されない．$t \to \infty$ で，原子と時計の結合状態は式 (12.112) で $E_0 \to E_0 + n\hbar\omega$ とした

$$\psi = N^{-1/2} \sum_n \mathsf{u}_n \sum_E \langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle \, \phi_E \, e^{-iEt/\hbar} / (E - E_0 - n\hbar\omega + i\gamma) \tag{12.118}$$

で与えられる．ここで，原子からの崩壊生成物でなく，時計を観測することにしよう．そのとき，時計の状態 (もっと正確には，同じ実験を行っている時計の集合の統計的性質) は状態 (12.118) から求めた密度行列を，原子の自由度についてトレースを取って縮約した

$$\rho_{mn} = \sum_E \langle \mathsf{u}_m \otimes \phi_E, \psi \rangle \, \langle \psi, \mathsf{u}_n \otimes \phi_E \rangle \tag{12.119}$$

で表されている．この部分トレースは

$$\sum_E |\langle \phi_E, \mathsf{V}\phi_0 \rangle|^2 \cdots \;\to\; \int |V(E)|^2 \, \cdots \, \rho(E) \, dE \tag{12.120}$$

で連続極限に移行する．この結果，

$$\rho_{mn} = \frac{1}{N} \int \frac{|V(E)|^2 \, \rho(E)}{(E - E_0 - m\hbar\omega + i\gamma)\,(E - E_0 - n\hbar\omega - i\gamma)} \, dE \tag{12.121}$$

となる．分子の関数は二つとも非常に滑らかとされているので，その積は式 (12.115) で定義される定数 γ/π で置き換えられる．積分の上下限は十分 $\pm\infty$ に広げられるから，

$$\rho_{mn} = N^{-1} \sum [1 + i\alpha\,(n-m)]^{-1} \tag{12.122}$$

が得られる．ここで $\alpha = \hbar\omega/2\gamma$ は古典的時計の針が原子の平均寿命 $\hbar/2\gamma$ の間に動く角度である．

ここで今度は，時刻 $t_\mu := \mu\tau = 2\pi\mu/N\omega$ で時計が止まっているのを見いだす確率を計算できる．この確率は $p_\mu = \langle \mathsf{v}_\mu, \rho \mathsf{v}_\mu \rangle$，すなわち

$$p_\mu = \frac{1}{N} \sum_{mn} \frac{\langle \mathsf{v}_\mu, \mathsf{u}_n \rangle \, \langle \mathsf{u}_m, \mathsf{v}_\mu \rangle}{1 + i\alpha\,(n-m)} = \frac{1}{N^2} \sum_{mn} \frac{e^{2\pi i\mu(n-m)/N}}{1 + i\alpha\,(n-m)} \tag{12.123}$$

となる．この 2 重和は具体的に計算でき[*32]，大きな N では

$$p_\mu \;\to\; N^{-1} \sum_{k=-2j}^{2j} e^{2\pi ik\mu/N} / (1 + ik\alpha) \tag{12.124}$$

となる．

演習問題 12.13 時刻 t_μ に対応する文字盤上の角度を $\theta = 2\pi\mu/N$ としよう．$\mu < 0$ の場合には，$\mu \to \mu + N$ と定義し直すと，$0 \le \theta < 2\pi$ である．式 (12.124) の右辺は，

$$\frac{2\pi\, e^{-\theta/\alpha}}{N\alpha\,(1 - e^{-2\pi/\alpha})} = \frac{2\pi}{N\alpha} \left[e^{-\theta/\alpha} + e^{-(\theta+2\pi)/\alpha} + e^{-(\theta+4\pi)/\alpha} + \cdots \right] \tag{12.125}$$

のフーリエ級数展開であることを示せ．

[*32] A. Peres, *Am. J. Phys.* 48 (1980) 552.

この演習問題から，時計は良く知られた指数関数的崩壊法則に従った時刻分布で止まる (原子が崩壊し，猫が死ぬ) ということがわかるが，時計は止まるまでに 1 サイクル以上動いていたかもしれないことが正しく取り込まれている．量子論では統計的な予言をするだけで，もちろん 1 個の原子がいつ崩壊するか，あるいは 1 匹の猫がいつ死ぬかは決められない．

相互作用のオンとオフ

時計は物理過程の持続時間を測るだけでなく，それを制御もできる．ここで，どのようにすれば相互作用をあらかじめ設定された時刻 t_a にオンし，時刻 t_b でオフにできるかをしらべてみよう．たとえば，この相互作用には スピン $\frac{1}{2}$ 粒子を歳差させる磁場が含まれるかもしれない．問題は，時刻 t_a と t_b の間の歳差角を線形に増加させるような，**時間に依存しない**ハミルトニアンを書き下すことである．

そのような効果をもつ様々な模型が工夫されている．依然としてラーモア時計を使いたいなら，

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_c + \tfrac{1}{2}\,\hbar\Omega\,\sigma_z \otimes (\mathsf{v}_a\mathsf{v}_a{}^\dagger + \mathsf{v}_{a+1}\mathsf{v}_{a+1}{}^\dagger + \cdots + \mathsf{v}_b\mathsf{v}_b{}^\dagger) \tag{12.126}$$

と書けよう．ただし，Ω はスピン歳差の速度である．いつものように，スピン粒子の並進自由度は無視されている．今までと同じ方法に従って，初期状態を運動の定数 σ_z の固有状態にとろう．そうすると，式 (12.126) で演算子 σ_z は ±1 で置き換えられ，時計だけを含む表現が得られる．一方， H_c は射影演算子 $\mathsf{v}_\mu\mathsf{v}_\mu{}^\dagger$ と交換しないので，これは運動の定数でない．物理過程を制御するのに時計を使うと時計の機構が乱されてしまうことがわかるだろう！驚いただろうか?

時計の運動方程式は摂動論によって解ける．計算はかなり込みいっており *32，ここで再録はしない．最終的には，歳差角が近似的に傾斜関数

$$\begin{array}{ll} 0 & (t < t_a \text{ のとき}) \\ \Omega(t - t_a) & (t_a < t < t_b \text{ のとき}) \\ \Omega(t_b - t_a) & (t > t_b \text{ のとき}) \end{array} \tag{12.127}$$

で与えられるという結果が得られる．これは望んでいた結果であり，**時間に依存しない**ハミルトニアン (12.126) を使って求められたものである．この結果を得るために必要とされた仮定は $j \gg 1$ (優れた時計をつくるために必要) と $\Omega\tau \ll 1$ であるが，後者は時計の分解能が歳差周期よりもはるかに良いことを意味する—物理的に自明な要請である *32.

磁場をオン，オフするもっと現実的な別の模型はスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の**並進**自由度を時計として利用するものであり，粒子はただ単に時刻 t_a で磁場に入り，時刻 t_b で出ていく．この模型を記述するハミルトニアン

$$\mathsf{H} = (\mathsf{p}^2/2m) + \mathsf{P}(\mathsf{x}) \otimes \tfrac{1}{2}\,\hbar\Omega\sigma_z \tag{12.128}$$

は飛行時間測定に使われたハミルトニアンに似ている．これを式 (12.102) と比較すると，スピン自由度と位置の自由度が役割を入れ替えていることがわかる．運動方程式の解は，もちろん (この場合，$j=\frac{1}{2}$) 同一である．

演習問題 12.14 飛行時間測定に必要だった条件 $|V| \ll E$ は，この場合

$$kL \gg \Omega\,(t_b - t_a) \tag{12.129}$$

となることを示せ．ただし，$k = p/\hbar$ であり，L は磁石の長さである．この条件の物理的意味は何か?

12.8 時間とエネルギーの相補性

時間と周波数がフーリエ変換における共役変数の組であることは良く知られている．その結果として，信号 (たとえば音声) の持続時間とその信号の周波数 (音声の高低) は不明瞭さの関係式 $\Delta t\,\Delta\omega \geq \frac{1}{2}$ を満たす．図版 III (216 ページ) で説明した，この性質は純粋に古典的なものである．

量子論では，周波数はエネルギーを意味する．教科書や論文の中には不確定性関係 $\Delta t\,\Delta E \geq \hbar/2$，あるいはもっと悪いことには，“相対論的” 一般化

$$\Delta x^\mu\,\Delta p_\nu \geq \tfrac{1}{2}\,\hbar\delta^\mu_\nu \qquad (?) \tag{12.130}$$

さえ見ることがあろう．そのような関係式はどんな意味をもつというのか? 量子論における関係式 $\Delta \mathsf{q}\,\Delta \mathsf{p} \geq \hbar/2$ は，粒子のある集合について q を測定し，まったく同様に準備した別の集合について p を測定すると，それらを測定した結果の標準偏差の積は少なくとも $\hbar/2$ 以上であることを意味している．同じように，式 (12.130) を解釈しようとすると，二つの困難に直面する．まず一つは，$\Delta\mathsf{x}\,\Delta\mathsf{H} = 0$ は一般的に間違っている．x は運動の定数でないからである．二つ目は Δt という表現は定義されないことである．それは演算子 t が存在せず，“物理系の時間の測定” には，物理系の位置，あるいは運動量などの測定と同様な意味を与えられないからだ．

文献にしばしば現れる他の例に次のようなものがある．エネルギーを測定している時間が δt とすると，その結果は $\Delta E \geq \frac{1}{2}\hbar/\delta t$ だけの不確定性がある．この主張は馬鹿げてる．それは δx の大きさの装置で運動量を測ろうとすれば，運動量の不確定性は $\Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar/\delta x$ であるというようなものだ．これが間違っているのは明白である．センチメートル程度の大きさの普通のラジオ受信機が放送局からの波長を $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ の精度で決定できる，言い換えれば，受信機は放送局から放出される光子の運動量を

$$\Delta p \ll \hbar/\lambda \ll \hbar/\delta x \tag{12.131}$$

の精度で測定しているのだ．

別の主張として図版 I (2 ページ) で示されているように，ΔE の精度でエネルギーを測定しているときの (時計によって測定される) 時間は少なくとも $\hbar/\Delta E$ の不確定性

をもつというものがある．すでに時計–時間演算子 T_c を定義し，したがって $\Delta\mathsf{T}_c$ と $\Delta\mathsf{H}$ の間に不確定性関係があるか否かがしらべられるから，これはずっと良いように聞こえる．しかしながら，実際にそのような不確定性関係の存在が期待できる理由は何もない．演算子 T_c は時計に，そして演算子 H は対象系に関係しているからである．これら二つの演算子は交換し，量子論によれば原理的に任意の精度で同時に測定できる．ここでもラジオ受信機のアナロジーが再び使える．受信機の位置は正確に決定できるし，一方で受信機はラジオ放送局から放出される光子の運動量を，式 (12.131) が容易に満たせるように測定できる．

これらの問題点は量子論の初期には理解されていなかった．アハロノフとボーム[*33]によって完全に解析されたのはかなり後の段階になってからにすぎず，彼らは，次のように結論づけた．「系のエネルギーがなぜ好きなだけ短時間で測定できないのかということの理由は，量子論の原理に内在していない．」この主張を裏付けるため，アハロノフとボームは，2 個の粒子 (“対象系” と “装置”) を含み，装置が任意の短時間で系のエネルギーを**繰り返し**測定できるようなハミルトニアンを構成してみせた．

これらの結論をフォック[*34]は，アハロノフとボームが用いたハミルトニアンには，相互作用のオン，オフをいかほどにも鋭くできる時間の関数 $g(t)$ が含まれていることを根拠にして，批判した．フォックは次のように書いている．

> あからさまに時間に依存する相互作用を導入することは (対応原理の意味で) 古典的に記述できる場を導入することに等価です．しかし，量子力学の方程式に使われる古典場と試験体はハイゼンベルクの不確定性関係の制限を免れるわけにはゆきません．反対に，古典場と試験体は不確定性関係がきわめて厳しく満足されている [つまり，$\Delta q\,\Delta p \gg \hbar$] との前提の下で使われているので，これらの関係式をあからさまに導入する必要はないのです．しかし，古典場と試験粒子がハイゼンベルクの関係式を破るかもしれないと (不合理だが) 仮定するとすれば，対象系とされている量子力学的粒子に対してもこれらの関係式が破れていても驚くには当たりません．

フォックの批判に対抗するため，アハロノフとボームは[*35]は第 3 の粒子 (座標の 1 次関数としての “時計”) を導入して彼らのハミルトニアンを修正し，スイッチ関数 $g(t)$ を時間に依存しない関数 $g(\mathsf{z})$ で置き換えた．その結果得られた時間に依存しないハミルトニアンは，任意の短時間間隔で系のエネルギーを形式的には繰り返し測定できた．この模型にはあらゆる点で内部矛盾はなかった．

これにはまだ問題が残されている．つまり，関数 $g(\mathsf{z})$ のように，いくらでも強く，かつ狭い領域に局所化されるような相互作用が，自然界に存在するか否かということである．しかしながら，ここでの話でいえば，これは実際上の問題であり，基本的な

[*33] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* 122 (1961) 1649.
[*34] V. A. Fock, *J. Exp. Theor. Phys. (U.S.S.R.)* 42 (1962) 1135 [英訳：*Soviet Phys. JETP* 15 (1962) 784].
[*35] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev. B* 134 (1964) 1417.

ものでない．それはちょうど，ユークリッド幾何学を学ぶとき，どんなにでも細い線が描けるか否か，完全剛体の定規やコンパスがつくれるか否かを尋ねるようなものである．これらの技術的な質問は幾何学の学習には関係がない．同様に，書き下したハミルトニアンが実験室で実際に実現 (もちろん基本的法則は何ら破らずにだが) できるかは量子論の論理構造とは無関係である．

これらの基本的な問題を分析するときには，量子論を実在の物理的対象を記述する手段として考えるべきではない．むしろ，量子論はちょうどユークリッド幾何学のように，1 組の抽象的な規則と見なされるべきである．その理論の物理的な説明は，“線” とか “円” という抽象的概念を白紙の上で定規やコンパスで描いた細い幅のある黒い帯で**シミュレート**するように，その抽象的な要素を物質的な対象によって**シミュレート**する．実際，いかに上手にシミュレートできるかは実地の問題として重要ではあるが，基本的なものではない．

準安定状態

時間に依存する量子系の**生き残り確率**は

$$P(t) := |\langle\psi(0), \psi(t)\rangle|^2 = |\langle\psi(0), e^{-i\mathsf{H}t/\hbar}\psi(0)\rangle|^2 \tag{12.132}$$

で定義される．(良く文献で使われている “生き残り” という言葉は，それが生存しているメンバーの 1 員が不可逆的に死亡するということを示唆するので，いくぶん誤解を招く．以下の議論には不可逆現象は含まれておらず，また，“生き残り確率” $P(t)$ が時間の単調減少関数という理由は何もない．それは時間的に増加するかもしれないし，調和振動子のコヒーレント状態の周期運動のように，振動するかもしれない.)

演習問題 12.15　u_E をエネルギーの固有状態として，$\psi(0) = \sum c_E\, \mathsf{u}_E$ としよう．$\langle\psi(0), \psi(t)\rangle = \sum |c_E|^2\, e^{-iEt/\hbar}$ であることを示せ．

演習問題 12.16　連続スペクトルをもつ系では，上記演習問題の結果は $\langle\psi(0), \psi(t)\rangle = \int w(E)\, e^{-iEt/\hbar}\, dE$ となる．したがって，$\langle\psi(0), \psi(t)\rangle$ と $w(E)$ はお互いのフーリエ変換である．指数関数的崩壊則 $\langle\psi(0), \psi(t)\rangle = \exp(-\lambda|t|/2 - iE_1 t/\hbar)$ は

$$w(E) = \frac{\gamma}{\pi\,[(E - E_1)^2 + \gamma^2]} \tag{12.133}$$

を与えることを示せ．ただし，E_1 は準安定状態の平均エネルギー，そして $\gamma = \hbar\lambda/2$ である．

式 (12.133) のエネルギー分布は $\pm\infty$ に広がっており，特にその分散 ΔE は無限大である．これは明らかに物理的でない．したがって，厳密に指数関数的な崩壊則はありえない．しかしながら，E_0 を系の基底状態として，

$$\gamma \ll \Delta E \ll E_1 - E_0 \tag{12.134}$$

ならば，$P(t)$ は近似的に指数関数的に崩壊することが示されている[*31]．特に，γ は共鳴曲線 (12.133) の最高値の半分のところの半値幅であるが，エネルギー分布の標準偏差 ΔE とは同じでないことに注意すべきである．摂動論では γ はフェルミの黄金律 (12.115) で示されるように，2 次の量であるが，$\Delta E = (\langle \mathsf{H}^2 \rangle - \langle \mathsf{H} \rangle^2)^{1/2}$ は 1 次の量である．

式 (12.132) を t のべきで展開すればわかるように，指数関数的崩壊則からのずれは，極端に短い時間で顕著に現れる．そこでは

$$P(t) = 1 - (\langle \mathsf{H}^2 \rangle - \langle \mathsf{H} \rangle^2)\, t^2/\hbar^2 + \cdots \tag{12.135}$$

となる．もっと正確な式は[*36]

$$P(t) \geq \cos^2(t\,\Delta E/\hbar), \qquad \forall\ |t| \leq \pi\hbar/2\Delta E \tag{12.136}$$

であるが，これは次のように簡単に証明できる[*37]．不確定関係 (4.40) から，任意の演算子 A に対して

$$\Delta \mathsf{A}\, \Delta \mathsf{H} \geq \tfrac{1}{2}\, |\langle [\mathsf{A}, \mathsf{H}] \rangle| = \tfrac{1}{2}\, \hbar\, |\langle d\mathsf{A}/dt \rangle| = \tfrac{1}{2}\, \hbar\, |d\langle \mathsf{A} \rangle/dt| \tag{12.137}$$

となる．特に A を初期状態 $\psi(0)$ への射影演算子としよう．

そのときは

$$\langle \mathsf{A} \rangle = \langle \psi(t), \mathsf{A}\, \psi(t) \rangle = P(t) \tag{12.138}$$

となる．さらに，$\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$ なので，

$$(\Delta \mathsf{A})^2 = \langle \mathsf{A}^2 \rangle - \langle \mathsf{A} \rangle^2 = P - P^2 \tag{12.139}$$

となる．これらの式から

$$|dP/dt| \leq (2\,\Delta E/\hbar)\, \sqrt{P(1-P)} \tag{12.140}$$

が得られるが，簡単な積分を実行すれば，式 (12.136) が出てくる．

12.9　両立しないオブザーバブル

相互作用 (12.39) を

$$\mathsf{H} = g(t)\, (\mathsf{A}\, \mathsf{p}_1 + \mathsf{B}\, \mathsf{p}_2) \tag{12.141}$$

のように一般化して，交換しない演算子 A と B を同時に観測してみよう．ここで，p_1 と p_2 は二つの互いに独立なポインターに関係している．解析を簡単にするため，相

[*36] G. N. Fleming, *Nuovo Cimento A* 16 (1973) 232.
[*37] D. Home and M. A. B. Whitaker, *J. Phys. A* 19 (1986) 1847.

互作用期間中 (時間の単位を適当に選んで $0 < t < 1$) では $g(t) = 1$ としよう．相互作用 (12.141) の結果はハイゼンベルク描像，あるいは等価であるが，交換関係のかわりにポアソン括弧式で置き換えた古典力学で行うと最も簡単にわかる．運動方程式は

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0, \qquad \dot{q}_1 = A, \qquad \dot{q}_2 = B \tag{12.142}$$

そして

$$\begin{aligned} \dot{A} &= [A, H]_{\rm PB} = p_2\,[A, B]_{\rm PB} \\ \dot{B} &= [B, H]_{\rm PB} = p_1\,[B, A]_{\rm PB} \end{aligned} \tag{12.143}$$

である．古典力学では常に $p_1 = p_2 = 0$ ととれるので，式 (12.143) から A と B は測定過程でも乱されない．量子論ではもっと複雑な状況になる．ポインターははっきりと局所化していて欲しい．大きな分散のために変位

$$\mathsf{q}_1(1) - \mathsf{q}_1(0) = \int_0^1 \mathsf{A}(t)\,dt, \qquad \mathsf{q}_2(1) - \mathsf{q}_2(0) = \int_0^1 \mathsf{B}(t)\,dt \tag{12.144}$$

の期待値が崩されてしまわないようにポインターの波動関数 $\phi_1(q_1)$ と $\phi_2(q_2)$ のサポートは狭くなければならない．

しかしながら，$\phi(q)$ のサポートが狭ければ，必然的に対応する運動量表示の分布 $\tilde{\phi}(p)$ が広くなる．その結果，式 (12.143) から A と B は測定過程で一定でありえなくなる．測定によって，お互いが乱され，式 (12.144) によって与えられる最終的なメーターの読みは A と B の初期値でも終期値でもなく，むしろ相互作用中のある値を示すことになる．

正値演算子測度

両立しないオブザーバブルについて情報を得るもっとうまい方法は，式 (9.79) のような非直交 POVM を使うことである．その結果得られる情報は，以下の例ではっきりと理解できるように，必ずあいまいさをもつが，量子論ではせいぜいこれが最善である．

優れた POVM とは何だろうか? 当然以下のようなことが要求される．A がはっきりした値をもつ (そのことは A をフォン・ノイマン型測定をすることで確かめられる) ように系が準備されているとすれば，POVM によってその値が良く評価されよう．そしてまた，系が B のはっきりした値をもっているなら，同じ POVM でもって B の値が良く評価できよう．この基準は一般的に “測定” という言葉の古典的な意味に一致するが，しかしまた，量子論で要請されるような，結果に対していくぶんかの不確定さも許容する．

逆に，(量子検証によって) POVM のある成分を選択することは，A と B 双方とも，おおざっぱな値しかもたない混合状態を準備することに等価であろう．このような性質の例は，すでに 386 ページの例で見ているが，そこでは角運動量コヒーレント状態を近似的に求めるために POVM が使われていた．

演習問題 12.17　式 (12.37) のアナロジーから，q と p が近似的に測定できるような POVM を構成せよ．

q と p を同時に観測できる簡単で，直観的な方法が，オーサーズとケーリー[*38,*39]によって提案された．正準変数 Q と P をもつ補助的な系を考え，それが $\langle \mathsf{Q}\rangle = \langle \mathsf{P}\rangle = 0$，かつ $\Delta\mathsf{Q}\,\Delta\mathsf{P} = \hbar/2$ という標準的なコヒーレント状態 Ψ_0 に準備されていたとしよう．力学変数 $\mathsf{q}-\mathsf{Q}$ と $\mathsf{p}+\mathsf{P}$ は可換だから，同時に測定できる．

測定を行う前の複合系の状態は直積状態 $\psi(q)\otimes\Psi_0$ である．測定結果の分散は

$$[\Delta(\mathsf{q}-\mathsf{Q})]^2 = \langle(\mathsf{q}-\mathsf{Q})^2\rangle - \langle\mathsf{q}-\mathsf{Q}\rangle^2 = (\Delta\mathsf{q})^2 + (\Delta\mathsf{Q})^2 \tag{12.145}$$

と期待され，$\Delta(\mathsf{p}+\mathsf{P})$ も同様である．初期状態で $\Delta\mathsf{q} \ll \Delta\mathsf{Q}$ であれば，$\Delta(\mathsf{q}-\mathsf{Q}) \simeq \Delta\mathsf{Q}$ となり，その結果，$\mathsf{q}-\mathsf{Q}$ の期待値は q の確定値より，典型的にほぼ $\Delta\mathsf{Q}$ だけ違ってくる．逆に初期状態に $\Delta\mathsf{p} \ll \Delta\mathsf{P}$ ならば，$\Delta(\mathsf{p}+\mathsf{P}) \simeq \Delta\mathsf{P}$ となり，$\mathsf{p}+\mathsf{P}$ の測定値は p の確定値からほぼ $\Delta\mathsf{P}$ だけ違うであろう．こうして優れた POVM の基準を満たすことができる．

上の操作に対応する POVM を具体的に書き下しておくのが有益だろう．$\mathsf{x} = \mathsf{q}-\mathsf{Q}$，$\mathsf{y} = \mathsf{p}+\mathsf{P}$ とする．これらは可換な演算子の完全な組であり，複合系の純粋状態は $\Phi(x,y)$ のように書ける．古典的な xy 面を，(x_μ, y_μ) に中心を置く四角い小細胞 $\mathcal{C}_\mu$ に分け，全平面を覆う．ある特別な添字 μ を決めることは，細胞 $\mathcal{C}_\mu$ の大きさの精度で x と y を測定することと等価である．

次の二つの関数を定義しよう．

$$f_\mu(x) = \begin{cases} 1 & (x\in\mathcal{C}_\mu \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外のとき}) \end{cases} \tag{12.146}$$

$$g_\mu(y) = \begin{cases} 1 & (y\in\mathcal{C}_\mu \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外のとき}) \end{cases} \tag{12.147}$$

さらに，$\Pi_\mu(x,y) := f_\mu(x)\,g_\mu(y)$ を定義しよう．これは $\sum_\mu \Pi_\mu(x,y) \equiv 1$ そして

$$\Pi_\mu(x,y)\,\Pi_\nu(x,y) \equiv \delta_{\mu\nu}\,\Pi_\nu(x,y) \tag{12.148}$$

を満たす．量子論では $\Pi_\mu(\mathsf{x},\mathsf{y})$ は直交写像の完全系であり，フォン・ノイマン測定での可能な結果に相当する．複合系が初期に Φ という状態にあれば，μ という結果を得る確率は

$$\langle\Pi_\mu\rangle = \langle\Phi,\, f_\mu(\mathsf{x})\,g_\mu(\mathsf{y})\,\Phi\rangle = \langle f_\mu(\mathsf{x})\,\Phi,\, g_\mu(\mathsf{y})\,\Phi\rangle \tag{12.149}$$

となる．$f_\mu(\mathsf{x})\Phi$ を表すのにもっとも都合の良いのは，明らかに座標表示，つまり $f_\mu(q-Q)\,\psi(q)\,\Psi_0(Q)$ である．同様に，$g_\mu(\mathsf{y})\Phi$ は運動量表示により，最も簡単に

[*38] E. Arthurs and J. L. Kelly, Jr., *Bell System Tech. J.* 44 (1965) 725.
[*39] S. Stenholm, *Ann. Phys. (NY)* 218 (1992) 233.

$g_\mu(p-P)\,\tilde\psi(p)\,\tilde\Psi_0(P)$ のように書ける．したがって，内積 (12.149) は二つの異なる表示に関係している．このことは何ら問題ない．たとえば，$\mathsf{u} = \sum a_m\,\mathsf{u}_m$ そして $\mathsf{v} = \sum b_\mu\,\mathsf{v}_\mu$ であれば，

$$\langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle = \sum_{m\mu} \overline{a_m}\,\langle \mathsf{u}_m\,,\mathsf{v}_\mu\rangle\, b_\mu = \sum_{m\mu} \overline{a_m}\, C_{m\mu}\, b_\mu \tag{12.150}$$

となる．ただし，$C_{m\mu}$ は基底 $\{\mathsf{u}_m\}$ と $\{\mathsf{v}_\mu\}$ を関係づけるユニタリー行列である．同様に，波動関数 $\phi(q)$ と $\tilde\psi(p)$ が与えられれば，運動量表示 (10.54) から，

$$\begin{aligned}\langle \phi,\psi\rangle &= \int \overline{\phi(q)}\,\psi(q)\,dq = \int \overline{\phi(q)}\left[\int e^{iqp/\hbar}\,\tilde\psi(p)\,dp/\sqrt{2\pi\hbar}\right]dq\\ &= \iint \overline{\phi(q)}\,e^{iqp/\hbar}\,\tilde\psi(p)\,dq\,dp/\sqrt{2\pi\hbar}\end{aligned} \tag{12.151}$$

が得られる．式 (12.149) で与えられる $\langle \Pi_\mu\rangle$ の値は

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\iiiint \overline{f_\mu(q-Q)\,\Phi(q,Q)}\,e^{i(qp+QP)/\hbar}\,g_\mu(p+P)\,\tilde\Phi(p,P)\,dq\,dp\,dQ\,dP$$

となる．この式を計算するために，積分変数 q, p, Q, P を q, p, $x=q-Q$, $y=p+P$ で置き換える．(この変換のヤコビアンは 1 である.) x と y の積分は，細胞 $\mathcal{C}_\mu$ が小さくて，被積分関数の中のその他の関数がその細胞中では一定と見なせるようならば，自明なものとなる．つまり，被積分関数に現れる x を x_μ，y を y_μ で置き換えればよい．細胞の面積を S_μ (これは作用の次元をもつ) と書けば，

$$\begin{aligned}\langle \Pi_\mu\rangle &= \frac{S_\mu}{2\pi\hbar}\iint \overline{\Phi(q,q-x_\mu)}\,e^{i(qy_\mu+x_\mu p-x_\mu y_\mu)/\hbar}\,\tilde\Phi(p,y-p)\,dq\,dp \\ &= \frac{S_\mu}{2\pi\hbar}\int \overline{\Phi(q,q-x_\mu)}\,e^{iqy_\mu/\hbar}\,dq\ \int \tilde\Phi(p,y_\mu-p)\,e^{ix_\mu(p-y_\mu)/\hbar}\,dp\end{aligned} \tag{12.152}$$

が得られる．

このように因子化されることは驚くべきことである．ここで，特別に $\Phi(q,Q) = \psi(q)\,\Psi_0(Q)$ のようなオーサーズ–ケーリー初期状態を考えてみよう．ただし，

$$\Psi_0(Q) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}\,e^{-Q^2/2\sigma^2} \tag{12.153}$$

は $Q=P=0$ に中心をもつコヒーレント状態である．式 (12.152) では

$$\int \overline{\Phi(q,q-x_\mu)}\,e^{iqy_\mu/\hbar}\,dq = \int \overline{\psi(q)}\,\Psi_0(q-x_\mu)\,e^{iqy_\mu/\hbar}\,dq \tag{12.154}$$

となる．ここで，式 (10.99) から，

$$\Psi_0(q-x_\mu)\,e^{iqy_\mu/\hbar} = (\pi\sigma^2)^{-1/4}\,e^{-(q-x_\mu)^2/2\sigma^2}\ e^{iqy_\mu/\hbar} \tag{12.155}$$

は $\Psi_0(q)$ をずらしたものであり，(x_μ, y_μ) に中心を置く，新しいコヒーレント状態 $\Psi_\mu(q)$ となっている．したがって，式 (12.154) は

$$\int \overline{\psi(q)}\,\Psi_0(q-x_\mu)\,e^{iqy_\mu/\hbar}\,dq = \langle \psi,\Psi_\mu\rangle \tag{12.156}$$

となる．

演習問題 12.18　最小不確定性波束 (12.155) の運動量表示は

$$\tilde{\Psi}_\mu(p) = (\sigma^2/\pi\hbar^2)^{1/4}\, e^{-(p-y_\mu)^2\sigma^2/2\hbar^2}\, e^{-ix_\mu(p-y_\mu)/\hbar} \tag{12.157}$$

であり，また

$$\int \tilde{\Phi}(p, y_\mu - p)\, e^{ix_\mu(p-y_\mu)/\hbar}\, dp = \langle \Psi_\mu, \psi\rangle \tag{12.158}$$

となることを示せ．

この演習問題の結果を使えば，最終的に

$$\langle \Pi_\mu\rangle = (S_\mu/2\pi\hbar)\,\langle\psi, \Psi_\mu\rangle\,\langle\Psi_\mu, \psi\rangle = \langle\psi, \mathsf{A}_\mu\,\psi\rangle \tag{12.159}$$

が得られる．つまり，POVM 要素 A_μ はコヒーレント状態 Ψ_μ への射影演算子に比例しており，

$$\mathsf{A}_\mu := (S_\mu/2\pi\hbar)\,\Psi_\mu\,\Psi_\mu{}^\dagger \tag{12.160}$$

となる．

WAY の定理

ここまでは非可換演算子によって表現される**一対の**両立しないオブザーバブルを考えてきた．どのような演算子でも，式 (12.39) のような相互作用ハミルトニアンと組み合わせれば，いつでも**一つは**測定できると暗黙のうちに仮定していた．ここで，この仮定をもう少し詳しくしらべてみよう．量子論それ自体はどのようなハミルトニアンでもその実現可能性を排除しているわけではない．しかしながら，その後に要請されることによって許される相互作用の種類は制限されよう．特に，ある種の保存則は測定過程を通して重んじられなければならない．

たとえば，p を対象系の運動量，P を測定装置の運動量としよう．他に余分な運動量をもたらすような外部装置が存在しないなら，$\mathsf{p}+\mathsf{P}$ は保存される．このことによって，q のように，$\mathsf{p}+\mathsf{P}$ と交換しない演算子はいかなるものも測定できないことになる．(q を測定するには，相互作用ハミルトニアンに q を含む項が存在しなければならず，そうすると $\mathsf{p}+\mathsf{P}$ は一定でなくなる.) この理由は簡単である．全運動量の保存は，私たちが並進不変な世界に住んでいることを意味しているのであり，そこでは座標系の原点は物理的なものではない．したがって，位置演算子 q に実験的な意味がない．装置に対する対象系の**相対位置** $\mathsf{q}-\mathsf{Q}$ だけがオブザーバブルであるが，実際 $\mathsf{q}-\mathsf{Q}$ は $\mathsf{p}+\mathsf{P}$ と交換し，保存則を破ることなく測定できるのである．

より一般的に，WAY の定理[*40,*41]によれば，**加法的に保存する力学変数**と交換しない演算子は，測定不可能である．以下に簡単な証明を与える[*42]．

[*40] E. P. Wigner, *Z. Phys.* 133 (1952) 101.
[*41] H. Araki and M. M. Yanase, *Phys. Rev.* 120 (1960) 622.
[*42] G. C. Ghirardi, F. Miglietta, A. Rimini, and T. Weber, *Phys. Rev. D* 24 (1981) 347, 353.

A と B を対象系に属する二つの演算子，C を測定器の演算子とし，和 $\mathsf{B}+\mathsf{C}$ が保存しされるとしよう．特に，U が A の測定を引き起こすユニタリー演算子であるとすると，

$$\mathsf{U}^\dagger\,(\mathsf{B}+\mathsf{C})\,\mathsf{U}=\mathsf{B}+\mathsf{C} \tag{12.161}$$

となる．そのような測定によって，式 (12.3) のように，A の固有状態 ($\mathsf{A}\,\mathsf{u}_m=m\,\mathsf{u}_m$ で定義する) と装置の様々な状態 $\mathsf{v}_{m\alpha}$ との間に相関

$$\mathsf{u}_m\,\mathsf{v}_0\ \rightarrow\ \mathsf{U}\,\mathsf{u}_m\,\mathsf{v}_0=\mathsf{u}_m\sum_\alpha c_{m\alpha}\,\mathsf{v}_{m\alpha}\equiv\mathsf{u}_m\,\mathsf{w}_m \tag{12.162}$$

が発生することを思い出そう．最後の式が w_m を定義するが，それはユニタリー性から $\|\mathsf{w}_m\|=1$ を満たす．

示さなければならないのは $[\mathsf{A},\mathsf{B}]=\mathsf{O}$ でない限り，A は測定できないということである．実際，A を対角化する基底 u_m で，

$$\langle\mathsf{u}_m\,,[\mathsf{A},\mathsf{B}]\,\mathsf{u}_n\rangle\equiv\langle\mathsf{u}_m\,,(\mathsf{A}\,\mathsf{B}-\mathsf{B}\,\mathsf{A})\,\mathsf{u}_n\rangle\equiv(m-n)\,B_{mn} \tag{12.163}$$

となる．さらに，A は対象系に属し，C は測定装置に属するから，$[\mathsf{A},\mathsf{C}]\equiv\mathsf{O}$ である．したがって，式 (12.163) の行列要素は

$$\begin{aligned}\langle\mathsf{u}_m\,\mathsf{v}_0\,,[\mathsf{A},\mathsf{B}]\,\mathsf{u}_n\,\mathsf{v}_0\rangle&=\langle\mathsf{u}_m\,\mathsf{v}_0\,,[\mathsf{A},\mathsf{B}+\mathsf{C}]\,\mathsf{u}_n\,\mathsf{v}_0\rangle\\&=(m-n)\,\langle\mathsf{u}_m\,\mathsf{v}_0\,,(\mathsf{B}+\mathsf{C})\,\mathsf{u}_n\,\mathsf{v}_0\rangle\end{aligned} \tag{12.164}$$

となる．これらの方程式を結びつけると，$m\neq n$ に対して，$\langle\mathsf{u}_m\,,\mathsf{u}_n\rangle=0$ だから

$$\begin{aligned}B_{mn}&=\langle\mathsf{u}_m\,\mathsf{v}_0\,,\mathsf{U}^\dagger(\mathsf{B}+\mathsf{C})\mathsf{U}\,\mathsf{u}_n\,\mathsf{v}_0\rangle=\langle\mathsf{u}_m\,\mathsf{w}_m\,,(\mathsf{B}+\mathsf{C})\,\mathsf{u}_n\,\mathsf{w}_n\rangle\\&=\langle\mathsf{u}_m\,,\mathsf{B}\,\mathsf{u}_n\rangle\,\langle\mathsf{w}_m\,,\mathsf{w}_n\rangle+\langle\mathsf{u}_m\,,\mathsf{u}_n\rangle\,\langle\mathsf{w}_m\,,\mathsf{C}\,\mathsf{w}_n\rangle=B_{mn}\,\langle\mathsf{w}_m\,,\mathsf{w}_n\rangle\end{aligned} \tag{12.165}$$

となる．これから，$\langle\mathsf{w}_m\,,\mathsf{w}_n\rangle=1$ あるいは $B_{mn}=0$ が出るが，前者は観測しないことを意味し，後者は $[\mathsf{A},\mathsf{B}]=\mathsf{O}$ であることを意味する．

そうではあるが，もし装置の初期状態が大きな $\Delta\mathsf{C}$ をもっているとするなら，演算子 A を**近似的に**測定することは可能である [*41,*42]．たとえば，q でなく，$\mathsf{q}-\mathsf{Q}$ だけを測定したいとすれば，非常に狭い $\Delta\mathsf{Q}$ をもつ状態に装置を準備するであろう．そのとき，$\mathsf{q}-\mathsf{Q}$ の**測定された**値は，典型的に $\Delta\mathsf{Q}$ 程度の量だけ q の**期待**値 (これは直接測定できない) とは異なるであろう．したがって，$\Delta\mathsf{Q}$ はふつう，初期状態における Q の標準偏差として定義されるが，q の**推定**値に含まれる**不確定性**という意味ももつようになる．明らかに，このような操作では装置の初期状態は大きな $\Delta\mathsf{P}$ をもつ．

別の例もある．全角運動量が保存されれば，WAY の定理によって，回転のもとでスカラーであるものだけが測定できる．それならばどうすればシュテルン–ゲルラッハの実験で，μ_z が測定できるのであろうか? これは，保存する回転の生成演算子 J_x と J_y とは交換しないベクトル演算子の z 成分である．それでも μ_z は**近似的に**を測定でき

る．ポイントは μ_z がシュテルン–ゲルラッハの実験を記述するハミルトニアン (1.4) の中に $\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$ の形で現れていることである．実際これは回転のもとでスカラーであり，何ら保存則を破ることなしに測定できる．本当の問題は，原子線が存在するところで，磁場 $\mathbf{B}$ を外から決めた z 方向に正確に合わせることである．

磁場を望ましい方向に向けるには，磁石を多数の異なる角運動量状態の重ね合せとして準備しなければならない．すでに，12.7 節で N 状態量子ダイヤルというもっと簡単な系で，このような性質を見ている．一つ一つのダイヤル状態 (10.89) は角度分解能 $\alpha = 2\pi/N$ をもち，その角運動量の広がりは式 (12.100) で，$\Delta\mathsf{J} = (\pi/\sqrt{3})\,(\hbar/\alpha)$ と与えられる．さらに，シュテルン–ゲルラッハの磁石のような**巨視的な**物体では，ある角度分解能 α を決めると，必然的に $\Delta\mathsf{J}$ の値は $\hbar/\alpha$ より**かなり大きな**値をとることになる (巨視的物体の不確定性関係については，414 ページに引用されているフォックの意見を参照)．したがって，$\Delta\mathsf{J}$ に上限をおくなら WAY の定理は，実際に測定しているのが σ_z ではなくて，要請されている方向 z からわずかに違うある方向 $\mathbf{n}$ に沿った成分 σ_n であるということを意味している．

演習問題 12.19　$\Delta\mathsf{J} \gg \sqrt{\hbar J}$ となる J と $\Delta\mathsf{J}$ に対して，z 軸からずれると期待される方向 $\mathbf{n}$ を評価せよ．　　$\star\star$

12.10　近似的な実在

量子論は物理的実在を客観的に記述したものではない．それは，たとえば，ある標的に特定の粒子線が衝突した後に，粒子測定器をトリガーするといったような，ある種の設定をした後に生ずる**巨視的確率事象**の起こる確率を予言するにすぎない．このような理論的予言は，電子や光子などのような捉えどころのない微視的物体を含んだ概念的な模型に依拠している．これらの粒子は通常，実際に存在するものと考えられているが，6 章で見たように，古典的現実の直観とは相いれない異常な非局所性を示すことがある．

微視的物体と巨視的物体という 2 種類の対象の本質的な相異は，大きさではなく，それらの記述の完全さの問題なのである．量子系ではそのあらゆる自由度がハミルトニアンの中に考慮されている．一方で，巨視系の記述では，その自由度のうちのきわめて少数の部分 (10^{20} あるいは 10^{30} の中から数個) しか，具体的には使われていない．巨視系のすべての物理的性質を追跡することはほとんど**放棄**してしまっている．これらは**開いた系**である．具体的に考慮されていない自由度は外部環境と同じ役割を果たしている．(もちろん，中間的な**メゾスコピック**な対象も存在するが，そこでは自由度のうち，全部ではないがかなりの部分が具体的に記述されている．)

開いた系では不完全な記述しかしていないので，その演算子のいくつかは測定していないと仮定したくなる．たとえば，u と v を巨視的な強磁性体の互いに反対向きの磁化状態としよう．演算子 $\mathsf{M}_z = \mathsf{u}\mathsf{u}^\dagger - \mathsf{v}\mathsf{v}^\dagger$ は (固有状態 u と v をもつ) 観測可能量で

あるが，一方で，エルミート演算子 $\mathsf{M}_x = \mathsf{u}\mathsf{v}^\dagger + \mathsf{v}\mathsf{u}^\dagger$ はそうでない．M_x の固有状態は $(\mathsf{u}\pm\mathsf{v})/\sqrt{2}$ である．つまり，磁化 u と v の，あるいは，もしそう言いたいなら，シュレーディンガーの猫の生と死のコヒーレントな重ね合せである．次の演習問題が示すように，たとえそのような重ね合せ状態が準備できたにせよ，そのコヒーレント状態は，その存在が確認できない程度の時間しか維持できないだろう．

演習問題 12.20 そろったスピンをもつ 10^{20} 個の電子を含む磁針が，$\pm 10^{-9}$ ガウスの精度で安定化されている磁場中に置かれている．u と v 状態間の位相が完全に不確定となる時間はいかほどか?

解答：$\sim 10^{-17}$ s

この演習問題が示しているのは“ポインター状態”が現れる特別な場合である[*43]．一つ一つの巨視的状態に関連する自由度が，(上の例の u や v，あるいはシュレーディンガーの猫の L や D のような) 好ましい直交基底を定義する．基底の各要素は**ポインター状態**とよばれ，環境の小さな，制御不能なゆらぎに関し，全体の位相は別にして，安定な性質をもつ．一方で，ポインター状態の 1 次結合は本質的に非古典的性質をもち，実験的には達成しがたい．環境との相互作用によってそれらはただちにコヒーレントでない混合状態へ変わってしまうのである．

確かに，上で不可能であると要請したことは，発見法的研究のためにつくった規則以上のものでない．証明することはもちろんのこと，厳密に定式化することすらできない．量子論で，1 個，あるいは 1 組の粒子に対しては $(\mathsf{u}\pm\mathsf{v})/\sqrt{2}$ のような 1 次結合がつくれるが，10，あるいは 10^{10} 個の同一粒子では不可能であるというようなことは公式にはまったくない．実験家の能力を過小評価すべきではない．

測定可能な演算子を不可能な演算子と区別する何らかの規則があるとすれば，あらゆる測定可能な演算子が交換するような古典系を特別な種類の量子系として**定義**できる[*44]．そのような古典系のあらゆる測定可能量の性質は，**互いに無矛盾**であり，したがってはっきりした値をもてる．このように定義された“古典”系もまた非可換な演算子をもつかもしれないが，それらは抽象的な数学表現と見なされるべきであり，実験的には観測されないことに注意しよう．このように形式的に定義すれば，“古典”という概念は特定の力学変数の組に関連して意味をもつことがわかる．はっきりしていることは，十分に精度の良い測定手段を用いれば，どのような物理系も量子的特徴を示すといいうことである [*44]．物理学は厳密な科学ではなく，近似の科学なのである．

巨視的客観性

現実には，本書を通して提示してきたような理想化された準備と観測のパターンに従うものはほとんどない．たとえば，天文学者がスペクトル線を観測する (つまり，光

[*43] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* 24 (1981) 1516; 26 (1982) 1862.
[*44] J. M. Jauch, *Helv. Phys. Acta* 37 (1964) 293.

子を測定する) 場合，それは星の内部に存在する原子や分子によるものと解釈する．それらの原子が励起状態にあったのはずっと昔のことであり，それらが基底状態に崩壊して光子を放出してから，かなり経った現在，私たちが観測しているということは明らかである．励起された原子を準備したのは私たちでも，また，助手たちでもない．受動的に光子を観測するだけである．また，地球を回っている月やその他の惑星のようなもっと大きな物体も，それらを前もって準備することなく，観測している．

これらは，もし月や，惑星，星間の原子などがはっきり決まった状態 ρ で定義されているなら，量子論に何ら概念的に困難な問題を引き起こすことはない．しかしながら，この本では一貫して ρ は一つ一つの系の性質ではなく，そのような系の多数の集合を準備する**操作**を表しているといってきた．準備するものがいない状況はどのように記述できるだろうか?

この問題をもっと厳密に定式化してみよう．これまでの関心は式 (9.79) によって答えられるような種類の問題，つまり,「ρ という状態が与えられたときに，(POVM の μ 番目の要素) A_μ が観測される確率はどうなるか?」にあった．ところが，別種の質問もある．たとえば，天文学者 $\mathcal{A}$ が POVM 要素 A_μ を首尾良く観測したとし (たとえば，彼の写真乾板上にある一点を観測し，それを星と解釈する)，そのとき別の天文学者 $\mathcal{B}$ が，ある決まった POVM 要素 B_n を同様に観測するような確率はどうなるであろうか? 因果的に独立とするために，二つの観測は互いに空間的な領域で (たとえば，ある星の反対側で，同時に) 行われたとしよう．2 人の天文学者とも相手の実験に影響を与えることはできない．

原則的に，計算は以下のように進められる．私たちの観測者が配位 ρ_i に出会える**ア・プリオリ**確率を p_i と書こう．(この ρ_i は，自然につくられていても他の人たちによって準備されていてもよい.) もし，$\mathcal{A}$ が彼の POVM の要素 A_μ を観測するとすれば，ベイズ統計 (2.7 節参照) の規則によって，配位 ρ_i を見いだす**ア・ポステリオリ**確率は

$$Q_{i\mu} = P_{\mu i}\, p_i \Big/ \sum_j P_{\mu j}\, p_j \tag{12.166}$$

となる．ただし， $P_{\mu i} = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{A}_\mu\, \rho_i)$ は ρ_i が準備されたあと μ という結果が得られる確率である．すると，($\mathcal{A}$ が要素 A_μ を観測して) 観測者 $\mathcal{B}$ が彼女の POVM の要素 B_n を観測する条件付き確率は

$$\mathbf{P}\{n|\mu\} = \sum_i \mathrm{Tr}\,(B_n\, \rho_i)\, Q_{i\mu} \tag{12.167}$$

となる．ただし，この和は配位 ρ_i の完全系 (たとえば，星なら，そのあらゆる可能な種類，そしてそれらの可能な位置) についてとられる．そこで，古典的に十分記述できる古典的対象があるような状況のとき，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ による観測が古典的に矛盾するようならば，直観的には $\mathbf{P}\{n|\mu\}$ が非常に小さくなると期待される．そのような場合には，実用上無視できる量子論的不確定性を除けば，これらの観測によって客観的な (つまり，観測者にはよらない) 古典的実在が定義されるのである．

$\mathcal{A}$ も $\mathcal{B}$ も完全な組の観測を行っているわけではない．現実には**別々の**部分系を観測している．$\mathcal{A}$ が観測した光子は $\mathcal{B}$ が観測した光子と同一の原子から来ているわけではない．すると，なぜ，ある星が天空のどこかに客観的に存在していると，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が同意することを期待できるのであろうか? その理由は星のような巨視的対象は，どんなものでも，測定装置の精度の範囲内である特定の同一の場所に，膨大な数の**ほとんど同一な性質の同一な部分系**をもっているからである．したがって，古典的対象は実質上一つの集合なのであり*45，良い近似で統計アンサンブルに類似している．そのような集合を観測すれば膨大な数の縮退がある．特に，一つ一つが無限のアンサンブルと見なせるような，集合をばらばらに分解するのに様々な測定装置が使える．そうすれば，小さな分散で非可換な演算子の期待値を計算できる．

ここで読者は，この実用的な方法とこの本のはじめのほうの章で採用したドグマの間にある違いに気がついたに違いない．そこでは理論家が書いた演算子はどんなものであれ，実験室でも観測できると主張されていた．これは架空の話だが，量子論の形式的枠組を確立するには必要なことだった．今や，私たちの最終目標は違うものになっている．巨視的現象を良い近似で記述するような**古典的記述法**を使いたいのである．量子的記述から古典的記述に移行するには，物理変数をかなりぼかす (たとえば，$\Delta \mathsf{q}\,\Delta \mathsf{p} \gg \hbar$)*34 という犠牲なしには不可能である．たとえ曖昧なものにすぎなくとも，客観的実在をもたらすのはこの分解能を減少させることである．

測定可能な演算子は，あらゆる定義可能な演算子の中で小さな部分集合をつくるにすぎない．私たちは考えられるあらゆる検証のうちで無視できるほどのわずかな部分しか実施できないし，その結果，ρ_i については**部分的**にしかわからないことになる．(知識が不足していることは，とりうるあらゆる可能性について適当に重みを付けて混合させることで表現される.) 通常求めやすいデータは対象物の質量中心の位置や速度のような巨視的変数である．これらの巨視的変数では $\Delta \mathsf{q}\,\Delta \mathsf{p} \gg \hbar$ となる．これらの古典的不確定性に比べて，量子論的測定によって引き起こされる擾乱は無視できるほど小さい．さらに巨視的質量は非常に大きいから，対応する波長は小さく，回折効果は無視できる．したがって，位置を連続的に測定することによって結果を予言できる．こうして，決定論的運動方程式の適用性は保証され，その結果，観測者が存在しなかった場合，あるいは将来存在しないような場合でも今の知識を遠い過去，あるいは未来へと外挿できるのである．

演習問題 12.21　多数のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子が $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ (ただし，$|\mathbf{m}| \leq 1$) という偏極状態にある．1 人の測定者がそれぞれ 100 個の粒子を含む 3 個の部分集合をとり，$\langle\sigma_j\rangle$ の 3 成分を測定し，それによって偏極のパラメーター $\langle\sigma_j\rangle$ を決定する．2 番目の測定者が 100 個の粒子からなる別の 3 個の集合で，同じことを行う．2 人の測定が違って見えるのはどのくらいあるか? それぞれの測定者が各成分 σ_j に対して 1 個の粒子しか測定できないとすれば，この同じ質問の答はどうなるか?　★

---

*45 59 ページの脚注*9 と関連する本文を参照．

まとめると次のようになる．巨視的対象はほとんど同一な状態をもつ同一な部分集合を多数含んでおり，観測者が**問題になりうるあらゆるもののうちの小さな部分集合**だけに限定してしらべている限り，それらの巨視的対象は客観的 (つまり，観測者にはよらない) 性質をもつようにふるまう．たとえば，ρ が私のペンのある状態を表し，ρ' が 1 個の原子を取り去ったそのペンの状態とするなら，これらの二つの状態は直交する．しかしながら，これらの状態は $\mathrm{Tr}\,(\rho\,\mathsf{A}) \neq \mathrm{Tr}\,(\rho'\,\mathsf{A})$ のような演算子 A を測定して始めて区別できる．$\mathrm{Tr}\,(\rho\,\Omega) \simeq \mathrm{Tr}\,(\rho'\,\Omega)$ のような演算子のクラス Ω にのみ注目しているなら，ペンから原子 1 個が失われているかどうかはわからない．

連続測定に対するベルの定理

巨視的物体のポインター状態 *43 だけが準備でき，そして観測できるという仮説をいったん受け入れれば，さらに進んで，巨視的物体はこれらの状態だけが実際に**とりうる**ので，異なるポインター状態の重ね合せではありえない (たとえば，シュレーディンガーの猫は生きているか死んでいるかで，生と死の量子力学的重ね合せ状態にさ迷っているのではない) と仮定したくなる．確かにこの仮定は正統的な量子力学から根本的に離れているが，そうでないかどうかは，巨視的系でのみ確かめられるから，量子力学が巨視的系には適用できないと推量するのは不合理ではない．おそらくは，外部のものによって準備されてから観測されるまでの間，微視的物体が完全に孤立しているような極限状態でしか成り立たないだろう．多数の自由度をもつ開いた系では量子力学はうまくいかないかもしれない．

これらの仮定がもたらす観測可能な効果をしらべてみよう．ポインター状態を巨視的性質から見れば，ポインター状態は**侵害されることなく**，つまり，別のポインター状態に移ることなしに認識できるとするのがもっともらしい．そうすると，巨視的系の時間発展はあるポインター状態から別の状態への確率的転移として構成できよう．古典的力学法則が成り立つ極限では，その時間発展は決定論的となるであろう．

ここで，6 章でベルの定理を導いたときのように，± 1 の値をもつ 2 値変数 A を考えよう．上の仮定によって，A は各瞬間ごとにはっきりした値 1 あるいは -1 をとっている．時刻 t_j における A の値を a_j としよう．連続する 3 時刻では，必ず

$$(a_1 + a_3)\,a_2 \leq 1 + a_1\,a_3 \tag{12.168}$$

となる．この方程式は何ら特別な力学法則を仮定しているわけでなく，**侵害されない測定**[*46]は実行できるという可能性だけを仮定している．つまり，右辺の a_3 の値 (a_2 は観測していない) は左辺の値 (a_2 を観測しているとき) と同一である．

もし，同一の巨視的操作にしたがって多数の物理系が準備されているとき，微視的に詳しく見ればまだ何か違っており，そしてこれらの系に対する a_j の実際の値が違っ

[*46] A. J. Leggett and A. Garg, *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 857; *ibid.* 63 (1989) 2159.

ているかもしれない．そこで，$\langle a_i\, a_j\rangle$ のようなアンサンブル平均を考え，

$$K_{ij} := 1 - \langle a_i\, a_j\rangle \tag{12.169}$$

を定義しよう．式 (12.168) によって，K_{ij} は

$$K_{13} \le K_{12} + K_{23} \tag{12.170}$$

を満たす．これはハーバートの不等式[*47]を少し一般化したものであり，これもまたそのようによぶことにする．これを導くために必要な唯一の仮定は客観的ポインター状態の侵害されない観測可能性だけである．これは反実証主義的な仮説であり，**時間の局所性**とよんでもよい．a_3 の値を決定するとされる隠れた変数は a_2 を測定するかしないかには関わらず，同一となる．ベルの不等式が**空間的な局所性**の同様な結論であったことを思い起こそう．いずれの場合とも特別な力学モデルは仮定されていない．

K_{ij} の実際の値は，量子論が成り立つなら，量子論から，あるいは巨視的物体に対して量子論に取って代われるような理論があるなら，それから求められる．あるいは，どんな理論とも無関係に**実験的**に測定できる．したがってハーバートの不等式 (12.170) はちょうどベルの不等式のように，実験的に検証できる．たとえば，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の歳差運動を $\mathsf{H} = \hbar\omega\sigma_x$ として考えてみよう．等時間間隔 t で σ_z を測定すれば，$K_{12} = K_{23} = 1 - \cos 2\omega t$ と $K_{13} = 1 - \cos 4\omega t$ が得られる．ハーバートの不等式 (12.170) は

$$2\,(1 - \cos 2\omega t) \le 1 - \cos 4\omega t \qquad (?) \tag{12.171}$$

となるが，これは $|\omega t| < \pi/4$ で成り立たない．これは驚くには当らない．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子は紛れもない量子論的対象であり，特権的なポインター状態はなく，巨視的物体には一時的に与えられるような客観的性質はもてないのだ．

演習問題 12.22　一様に回転している古典的粒子を考え，その $a_i = \mathrm{sign}\,(\cos\theta)$ を観測するとしよう．この場合 $K_{ij} = |\theta_i - \theta_j|$ となり，その結果ハーバートの不等式が満たされることを示せ．

演習問題 12.23　もし，$\Delta\mathsf{H}$ が有限であるとすると，フレミングのユニタリー極限 (12.136) はハーバートの不等式 (12.170) と矛盾することを示せ．　⋆

もっと興味深い例は量子化された磁束を囲む超伝導ループである．ループを流れる電流は環境から十分隔離された集団自由度である．磁束の各固有状態は一定値 $\Phi_0 = h/2e = 2.0678 \times 10^{-15}\,\mathrm{Wb}$ だけ離れている．それらの固有状態はポインター状態と考えられる．これらのレベル間の遷移がレゲットとガーグ [*46] によってしらべられた．彼らは式 (12.170) と同様な不等式を導き，それらの実験的な証明を考えた．

[*47] N. Herbert, *Am. J. Phys.* 43 (1975) 315.

巨視系の量子測定に近い実験結果がフェリチン結晶で得られた．それは約 4500 個のスピンが自然に整列した反強磁性蛋白質であるが，互いに逆向きの磁化状態間の量子的遷移が観測されたのである*48．これらの実験は，条件に雑音があったため，決定的でない部分が残されてしまった．しかしながら，技術が改良されれば，近い将来巨視的に異なる状態のコヒーレントな重ね合せ，そしてそれらの間の可逆な遷移が観測できるものと期待される．

12.11 参 考 文 献

J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) [transl. by E. T. Beyer: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1955)].

C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York (1976).

P. Busch, P. J. Lahti, and P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement*, Springer, Berlin (1991).

これらのうち最初の文献は古典となったものであり，量子観測問題に関する初期の思想をつくり上げた．これは量子論に厳密な基礎を与えようとしたはじめての重要な試みであり，その発展に深く影響した．それに対し，ヘルストロームの本は最近の情報工学の実用的観点から書かれており，雑音を伴った信号に関する統計的解析に力点を置いている．3 番目の本はより抽象的表現が好きな読者に好まれよう．

量子観測問題に関する幅広い論文集は以下の選集に見られるが，それらにはまた編集者の興味深いコメントが載っている．

Quantum Theory and Measurement, ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton Univ. Press, Princeton (1983).

Foundations of Quantum Mechanics Since the Bell Inequalities, ed. by L. E. Ballentine, Am. Assoc. Phys. Teachers, College Park (1988).

Nonclassical Effects in Quantum Optics, ed. by P. Meystre and D. F. Walls, Am. Inst. Phys., New York (1991).

最後に，実際どうなっているか知りたければ，次の論文を読むべきである．

C. D. Tesche, "Can a noninvasive measurement of magnetic flux be performed with superconducting circuits?" *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2358.

実験物理学者によるこの量子測定に関する論文は，レゲットとガーグの提案した実験 *46 が実際に実現可能かについて書かれたものである．その装置はしきい値が変えられるスイッチと磁力計をもつ超伝導量子干渉計 (SQUID) から構成されている．これらは開いた系であり，適切に論じるには雑音温度やオーム抵抗のような概念が必要だが，本書ではそれらを無視した方が都合がよいと思った．

*48 D. D. Awshalom, J. F. Smyth, G. Grinstein, D. P. DiVincenzo, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 3092; *ibid.* 70 (1993) 2199.

人 名 索 引

事 項 索 引

ま 行

や 行

ら 行

訳者あとがき

本書は1995年に出版された，テクニオン・イスラエル工科大学教授のアッシャー・ペレスの *Quantum Theory: Concepts and Methods* を翻訳したものである．この年は，ハイゼンベルクとシュレーディンガーによってもたらされた量子力学の誕生からちょうど70年目に当る．もう70年過ぎたというべきか，まだ70年というべきか，人により受け取りかたの違いがあろう．この間多数の量子力学の教科書が現れ，その中には名著といわれるものも少なくない．それらに記述されている方法に従えば，電子の散乱断面積や半導体中のバンド構造など，量子論にかかわる多種多様な分野におけるほとんどの問題を第1原理から計算でき，微視的現象を矛盾なく説明し，予言できる．科学技術の世紀といわれる20世紀の中でも，人類に対して量子論の果たした貢献はきわめて大きい．エレクトロニクスや量子光学などの先端科学技術はいうまでもなく，基礎化学やそれらの成果を取り入れた日常生活用各種製品の実現，DNA構造解明などの生命科学における新展開，宇宙創世における量子効果やエネルギーの物質化などの基礎科学における根本的問題への取り組みなど量子論の広がりは留まるところを知らない．シュレーディンガーの波動関数を確率振幅とし，コペンハーゲン流の解釈に従えば，量子現象は矛盾なく説明される．プラグマティックな立場からみれば，これで十分なのかもしれない．しかし，このような観かたには違和感をもたれる人も少なくないであろう．

量子現象が起こっているのは通常，微視的世界であり，私たちは巨視的な広がりをもつ測定装置を介してそのふるまいを認識している．ここに量子論の存在論的意味合いに関して多様な解釈が生まれ，厳しい論争が展開される．本書は量子力学を記述するにあたって，あいまいな概念の使用は一貫して拒否する一方，実験結果を予言し，解析するために物理研究者が通常使っている理論だけを用いて，量子力学を概念的に明確にし，その物理的意味合いを数学的に定式化している．ここにこれらの論争に対する著者の解答が与えられていると同時に量子論に対する姿勢が提示されている．この種の教科書として，今だかつて類を見ない名著であるばかりでなく，最新の研究成果が数多く取り入れられている最新版でもある．

本書は原著のLaTeXファイルから翻訳した．丸善出版事業部の佐久間弘子氏には翻訳作業の段階で，本間正信氏には編集作業において，ひとかたならぬお世話になった．心から感謝致します．

本書が，ある意味で今なお発展途上にある量子力学の真の姿を理解し，量子論を基

礎づけようと志す物理学研究者，数学研究者，科学哲学者，そしてまた，量子通信，量子コンピューターなど，量子論のかかわる先端技術分野における研究者の役に立つことを心より希望する．

2001 年 8 月

大 場 一 郎
山 中 由 也
中 里 弘 道

ペレス 量子論の概念と手法
先端研究へのアプローチ

平成13年9月25日 発 行

訳 者 大 場 一 郎
山 中 由 也
中 里 弘 道

発行者 村 田 誠 四 郎

発行所 丸 善 株 式 会 社
出版事業部
〒103-8245 東京都中央区日本橋二丁目3番10号
編集部 電話(03)3272-0512／FAX(03)3272-0527
営業部 電話(03)3272-0521／FAX(03)3272-0693
http://pub.maruzen.co.jp/
郵便振替口座 00170-5-5

印刷・三美印刷株式会社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 4-621-04922-4 C3042 Printed in Japan